



**HAL**  
open science

# Période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées pour le contrôle du centrage d'un procédé

Ndèye Niang, Gilbert Saporta

## ► To cite this version:

Ndèye Niang, Gilbert Saporta. Période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées pour le contrôle du centrage d'un procédé. *Revue de Statistique Appliquée*, 1995, 43 (3), pp.5-20. hal-02507882

**HAL Id: hal-02507882**

**<https://cnam.hal.science/hal-02507882>**

Submitted on 16 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

N. NIANG

G. SAPORTA

**Période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées pour le contrôle du centrage d'un procédé**

*Revue de statistique appliquée*, tome 43, n° 3 (1995), p. 5-20

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1995\\_\\_43\\_3\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1995__43_3_5_0)

© Société française de statistique, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **PÉRIODE OPÉRATIONNELLE MOYENNE DE LA CARTE DE MOYENNES MOBILES ÉQUIPONDÉRÉES POUR LE CONTRÔLE DU CENTRAGE D'UN PROCÉDÉ**

N. Niang, G. Saporta

*Département de Mathématiques  
Conservatoire National des Arts et Métiers Paris*

### **RÉSUMÉ**

La période opérationnelle moyenne d'une carte de contrôle est le nombre moyen d'échantillons ou sous groupes prélevés entre le moment où un dérèglement se produit et l'instant où la carte de contrôle le signale. C'est une mesure communément admise de l'efficacité d'une carte de contrôle. Nous donnons dans cet article les formules exactes de calcul de la période opérationnelle moyenne de la carte de moyennes mobiles équipondérées. Les tableaux et les graphiques fournis en annexe permettent de déterminer la carte adaptée à la détection de dérèglages d'amplitude fixée. On constate que la carte de moyennes mobiles équipondérées remplace avantageusement la carte de Shewhart et est d'efficacité comparable aux cartes EWMA et CUSUM en étant d'utilisation aussi simple.

*Mots-clés : carte de contrôle, moyennes mobiles, période opérationnelle moyenne.*

### **SUMMARY**

When controlling a process mean, we are interested with charts that can detect a shift in the mean as soon as possible. The average run length of a control chart is the expected number of samples or subgroups that would be obtained before a out-of-control signal is received. In this article we present exact formulas for the calculation of the average run length of the moving average chart. Tables and charts, provided in annexes, allow the choice of the adequate control chart for a shift of fixed magnitude. It is clear that the moving average control chart is better than the Shewhart control chart and has an efficiency similar to EWMA and CUSUM charts while being as of simple use.

*Keywords : Control chart, moving average, average run length.*

### **1. Introduction**

Le contrôle statistique en cours de fabrication est essentiellement basé sur l'utilisation de cartes de contrôle dites aux mesures traçant l'évolution des caractéristiques d'un produit ou d'un procédé. La carte de contrôle est un outil qui permet de détecter à travers des prélèvements successifs de petits échantillons de taille  $n$  le dérèglement d'un paramètre de centrage (moyenne) ou de dispersion (écart

type, étendue) par rapport à des valeurs de référence fixées. Nous nous intéressons exclusivement au dérèglement de la moyenne d'un procédé.

Il existe plusieurs sortes de cartes de contrôle toutes basées sur l'hypothèse que les  $X_i$  sont distribués selon une loi normale  $N(m_0; \sigma_0)$ ; les valeurs cibles ou de référence  $m_0$  et  $\sigma_0$  sont supposées connues ou fixées, dans le cas contraire, elles sont remplacées par des estimations sans biais. On peut distinguer deux grandes familles de cartes de contrôle :

– les cartes de contrôle qui utilisent à chaque instant  $i$  la seule valeur  $\bar{X}_i$  moyenne des  $n$  mesures dont on dispose à l'instant  $i$ ; ce sont les cartes de Shewhart classiques [3]. On compare chaque valeur  $\bar{X}_i$  aux limites  $m_0 - 3\sigma_0/\sqrt{n}$  et  $m_0 + 3\sigma_0/\sqrt{n}$ .

– les cartes de contrôle qui utilisent à la fois les mesures à l'instant  $i$  et les mesures aux instants antérieurs à  $i$ . Les plus répandues sont les cartes à sommes cumulées (CUSUM) [7] et les cartes de moyennes mobiles à pondération exponentielle (EWMA) [4] qui à chaque instant  $i$  comparent une statistique fonction de toutes les mesures aux limites de contrôle.

Pour les CUSUM on calcule  $S_i^+ = \max(0, S_{i-1}^+ + z_i - k)$  et  $S_i^- = \min(0, S_{i-1}^- + z_i + k)$  où  $z_i$  est la valeur centrée réduite de  $\bar{X}_i$  et  $k$  un coefficient de sensibilité en général choisi égal à la moitié du dérèglement que l'on souhaite détecter. L'alerte est donnée lorsque  $S_i^+$  est supérieure à  $h$  ou  $S_i^-$  inférieure à  $-h$ ; pour le choix de la valeur limite  $h$ , on se reportera à la norme AFNOR X06-031.4.

Les EWMA sont basées sur une moyenne pondérée des  $\bar{X}_i$ ; à chaque instant  $i$  on calcule  $M_i = r\bar{X}_i + (1 - r)M_{i-1}$ .

On peut également utiliser les cartes de moyennes mobiles équipondérées d'ordre  $w$  [3]; nous rappellerons leur mise au point dans le paragraphe suivant. Elles utilisent non pas toutes les mesures mais les  $w$  les plus récentes. De façon quelque peu surprenante elles sont moins utilisées que les CUSUM ou EWMA. Cela est peut-être dû au manque de travaux ou publications concernant leur efficacité. En effet, alors que des tables donnant la période opérationnelle moyenne des cartes CUSUM [1] et EWMA [2] [6] ont été publiées, les seuls éléments à notre connaissance sur la période opérationnelle moyenne des cartes de moyennes mobiles équipondérées sont des résultats de simulation effectuées par Roberts [4] [5]. Notons que les périodes opérationnelles moyennes qu'il obtient sont assez éloignées des valeurs exactes que nous avons calculées.

Mais plus que les statistiques suivies, c'est la rapidité avec laquelle on détecte les dérèglages qui différencie les cartes de contrôle. Cette rapidité s'exprime en terme de période opérationnelle moyenne qui est l'espérance mathématique du nombre de prélèvements nécessaires pour que le dérèglement soit détecté. La carte de Shewhart détecte les grands dérèglages plus vite que les autres cartes citées. Ces dernières sont plus efficaces pour les petits dérèglages car elles accumulent les observations passées alors que la carte de Shewhart n'est qu'une succession de tests de moyennes indépendants. De ce fait, les courbes d'efficacité qui donnent la probabilité de rester à l'intérieur des limites de contrôle en fonction du dérèglement  $\Delta$ , n'ont de sens que pour la carte de Shewhart. En effet soit  $p$  cette probabilité, on a :

$$p = P(m_0 - 3\sigma_0/\sqrt{n} < \bar{X} < m_0 + 3\sigma_0/\sqrt{n})$$

avec  $\bar{X}$  distribué selon une loi normale  $N(m_0 + \Delta; \sigma_0/\sqrt{n})$ ,

$$p = P(-3 - \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n}) < U < 3 - \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n}))$$

$$p = P(-3 - \delta < U < 3 - \delta) \quad \text{avec } \delta = \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n})$$

où  $U$  représente une variable normale centrée réduite.

On constate donc que la probabilité est constante, indépendante de l'instant  $i$  du contrôle alors que pour les cartes CUSUM, EWMA ou moyennes mobiles équipondérées elle varie selon la date du prélèvement. Ainsi seule la considération de la période opérationnelle moyenne permet la comparaison de ces différents types de cartes.

Toutes les cartes définies ci-dessus peuvent être utilisées lorsque  $n = 1$ , ce qui se produit pour le contrôle de procédés continus, par exemple en chimie. Mais l'efficacité de la carte de Shewhart étant très mauvaise on recommande généralement les cartes CUSUM et EWMA. La carte de moyennes mobiles équipondérées est également une bonne solution comme nous le verrons.

Après un bref rappel sur la carte de moyennes mobiles équipondérées, nous démontrons dans le paragraphe 3 la formule de calcul de sa période opérationnelle moyenne. Les résultats des calculs sous forme de tables et de courbes seront ensuite exploités pour étudier l'efficacité de la carte de moyennes mobiles équipondérées comparativement aux CUSUM, EWMA et Shewhart.

## 2. La carte de moyennes mobiles équipondérées

Comme nous l'avons dit en introduction la carte de moyennes mobiles équipondérées d'ordre  $w$  repose sur l'utilisation conjointe des  $w$  mesures les plus récentes; à l'instant  $i$  on supprime la plus ancienne des moyennes des échantillons et on ajoute la plus récente moyenne à l'ensemble. Ainsi on calcule :

$$M_i = (\bar{X}_i + \bar{X}_{i-1} + \dots + \bar{X}_{i-w+1})/w \quad \text{si } i \geq w$$

$$M_i = (\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_i)/i \quad \text{si } i < w$$

Sous l'hypothèse de normalité des  $X_i$ ,  $M_i$ , est pour  $i \geq w$ , distribué selon une loi normale  $N(m_0; \sigma/\sqrt{nw})$ . Les limites de contrôle de la carte de moyennes mobiles équipondérées sont donc  $m_0 - L\sigma_0/\sqrt{nw}$  et  $m_0 + L\sigma_0/\sqrt{nw}$ . On aura des limites de contrôle variables pour  $i < w$ , mais elles deviennent stables dès que  $i \geq w$ . Pour avoir des limites à 3 sigma, on prend  $L = 3$ .

Pour  $w = 1$  on retrouve la carte de Shewhart. En fait la carte de moyennes mobiles équipondérées d'ordre  $w$  est comparable à une carte de Shewhart où  $n$  est multiplié par  $w$ . On conçoit que la carte de moyennes mobiles équipondérées soit plus efficace que la carte de Shewhart puisque tout se passe comme si on avait multiplié par  $w$  la taille des prélèvements. Intuitivement, plus le dérèglement est petit, plus l'ordre  $w$  de la moyenne mobile doit être élevé pour une bonne détection; l'amplitude du dérèglement à détecter et l'ordre de la moyenne mobile varient en sens inverse.

**Exemple illustratif** : (cet exemple est tiré de la norme ISO 8258).

On cherche à maîtriser un processus d'emballage : le poids moyen souhaité des paquets est  $m_0$  égal à 100.6 g et l'écart-type du procédé est supposé de 1.4 g. La figure 1 représente les différentes cartes de contrôle pour un jeu de données constitué des moyennes de 25 échantillons de taille 5.

On constate que la carte de Shewhart simple (fig1-a) ne signale aucun dérèglement. Par contre les autres cartes (fig1-b, fig1-c, fig1-d, fig1-e) détectent un dérèglement au 14<sup>ème</sup> échantillon. On remarque de même que la carte des moyennes mobiles d'ordre 3 est plus efficace que celle d'ordre 9 qui ne détecte le dérèglement qu'au 16<sup>ème</sup> échantillon.

Remarque : Il arrive qu'un dérèglement paraisse manifeste sur la carte de Shewhart sans qu'aucun point ne sorte des limites. Des règles d'alerte supplémentaires basées sur la disposition des points sur la carte sont communément utilisées pour améliorer l'efficacité de la carte de Shewhart. Ainsi la norme AFNOR X-06-030 préconise d'utiliser les règles suivantes :

- R1 : 2 points parmi 3 points successifs sont situés entre les limites de contrôle et les limites de surveillance (placées à deux écart-types).
- R2 : 9 points successifs sont situés d'un même côté de la limite centrale.
- R3 : 9 points successifs forment une séquence croissante ou décroissante.

Ici la règle R2 détecterait une variation de la moyenne au 18<sup>ème</sup> échantillon. Cependant l'ajout de règles supplémentaires complique l'utilisation de la carte de Shewhart et augmente le nombre de fausses alertes.

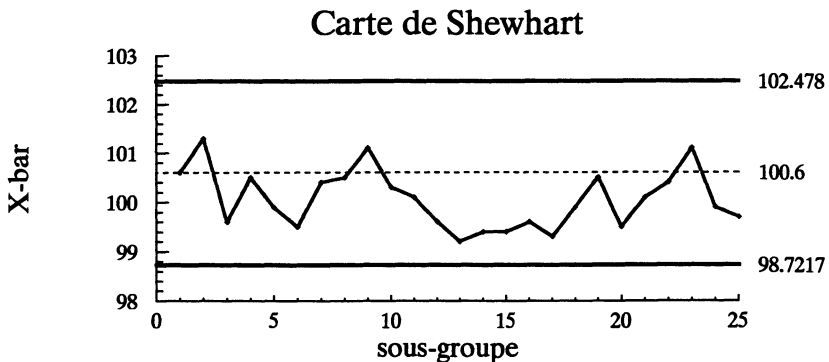


FIGURE 1-a

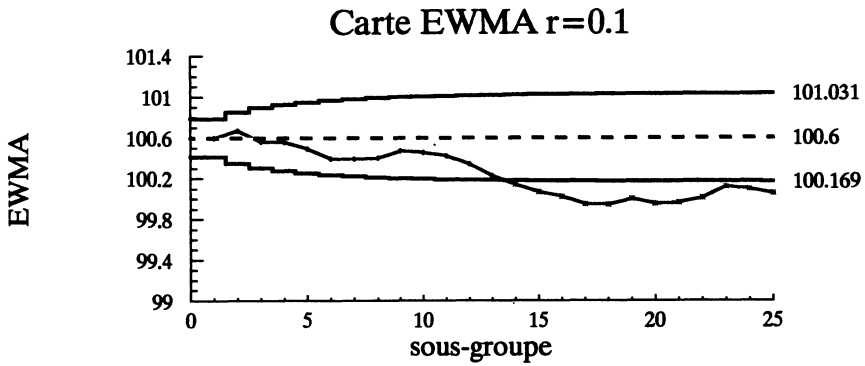


FIGURE 1-b

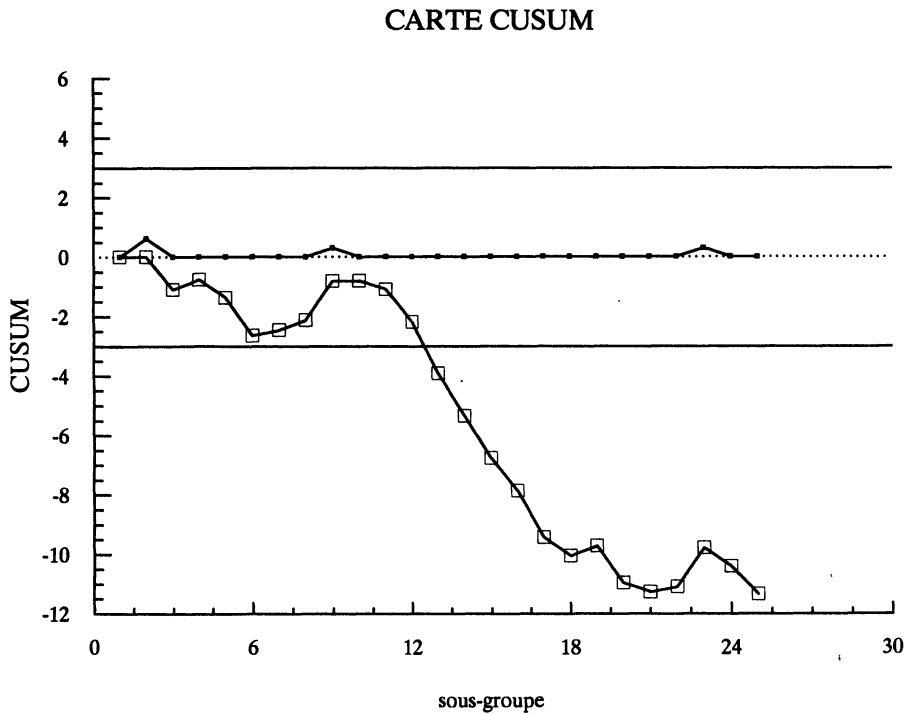
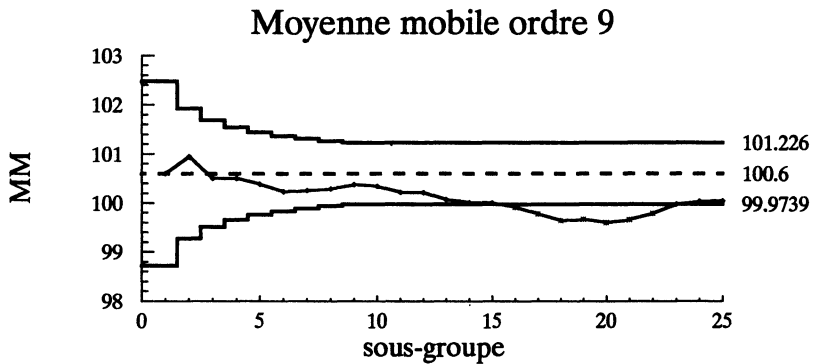
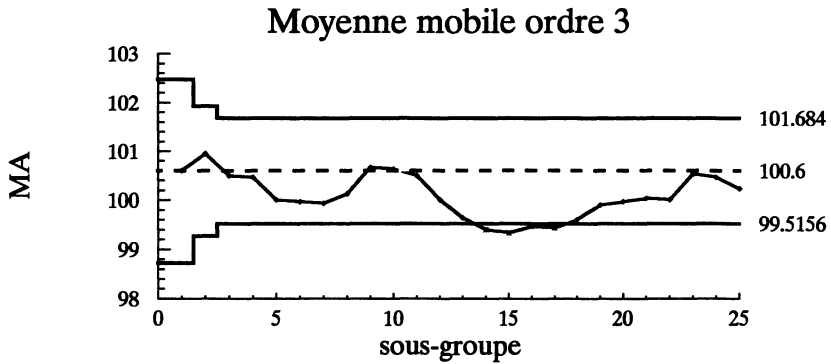


FIGURE 1-c



### 3. Calcul de la période opérationnelle moyenne

Soit  $N$  le nombre de prélèvements nécessaires pour sortir des limites de contrôle lorsqu'un dérèglement d'amplitude  $\Delta$  se produit. La période opérationnelle moyenne est l'espérance mathématique de  $N$ . Le calcul de la période opérationnelle moyenne est basée sur l'hypothèse qu'un dérèglement de la moyenne se traduit par un passage de cette dernière de  $m_0$  à  $m_0 + \Delta$ , niveau auquel elle reste jusqu'à ce qu'une action corrective soit prise auquel cas elle revient à  $m_0$ .

Ainsi si le dérèglement s'est produit entre les instants  $i - 1$  et  $i$ , alors  $M_i$  défini par  $M_i = (\bar{X}_i + \bar{X}_{i-1} + \dots + \bar{X}_{i-w+1})/w$  est distribué selon une loi normale  $N(m_0 + \Delta/w; \sigma_0/\sqrt{nw})$ ; de même  $M_{i+1}$  suit une loi normale  $N(m_0 + 2\Delta/w; \sigma_0/\sqrt{(n+1)w})$ ; et ainsi de suite jusqu'à  $M_{i+w}$  qui suit une loi normale  $N(m_0 + \Delta; \sigma_0/\sqrt{nw})$ ; et pour les  $M_{i+k}$  avec  $k > w$  on aura cette dernière distribution.



La probabilité de sortir des limites de contrôle  $k$  instants après le dérèglement est :

$$p_k = P(M_{i+k-1} > m_0 + L\sigma_0/\sqrt{nw}) + P(M_{i+k-1} < m_0 - L\sigma_0/\sqrt{nw})$$

Puisque  $M_{i+k-1}$  est distribué selon une loi normale  $N(m_0 + k\Delta/w; \sigma_0/\sqrt{nw})$  pour  $k = 1$  à  $w - 1$  on a :

$$p_k = P(U > L - (k\Delta/w)/(\sigma_0/\sqrt{nw})) + P(U < -L - (k\Delta/w)/(\sigma_0/\sqrt{nw}))$$

où  $U$  représente la loi normale standard.

En posant  $\delta = \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n})$ , on a :

$$p_k = P(U > L - k\delta/\sqrt{w}) + P(U < -L - k\delta/\sqrt{w}) \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } w - 1$$

et  $p_k = p_w = P(U > L - \delta\sqrt{w}) + P(U < -L - \delta\sqrt{w})$  pour  $k \geq w$ .

$N$  étant le nombre de prélèvements nécessaires pour sortir des limites on a, en posant  $p_0 = 0$  :

$$P(N = 1) = p_1$$

$$P(N = 2) = p_2(1 - p_1)$$

$$P(N = k) = p_k \prod_{j=0}^{k-1} (1 - p_j) \quad \text{pour } k \leq w \text{ et}$$

$$P(N = k) = p_w(1 - p_w)^{k-w} \prod_{j=0}^{w-1} (1 - p_j) \quad \text{pour } k > w.$$

Alors l'espérance mathématique de  $N$  est :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{w-1} kp_k \left( \prod_{j=0}^{k-1} (1 - p_j) \right) + \sum_{k=w}^{\infty} kp_w(1 - p_w)^{k-w} \prod_{j=0}^{w-1} (1 - p_j)$$

Mais

$$\sum_{k=w}^{\infty} kp_w(1 - p_w)^{k-w} \prod_{j=0}^{w-1} (1 - p_j) = C \sum_{k=w}^{\infty} k(1 - p_w)^{k-w}$$

avec  $C = \prod_{j=0}^{w-1} (1 - p_j)$  et

$$\begin{aligned} \sum_{k=w}^{\infty} k p_w (1-p_w)^{k-w} &= \sum_{j=1}^{\infty} (w+j-1) p_w (1-p_w)^{j-1} \quad \text{avec } k = w + j - 1 \\ &= (w-1) \sum_{j=1}^{\infty} p_w (1-p_w)^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} j p_w (1-p_w)^{j-1}. \end{aligned}$$

D'après les formules classiques suivantes sur les progressions géométriques :

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} j p(1-p)^{j-1} = 1/p$$

on a donc :

$$\sum_{k=w}^{\infty} k p_w (1-p_w) = (w-1) + 1/p_w$$

Finalement,

$$E(N) = \sum_{k=1}^{w-1} k p_k \left( \prod_{j=0}^{k-1} (1-p_j) \right) + \left( \prod_{j=0}^{w-1} (1-p_j) \right) (w-1 + 1/p_w).$$

Cette expression représente la période opérationnelle moyenne d'une carte de moyennes mobiles d'ordre  $w$  pour le contrôle de la moyenne d'un procédé. Dans la suite nous la noterons POM  $(\delta, L, w)$ .

#### 4. Résultats et commentaires

La formule a été utilisée pour différentes valeurs des paramètres  $\delta, L, w$ . Les résultats des calculs figurent dans les tableaux en annexe 1. Nous remarquons que la période opérationnelle moyenne POM  $(0, L, w)$  ne dépend pas de  $w$ , elle est donc identique à celle de la carte de Shewhart. Elle correspond au nombre moyen de prélèvements avant une fausse alerte. Donc, si comme il est de coutume, on se fixe ce nombre, ceci revient simplement à fixer le paramètre  $L$ .

Nous nous intéressons principalement au cas  $L = 3$  qui correspond à la valeur pour les limites de contrôle standard à 3 écart-types de la moyenne. Avec une période moyenne avant fausse alerte égale à la valeur classique 370, nous avons tracé des courbes de la période opérationnelle moyenne pour différentes valeurs de  $w$  (annexe 2). Quel que soit  $w$ , nous constatons la supériorité de la carte de moyennes mobiles équipondérées sur celle de Shewhart pour des dérèglages inférieurs à 3 écart-types de la moyenne; il existe toujours une carte de moyenne mobile d'ordre  $w$  meilleure que la carte de Shewhart. Il est d'ailleurs possible de trouver une valeur  $w$  optimale minimisant POM  $(\delta)$ . Les figures en annexe 3 mettent en évidence ces minima pour

des valeurs de dérèglages fixées. Ainsi si on veut détecter un dérèglement d'un écart-type de la moyenne, la carte la plus efficace sera celle des moyennes mobiles d'ordre 7, alors qu'une moyenne mobile d'ordre 3 sera optimale pour un dérèglement de 2 écarts-types de la moyenne. Pour de très petits dérèglages, l'optimum se situe au delà de  $w = 10$  ce qui n'est guère recommandable en pratique. L'existence d'une remontée de la période opérationnelle moyenne lorsque  $w$  augmente peut s'expliquer de la façon suivante : si  $w$  est trop grand, à partir du moment où le dérèglement se produit et pendant un certain temps on calcule une moyenne d'un nombre important de bonnes valeurs et de quelques mauvaises. Ces quelques mauvaises valeurs sont alors lissées par les bonnes, ce qui retarde la détection.

Les graphiques et tableaux sont fonction de  $\delta$  qui représente le dérèglement exprimé en nombres d'écart-type de la moyenne. Or les exigences du contrôle portent sur la détection de  $\Delta$ . Mais comme  $\delta = \Delta\sqrt{n}/\sigma_0$ , la taille des prélèvements intervient donc implicitement. On peut alors trouver la taille des sous-groupes en fixant la période opérationnelle moyenne désirée. Ainsi supposons que l'on veuille détecter un dérèglement d'un écart-type :  $\Delta = \sigma_0$  en moins de 5 prélèvements en moyenne. La table donnant POM ( $\delta$ , 3,  $w$ ) nous indique alors les valeurs suivantes :

$w = 1$	$\delta = 2.15$
$w = 2$	$\delta = 1.625$
$w = 3$	$\delta = 1.425$
$w = 4$	$\delta = 1.35$

Comme  $\delta$  vaut alors  $\sqrt{n}$ , on en déduit que l'objectif sera atteint soit par une carte de Shewhart avec  $n$  égal à 5, soit par une carte de moyennes mobiles d'ordre 2 avec  $n$  égal à 3 ou par une moyenne mobile d'ordre 3 avec  $n$  égal à 2. On choisira pour des raisons économiques évidentes la carte des moyennes mobiles d'ordre 3. L'utilisation de tables de POM pour des cartes CUSUM et EWMA dans les normes AFNOR X06-031.4 et X06-031.3 permet une démarche équivalente : pour un nombre moyen d'échantillons entre deux fausses alertes fixé à 370, on peut trouver des cartes CUSUM et EWMA pouvant détecter un dérèglement d'un écart-type en moins de cinq prélèvements. En effet pour  $k = 1$  et  $h = 2.516$  on a une POM égale à 3.3 avec des échantillons de taille 4 et pour  $k = 0.75$  et  $h = 3.34$ , la POM vaut 5.2 et la taille des échantillons vaut alors 2.25. On pourra donc trouver une carte CUSUM équivalente à une moyenne mobile tant en terme de POM que de taille d'échantillons. Pour les EWMA, on trouve  $r = 0.4$  et  $L = 2.96$  pour une POM = 3.3 avec  $n = 4$ ; ou  $r = 0.26$   $L = 2.9$  et POM = 5.2 avec  $n = 2.25$ . De même en utilisant la fonction `ewmaarl` de SAS on a calculé les périodes opérationnelles moyennes pour les valeurs  $\delta = 2.15$ ,  $\delta = 1.625$  et  $\delta = 1.425$ . Pour chacun de ces dérèglages il est possible de trouver plusieurs combinaisons de  $r$  et  $L$  définissant une carte EWMA capable de détecter un dérèglement d'un écart-type en moins de cinq prélèvements avec POM(0) égale à 370.

## 5. conclusion

Nous avons montré que la carte de moyennes mobiles équipondérées pouvait être utilisée dans les mêmes conditions que les cartes CUSUM et EWMA pour

remplacer la carte de Shewhart. Les calculs d'efficacité reposent sur l'hypothèse de base d'un dérèglement instantané et constant ce qui n'est pas toujours réaliste. Il faudrait envisager le cas de dérives progressives mais les calculs restent à faire, comme pour les autres cartes de contrôle d'ailleurs.

### Références

- [1] CROSIER R. B. A New Two-Sided Cumulative Sum Quality Control Scheme. *Technometrics*, 28,3, p.187-194, 1986.
- [2] LUCAS J. M. and SACCUCCI M. S. Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes : Properties and Enhancements. *Technometrics*, 32,1, p.1-12, 1990.
- [3] MONTGOMERY D. J. Introduction to Statistical Quality Control, 2nd ed., Wiley, 1991.
- [4] ROBERTS S.W. Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics*, 1,3, p. 239-250,1959.
- [5] ROBERTS S. W. A Comparison of Some Control Chart Procedures. *Technometrics*, 8, 3, p. 411-430, 1966.
- [6] ROBINSON P. B. and HO T. Y. Average Run Lengths of Geometric Moving Average Charts by Numerical Methods. *Technometrics*, 20,1, p. 85-93, 1978.
- [7] RYAN T. P Statistical Methods for Quality Improvement, Wiley, 1989.

*Remerciement* : nous remercions Mme Françoise Leconte-Veyriac, élève de cycle C au CNAM, pour avoir programmé en SAS le calcul des périodes opérationnelles moyennes.

### ANNEXE 1 Tables des périodes opérationnelles moyennes

PCM (  $\delta$ , 2, w )

$\delta$	w									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98	21.98
10.25	19.13	17.08	15.58	14.47	13.64	13.02	12.57	12.24	12.01	11.85
10.5	13.70	10.28	8.59	7.72	7.28	7.08	7.03	7.06	7.15	7.27
10.75	9.21	6.28	5.29	4.97	4.93	5.03	5.17	5.34	5.51	5.68
11	6.25	4.22	3.78	3.78	3.93	4.11	4.30	4.47	4.63	4.78
11.25	4.40	3.12	3.02	3.17	3.37	3.57	3.74	3.90	4.04	4.18
11.5	3.24	2.50	2.60	2.80	3.00	3.18	3.34	3.48	3.61	3.73
11.75	2.49	2.14	2.32	2.54	2.72	2.88	3.03	3.16	3.28	3.39
12	2.00	1.91	2.13	2.33	2.50	2.65	2.78	2.90	3.01	3.11
12.25	1.67	1.75	1.97	2.16	2.32	2.46	2.58	2.69	2.80	2.89
12.5	1.45	1.63	1.85	2.02	2.17	2.30	2.41	2.52	2.61	2.70
12.75	1.29	1.54	1.74	1.90	2.04	2.16	2.27	2.37	2.46	2.54
13	1.19	1.46	1.65	1.80	1.93	2.05	2.15	2.24	2.33	2.41
13.25	1.12	1.38	1.57	1.71	1.84	1.95	2.04	2.13	2.21	2.29
13.5	1.07	1.32	1.50	1.64	1.75	1.86	1.95	2.03	2.11	2.18
13.75	1.04	1.26	1.44	1.57	1.68	1.78	1.87	1.95	2.02	2.09
14	1.02	1.20	1.38	1.51	1.62	1.71	1.79	1.87	1.94	2.01

PCM ( 8 , 3 , w )

W										
8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40	370.40
0.025	369.26	368.14	367.02	365.91	364.82	363.73	362.66	361.59	360.53	359.49
0.05	365.89	361.49	357.21	353.03	348.96	344.98	341.10	337.32	333.63	330.02
0.075	360.39	350.89	341.87	333.29	325.13	317.35	309.93	302.86	296.10	289.65
0.1	352.93	336.95	322.29	308.78	296.32	284.78	274.08	264.14	254.88	246.24
0.125	343.74	320.43	299.89	281.67	265.41	250.83	237.70	225.83	215.05	205.22
0.15	333.08	302.11	276.04	253.82	234.69	218.08	203.54	190.73	179.38	169.27
0.175	321.21	282.73	251.88	226.64	205.67	188.02	172.99	160.07	148.87	139.10
0.2	308.43	262.96	228.28	201.07	179.21	161.34	146.51	134.05	123.47	114.40
0.225	294.99	243.31	205.86	177.61	155.65	138.17	124.01	112.34	102.62	94.44
0.25	281.15	224.21	184.98	156.49	135.00	118.33	105.10	94.41	85.66	78.40
0.275	267.14	205.95	165.82	137.71	117.10	101.47	89.31	79.66	71.89	65.54
0.3	253.14	188.71	148.43	121.15	101.67	87.21	76.17	67.56	60.72	55.22
0.325	239.32	172.62	132.77	106.65	88.44	75.19	65.25	57.62	51.65	46.92
0.35	225.80	157.70	118.76	93.98	77.10	65.06	56.17	49.44	44.26	40.21
0.375	212.70	143.96	110.27	82.96	67.41	56.51	48.59	42.70	38.22	34.78
0.4	200.08	131.37	95.17	73.36	59.11	49.29	42.27	37.12	33.27	30.36
0.425	187.99	119.87	85.32	65.01	52.00	43.19	36.98	32.50	29.20	26.74
0.45	176.48	109.40	76.58	57.75	45.90	38.01	32.54	28.65	25.83	23.78
0.475	165.55	99.88	68.84	51.42	40.67	33.61	28.80	25.43	23.04	21.33
0.5	155.22	91.24	61.97	45.91	36.16	29.86	25.64	22.73	20.71	19.29
0.525	145.49	83.41	55.89	41.09	32.27	26.66	22.96	20.46	18.76	17.60
0.55	136.32	76.31	50.49	36.89	28.91	23.92	20.69	18.55	17.12	16.18
0.575	127.73	69.87	45.69	33.20	26.00	21.57	18.75	16.92	15.74	14.99
0.6	119.67	64.04	41.43	29.97	23.47	19.55	17.09	15.54	14.56	13.98
0.625	112.12	58.75	37.63	27.13	21.28	17.80	15.67	14.36	13.57	13.12
0.65	105.07	53.96	34.25	24.64	19.36	16.28	14.44	13.34	12.71	12.38
0.675	98.47	49.61	31.24	22.43	17.69	14.97	13.38	12.47	11.97	11.75
0.7	92.32	45.67	28.55	20.49	16.22	13.83	12.47	11.71	11.34	11.20
0.725	86.58	42.08	26.14	18.77	14.93	12.83	11.67	11.06	10.78	10.72
0.75	81.22	38.82	23.98	17.24	13.80	11.96	10.97	10.49	10.30	10.30
0.775	76.22	35.86	22.05	15.89	12.80	11.19	10.36	9.99	9.88	9.93
0.8	71.55	33.16	20.32	14.69	11.92	10.52	9.83	9.55	9.50	9.60
0.825	67.20	30.70	18.76	13.62	11.14	9.92	9.36	9.16	9.17	9.30
0.85	63.14	28.46	17.35	12.66	10.45	9.40	8.94	8.81	8.87	9.03
0.875	59.36	26.42	16.09	11.80	9.83	8.93	8.57	8.50	8.60	8.79
0.9	55.83	24.55	14.94	11.04	9.28	8.51	8.24	8.23	8.36	8.57
0.925	52.53	22.84	13.91	10.35	8.79	8.14	7.94	7.98	8.14	8.37
0.95	49.45	21.28	12.98	9.73	8.36	7.81	7.68	7.75	7.94	8.18
0.975	46.58	19.85	12.13	9.18	7.96	7.51	7.44	7.55	7.75	8.00
1	43.89	18.54	11.36	8.68	7.61	7.24	7.22	7.36	7.58	7.84
1.025	41.39	17.33	10.67	8.22	7.29	7.00	7.02	7.19	7.42	7.68
1.05	39.04	16.23	10.03	7.81	7.00	6.78	6.84	7.03	7.27	7.54
1.075	36.85	15.21	9.46	7.44	6.74	6.58	6.68	6.88	7.13	7.40
1.1	34.80	14.28	8.93	7.10	6.50	6.40	6.52	6.74	7.00	7.27
1.125	32.88	13.42	8.45	6.80	6.28	6.23	6.38	6.62	6.88	7.14
1.15	31.08	12.63	8.01	6.52	6.09	6.08	6.25	6.50	6.76	7.02
1.175	29.40	11.89	7.61	6.26	5.91	5.94	6.13	6.38	6.65	6.91
1.2	27.82	11.22	7.24	6.03	5.74	5.81	6.01	6.27	6.54	6.80
1.225	26.34	10.60	6.90	5.82	5.59	5.69	5.91	6.17	6.44	6.69
1.25	24.96	10.02	6.59	5.62	5.45	5.57	5.81	6.07	6.34	6.59
1.275	23.66	9.49	6.31	5.44	5.32	5.47	5.71	5.98	6.24	6.49
1.3	22.43	9.00	6.05	5.28	5.20	5.37	5.62	5.89	6.15	6.40
1.325	21.29	8.54	5.80	5.13	5.09	5.28	5.53	5.80	6.06	6.31
1.35	20.21	8.11	5.58	4.99	4.99	5.19	5.45	5.72	5.98	6.22
1.375	19.20	7.72	5.37	4.86	4.89	5.11	5.37	5.64	5.89	6.13
1.4	18.25	7.36	5.18	4.74	4.80	5.03	5.30	5.56	5.81	6.05
1.425	17.35	7.02	5.01	4.63	4.72	4.95	5.22	5.49	5.74	5.97
1.45	16.51	6.70	4.84	4.52	4.64	4.88	5.15	5.42	5.66	5.89
1.475	15.72	6.41	4.69	4.43	4.56	4.82	5.09	5.35	5.59	5.82
1.5	14.97	6.13	4.55	4.34	4.49	4.75	5.02	5.28	5.52	5.74
1.525	14.26	5.87	4.42	4.25	4.43	4.69	4.96	5.21	5.45	5.67
1.55	13.60	5.64	4.30	4.17	4.36	4.63	4.90	5.15	5.38	5.60
1.575	12.97	5.41	4.18	4.10	4.30	4.57	4.84	5.09	5.32	5.53
1.6	12.38	5.20	4.08	4.03	4.25	4.52	4.78	5.03	5.26	5.47
1.625	11.82	5.01	3.98	3.96	4.19	4.46	4.73	4.97	5.19	5.41
1.65	11.30	4.83	3.89	3.90	4.14	4.41	4.67	4.91	5.14	5.34
1.675	10.80	4.66	3.80	3.84	4.09	4.36	4.62	4.86	5.08	5.28
1.7	10.33	4.50	3.72	3.79	4.04	4.31	4.57	4.80	5.02	5.22
1.725	9.89	4.35	3.64	3.73	3.99	4.26	4.52	4.75	4.97	5.17
1.75	9.47	4.21	3.57	3.68	3.95	4.22	4.47	4.70	4.91	5.11
1.775	9.07	4.07	3.50	3.64	3.90	4.17	4.42	4.65	4.86	5.06
1.8	8.69	3.95	3.44	3.59	3.86	4.13	4.37	4.60	4.81	5.00
1.825	8.33	3.83	3.38	3.55	3.82	4.09	4.33	4.55	4.76	4.95
1.85	8.00	3.72	3.32	3.51	3.78	4.04	4.28	4.51	4.71	4.90
1.875	7.67	3.62	3.27	3.47	3.74	4.00	4.24	4.46	4.66	4.85
1.9	7.37	3.52	3.22	3.43	3.70	3.96	4.20	4.42	4.62	4.80
1.925	7.08	3.43	3.17	3.39	3.67	3.92	4.16	4.37	4.57	4.76
1.95	6.81	3.34	3.13	3.36	3.63	3.89	4.12	4.33	4.53	4.71
1.975	6.55	3.26	3.08	3.32	3.60	3.85	4.08	4.29	4.48	4.67

PCM ( 8, 3, w) (suite)

5	W									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	6.301	3.181	3.041	3.291	3.561	3.811	4.041	4.251	4.441	4.621
12.025	6.071	3.111	3.011	3.261	3.531	3.781	4.001	4.211	4.401	4.581
12.05	5.851	3.041	2.971	3.221	3.501	3.741	3.971	4.171	4.361	4.541
12.075	5.631	2.981	2.931	3.191	3.471	3.711	3.931	4.131	4.321	4.501
12.1	5.431	2.921	2.901	3.171	3.431	3.681	3.901	4.101	4.281	4.451
12.125	5.241	2.861	2.871	3.141	3.401	3.641	3.861	4.061	4.241	4.421
12.15	5.061	2.801	2.841	3.111	3.371	3.611	3.831	4.021	4.211	4.381
12.175	4.891	2.751	2.811	3.081	3.351	3.581	3.791	3.991	4.171	4.341
12.2	4.721	2.701	2.781	3.051	3.321	3.551	3.761	3.961	4.131	4.301
12.225	4.561	2.651	2.751	3.031	3.291	3.521	3.731	3.921	4.101	4.261
12.25	4.411	2.611	2.721	3.001	3.261	3.491	3.701	3.891	4.061	4.231
12.275	4.271	2.571	2.701	2.981	3.241	3.461	3.671	3.861	4.031	4.191
12.3	4.131	2.531	2.671	2.951	3.211	3.431	3.641	3.831	4.001	4.161
12.325	4.001	2.491	2.651	2.931	3.181	3.411	3.611	3.791	3.971	4.131
12.35	3.881	2.451	2.631	2.911	3.161	3.381	3.581	3.761	3.931	4.091
12.375	3.761	2.421	2.611	2.891	3.131	3.351	3.551	3.731	3.901	4.061
12.4	3.651	2.381	2.581	2.861	3.111	3.331	3.521	3.711	3.871	4.031
12.425	3.541	2.351	2.561	2.841	3.091	3.301	3.481	3.681	3.841	4.001
12.45	3.431	2.321	2.541	2.821	3.061	3.281	3.471	3.651	3.811	3.971
12.475	3.341	2.291	2.521	2.801	3.041	3.251	3.441	3.621	3.781	3.941
12.5	3.241	2.271	2.501	2.781	3.021	3.231	3.421	3.591	3.761	3.911
12.525	3.151	2.241	2.491	2.761	2.991	3.201	3.391	3.571	3.731	3.881
12.55	3.061	2.221	2.471	2.741	2.971	3.181	3.371	3.541	3.701	3.851
12.575	2.981	2.191	2.451	2.721	2.951	3.161	3.341	3.521	3.671	3.821
12.6	2.901	2.171	2.431	2.701	2.931	3.131	3.321	3.491	3.651	3.791
12.625	2.831	2.151	2.411	2.681	2.911	3.111	3.301	3.461	3.621	3.771
12.65	2.751	2.131	2.401	2.661	2.891	3.091	3.271	3.441	3.601	3.741
12.675	2.681	2.111	2.381	2.641	2.871	3.071	3.251	3.421	3.571	3.711
12.7	2.621	2.091	2.371	2.621	2.851	3.051	3.231	3.391	3.551	3.691
12.725	2.551	2.071	2.351	2.611	2.831	3.031	3.211	3.371	3.521	3.661
12.75	2.491	2.051	2.331	2.591	2.811	3.011	3.181	3.351	3.501	3.641
12.775	2.431	2.031	2.321	2.571	2.791	2.991	3.161	3.321	3.471	3.611
12.8	2.381	2.021	2.301	2.561	2.771	2.971	3.141	3.301	3.451	3.591
12.825	2.321	2.001	2.291	2.541	2.761	2.951	3.121	3.281	3.431	3.571
12.85	2.271	1.991	2.271	2.521	2.741	2.931	3.101	3.261	3.401	3.541
12.875	2.221	1.971	2.261	2.511	2.721	2.911	3.081	3.241	3.381	3.521
12.9	2.171	1.961	2.241	2.491	2.701	2.891	3.061	3.221	3.361	3.501
12.925	2.131	1.951	2.231	2.481	2.691	2.871	3.041	3.201	3.341	3.471
12.95	2.081	1.931	2.221	2.461	2.671	2.851	3.021	3.181	3.321	3.451
12.975	2.041	1.921	2.201	2.451	2.651	2.841	3.001	3.161	3.301	3.431
13	2.001	1.911	2.191	2.431	2.641	2.821	2.991	3.141	3.281	3.411
13.025	1.961	1.901	2.181	2.421	2.621	2.801	2.971	3.121	3.261	3.391
13.05	1.921	1.881	2.161	2.401	2.611	2.791	2.951	3.101	3.241	3.371
13.075	1.891	1.871	2.151	2.391	2.591	2.771	2.931	3.081	3.221	3.351
13.1	1.851	1.861	2.141	2.371	2.571	2.751	2.911	3.061	3.201	3.331
13.125	1.821	1.851	2.131	2.361	2.561	2.741	2.901	3.041	3.181	3.311
13.15	1.791	1.841	2.111	2.351	2.541	2.721	2.881	3.031	3.161	3.291
13.175	1.761	1.831	2.101	2.331	2.531	2.701	2.861	3.011	3.141	3.271
13.2	1.731	1.821	2.091	2.321	2.521	2.691	2.851	2.991	3.121	3.251
13.225	1.701	1.811	2.081	2.311	2.501	2.671	2.831	2.971	3.111	3.231
13.25	1.671	1.801	2.071	2.291	2.491	2.661	2.811	2.961	3.091	3.211
13.275	1.641	1.791	2.061	2.281	2.471	2.641	2.801	2.941	3.071	3.191
13.3	1.621	1.781	2.041	2.271	2.461	2.631	2.781	2.921	3.051	3.171
13.325	1.591	1.781	2.031	2.261	2.451	2.621	2.751	2.891	3.021	3.141
13.35	1.571	1.771	2.021	2.241	2.431	2.601	2.751	2.891	3.021	3.141
13.375	1.551	1.761	2.011	2.231	2.421	2.591	2.741	2.871	3.001	3.121
13.4	1.531	1.751	2.001	2.221	2.411	2.571	2.721	2.861	2.991	3.111
13.425	1.501	1.741	1.991	2.211	2.391	2.561	2.711	2.841	2.971	3.091
13.45	1.481	1.731	1.981	2.201	2.381	2.541	2.691	2.831	2.951	3.071
13.475	1.461	1.731	1.971	2.191	2.371	2.531	2.681	2.811	2.941	3.061
13.5	1.451	1.721	1.961	2.171	2.361	2.521	2.661	2.801	2.921	3.041
13.525	1.431	1.711	1.951	2.161	2.351	2.511	2.651	2.781	2.911	3.021
13.55	1.411	1.701	1.941	2.151	2.331	2.491	2.641	2.771	2.891	3.011
13.575	1.391	1.701	1.931	2.141	2.321	2.481	2.621	2.751	2.881	2.991
13.6	1.381	1.691	1.921	2.131	2.311	2.471	2.611	2.741	2.861	2.981
13.625	1.361	1.681	1.911	2.121	2.301	2.451	2.601	2.731	2.851	2.961
13.65	1.351	1.671	1.911	2.111	2.291	2.441	2.581	2.711	2.831	2.951
13.675	1.331	1.671	1.901	2.101	2.281	2.431	2.571	2.701	2.821	2.931
13.7	1.321	1.661	1.891	2.091	2.261	2.421	2.561	2.691	2.811	2.921
13.725	1.311	1.651	1.881	2.081	2.251	2.411	2.551	2.671	2.791	2.901
13.75	1.291	1.641	1.871	2.071	2.241	2.401	2.531	2.661	2.781	2.891
13.775	1.281	1.641	1.861	2.061	2.231	2.391	2.521	2.651	2.761	2.871
13.8	1.271	1.631	1.861	2.051	2.221	2.371	2.511	2.631	2.751	2.861
13.825	1.261	1.621	1.851	2.041	2.211	2.361	2.501	2.621	2.741	2.851
13.85	1.251	1.611	1.841	2.031	2.201	2.351	2.491	2.611	2.721	2.831
13.875	1.241	1.611	1.831	2.021	2.191	2.341	2.471	2.601	2.711	2.821
13.9	1.231	1.601	1.821	2.011	2.181	2.331	2.461	2.581	2.701	2.811
13.925	1.221	1.591	1.821	2.001	2.171	2.321	2.451	2.571	2.691	2.791
13.95	1.211	1.581	1.811	1.991	2.161	2.311	2.441	2.561	2.671	2.781
13.975	1.201	1.581	1.801	1.981	2.151	2.301	2.431	2.551	2.661	2.771
14	1.191	1.571	1.791	1.981	2.141	2.291	2.421	2.541	2.651	2.751

PCM (  $\delta$ , 2.5 , w )

$\delta$	W									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52	80.52
10.25	65.77	55.55	48.11	42.53	38.23	34.87	32.21	30.08	28.36	26.97
10.5	41.49	27.42	20.54	16.70	14.40	12.99	12.12	11.60	11.31	11.19
10.75	24.61	13.95	10.06	8.35	7.59	7.30	7.25	7.34	7.51	7.71
11	14.92	7.94	5.97	5.37	5.27	5.39	5.59	5.81	6.04	6.26
11.25	9.46	5.08	4.19	4.11	4.27	4.50	4.73	4.95	5.16	5.36
11.5	6.30	3.62	3.32	3.47	3.70	3.94	4.16	4.36	4.54	4.71
11.75	4.41	2.83	2.84	3.07	3.31	3.53	3.73	3.91	4.08	4.23
12	3.24	2.37	2.54	2.79	3.02	3.22	3.40	3.56	3.71	3.85
12.25	2.49	2.09	2.33	2.57	2.78	2.96	3.13	3.28	3.41	3.54
12.5	2.00	1.90	2.16	2.39	2.58	2.75	2.90	3.04	3.17	3.29
12.75	1.67	1.77	2.03	2.24	2.42	2.57	2.72	2.85	2.97	3.08
13	1.45	1.68	1.91	2.11	2.28	2.42	2.56	2.68	2.79	2.90
13.25	1.29	1.59	1.81	1.99	2.15	2.29	2.42	2.53	2.64	2.74
13.5	1.19	1.51	1.73	1.90	2.05	2.18	2.30	2.41	2.51	2.60
13.75	1.12	1.44	1.65	1.81	1.95	2.08	2.19	2.29	2.39	2.48
14	1.07	1.37	1.59	1.74	1.87	1.99	2.10	2.19	2.28	2.37

ANNEXE 2 Courbes de la période opérationnelle moyenne

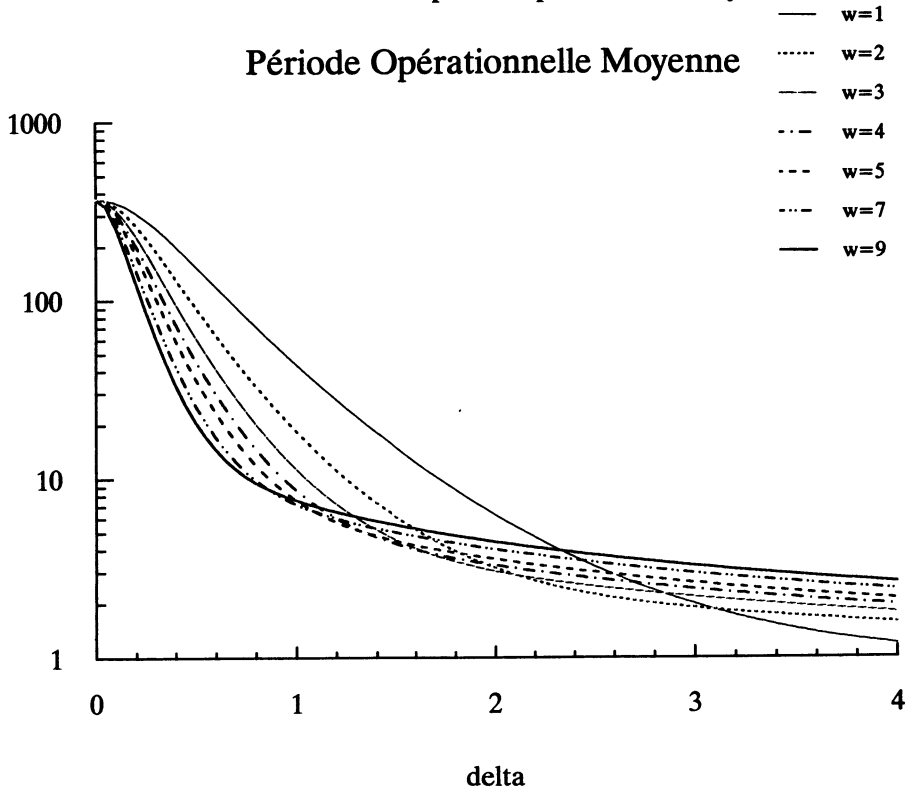


FIGURE A

### ANNEXE 3 Influence de l'ordre de la moyenne mobile sur la POM

Période Opérationnelle Moyenne selon  $w$

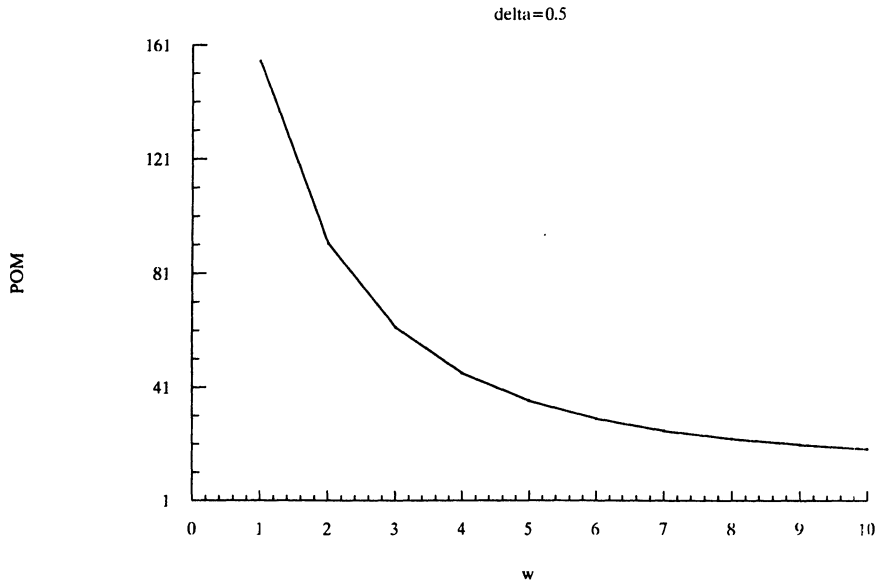


FIGURE B1

Période Opérationnelle Moyenne selon  $w$

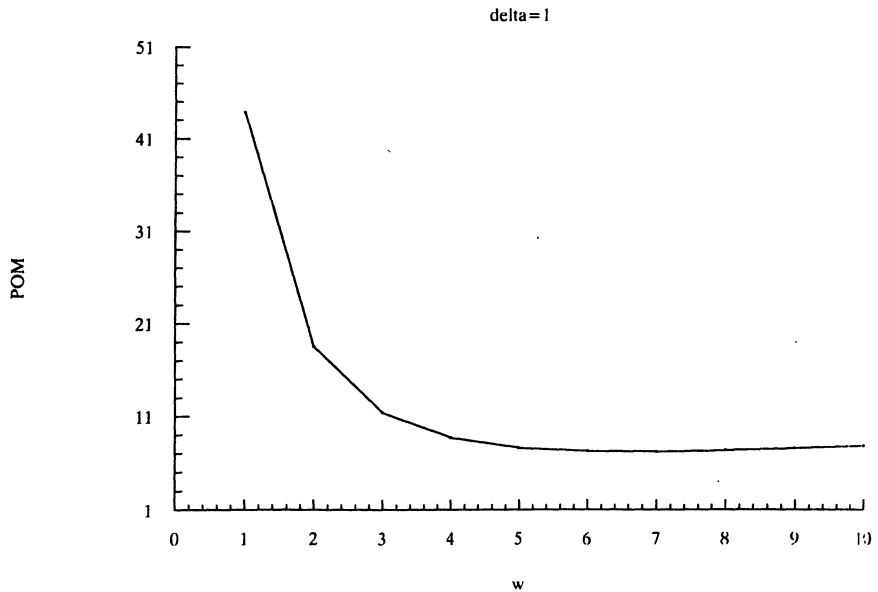


FIGURE B2



### Période Opérationnelle Moyenne selon w

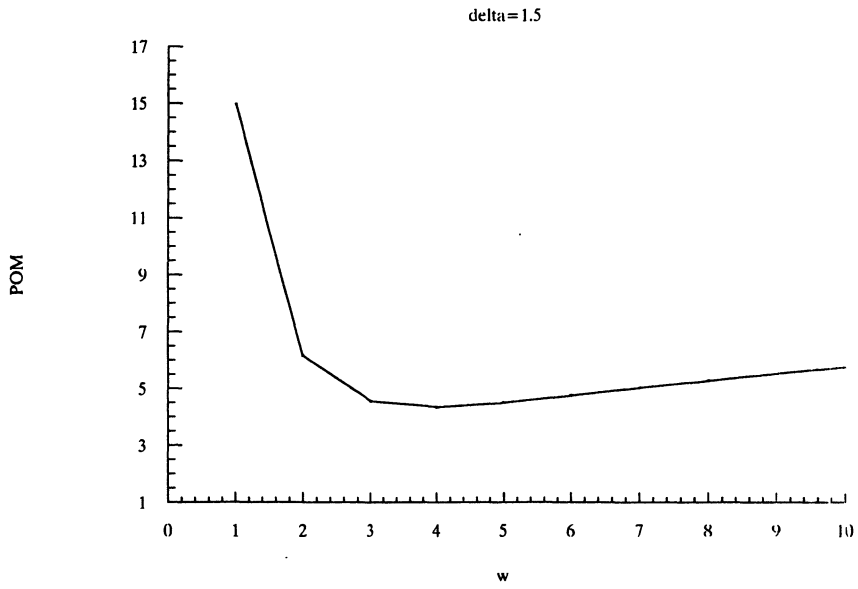


FIGURE B3

### Période Opérationnelle Moyenne selon w

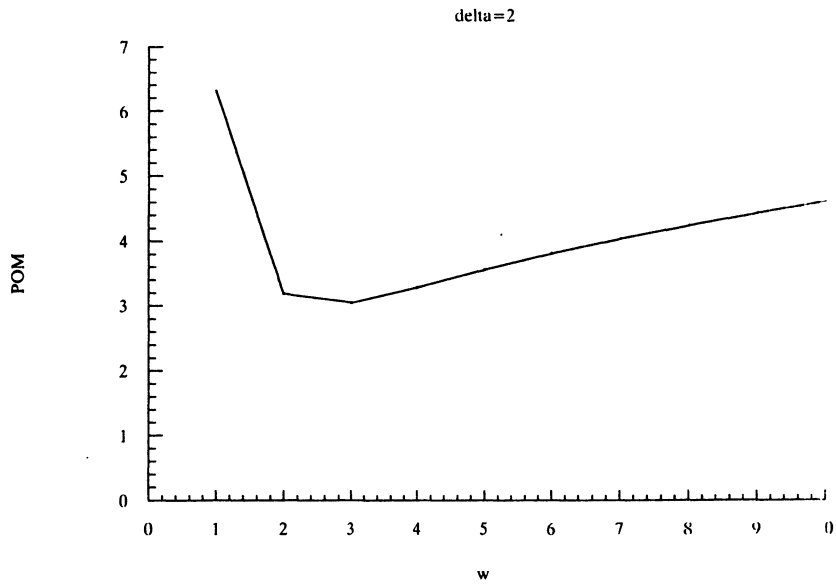


FIGURE B4

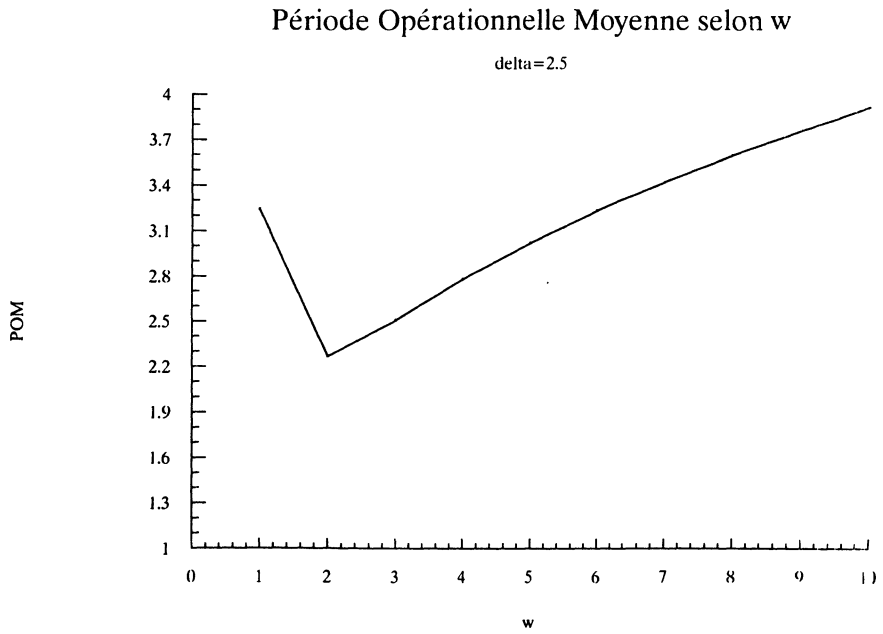


FIGURE B5

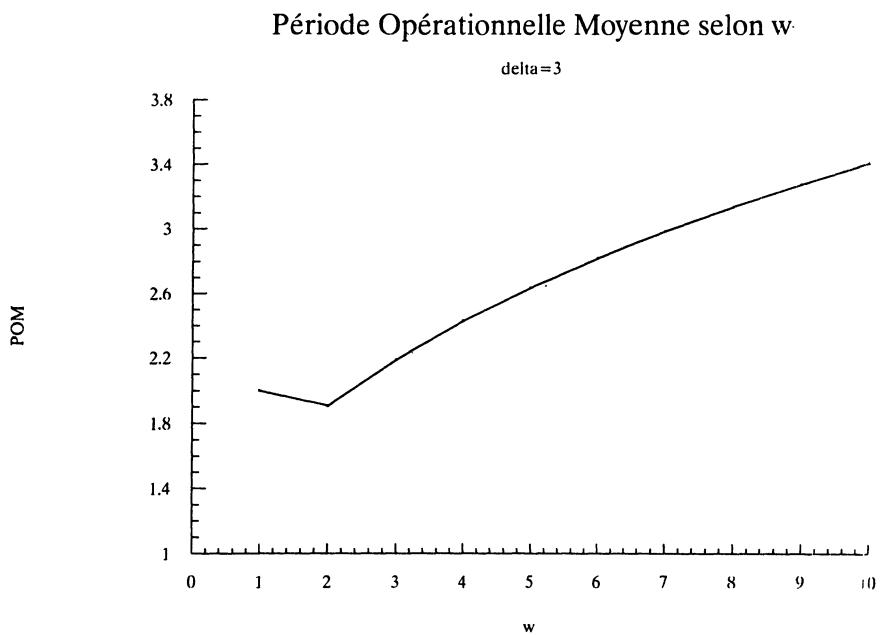


FIGURE B6