



La gravimétrie mobile en champ proche : outil essentiel pour la haute résolution en géodésie physique et en géosciences

Jérôme Verdun

► To cite this version:

Jérôme Verdun. La gravimétrie mobile en champ proche : outil essentiel pour la haute résolution en géodésie physique et en géosciences. Géophysique [physics.geo-ph]. Université du Mans, 2017. tel-03183761v2

HAL Id: tel-03183761

<https://cnam.hal.science/tel-03183761v2>

Submitted on 6 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

École doctorale n° 498 : Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences et Architecture (SPIGA)

SYNTHÈSE DES TRAVAUX DE RECHERCHE

établie en vue de l'obtention de

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

délivrée par

l'université du Maine

Spécialité doctorale « Géosciences »

présentée et soutenue publiquement par

Jérôme VERDUN

le 1^{er} juin 2017

La gravimétrie mobile en champ proche : outil essentiel pour la haute résolution en géodésie physique et en géosciences

Composition du jury

M. Biancale Richard	Ingénieur au CNES, GRGS/GET/OMP, Toulouse	Examineur
M. Chéry Jean	Directeur de Recherche au CNRS, Géosciences Montpellier	Rapporteur
M. Hinderer Jacques	Directeur de Recherche au CNRS, IPG Strasbourg/EOST	Rapporteur
M. Kasser Michel	Professeur de Géodésie, HEIG-VD, Yverdon-les-Bains, Suisse	Rapporteur
M. Mourgues Régis	Professeur des Universités, LPGN, université du Maine, Le Mans	Examineur

Laboratoire Géomatique & Foncier (G&F - EA 4630) - Équipe Géodésie & Géosciences (L2G)
Conservatoire national des arts et métiers (Cnam)
École Supérieure des Géomètres et Topographes (ESGT)
1, bd Pythagore, F-72000 Le Mans, France

Version avec images en haute résolution disponible à partir de ce lien :
<https://bit.ly/HDR-JVerdun>

Ce document a été réalisé avec le logiciel $\text{\LaTeX}$ à partir du modèle proposé par **Dorian Depriester**, téléchargeable à l'adresse suivante : <http://blog.dorian-depriester.fr/latex/template-these/template-complet-pour-manuscrit-de-these>

Préambule

L'Étude de la gravité de la Terre occupe les savants depuis pas loin de quatre siècles. Une si longue période d'étude peut sembler étonnante pour un phénomène aussi familier, dont nous subissons les effets à tous les instants de notre vie de terrien. En fait, l'une des propriétés les plus remarquables de la gravité reste son universalité. Dans l'univers, tous les corps dotés d'une masse non nulle, de la particule élémentaire à l'astre super-massif, s'attirent irrémédiablement par l'action d'une force d'attraction proportionnelle au produit de leurs masses respectives, et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. L'interaction gravitationnelle gouverne toute la dynamique de l'univers où les mouvements relatifs des astres résultent de leurs attractions mutuelles. Ainsi, le mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil découle-t-il d'un équilibre dynamique subtil impliquant les interactions Terre/Soleil et Terre/Lune. En tant que corps massif, la Terre constitue un astre en rotation soumis à sa propre gravité, dont la forme s'ajuste, en première approximation, pour épouser celle d'un ellipsoïde de révolution. De plus, l'attraction gravitationnelle luni-solaire n'étant pas uniforme à la surface de la Terre, elle cause des déformations périodiques de l'écorce terrestre et des masses d'eau qui couvrent la Terre, appelées phénomènes de marées. C'est encore cette attraction qui perturbe le mouvement de rotation de la Terre dont la vitesse fluctue dans le temps, et l'axe bascule et change de direction. Enfin, les enveloppes fluides de la Terre solide, telles l'atmosphère, les mers et océans, l'hydrologie continentale et les glaciers, créent des surcharges qui pèsent sur la surface terrestre et contribuent à sa déformation. Ces quelques exemples de phénomènes attestent du rôle capital des interactions gravitationnelles dans le mouvement et la forme extérieure de la Terre. L'intérêt suscité par l'interaction gravitationnelle ou force de gravité dans les communautés savantes de tous bords, telles celles des géophysiciens, astronomes et géodésiens, vient de son omniprésence dans tous les phénomènes qui touchent la géophysique interne et externe.

Aujourd'hui, les recherches théoriques sur la force de gravité et l'étude du champ gravitationnel de la Terre demeurent des sujets d'actualité. En premier lieu, la physique théorique s'intéresse à l'origine profonde de la force gravitationnelle. La remarquable théorie de la relativité générale d'Einstein, l'interprète comme une conséquence de la courbure de l'espace-temps sous l'effet des masses présentes dans l'univers. À ce jour, aucune expérience n'a remis en cause cette théorie, qui, bien que n'étant pas encore unifiée avec les théories physiques des particules élémentaires, constitue la description fondamentale de la gravité. En second lieu, un grand nombre de phénomènes gravitationnels qui touchent notre planète, peuvent être expliqués par la théorie newtonienne de la gravité, approximation du premier ordre de la théorie d'Einstein. La théorie newtonienne stipule que toutes les grandeurs observables du champ de gravité de la Terre, c'est-à-dire essentiellement le potentiel gravitationnel, l'accélération gravitationnelle, et les gradients de gravité, sont liées par une relation intégrale, à la distribution de densité dans l'écorce terrestre depuis la surface extérieure de la Terre, voire celle de son atmosphère, jusqu'à la graine. Ce faisant, la cartographie et la modélisation des valeurs mesurées de ces grandeurs fournissent des images intégrées de la distribution de

densité d'autant mieux résolues que la hauteur d'acquisition est faible. Ainsi, toute modification de la distribution de densité par les transferts de matière ou les déformations des structures géologiques, marque-t-elle, de façon plus au moins visible, la carte du champ de gravité de la Terre. Le raffinement de notre connaissance du champ de gravité par des techniques de mesure de plus en plus sophistiquées, permet une séparation efficace des sources de la gravité aussi bien dans l'espace que dans le temps. De là découlent de multiples applications de la gravité en géosciences dans des domaines aussi variés que la géodésie, la géophysique interne en complément de la sismologie, l'océanographie, l'hydrologie, la glaciologie, la géomorphologie quantitative, l'étude du cycle sismique, en plus des utilisations classiques des modèles du champ de gravité pour la mécanique spatiale et la navigation.

La science qui s'occupe de la mesure, la modélisation et l'interprétation du champ de gravité de la Terre et des autres planètes est la gravimétrie. J'ai personnellement découvert cette discipline avec le professeur Roger Bayer il y a tout juste vingt ans, à l'occasion d'un stage de recherche dans le laboratoire de géosciences de l'université de Montpellier (34), consacré au prolongement vers le haut des anomalies de la gravité [Verdun, 1997 (ap9)]. Depuis, la gravimétrie et ses applications ont occupé l'essentiel mes activités de recherche, excepté durant certaines périodes de temps limitées où, de par le profil du poste que j'occupais, je devais concentrer mes efforts sur des activités d'enseignement. Aussi, en retirant mes six années d'études doctorales et post doctorales et les quatre années d'enseignement en lycée, je considère avoir réalisé, à ce jour, dix années de vie professionnelle en tant qu'enseignant-chercheur au sein des deux écoles d'ingénieur qui sont l'École Nationale des Sciences Géographiques (ENSG) et l'École Supérieure des Géomètres et Topographes (ESGT). Ce sont donc les résultats de ces dix années de recherche, qui sont présentés dans le présent mémoire, à la suite de ceux obtenus dans mon travail doctoral.

En plus des applications thématiques évoquées précédemment, la gravimétrie s'appuie sur de nombreuses disciplines transversales telles les mathématiques, la physique fondamentale et appliquée et l'informatique. Elle requiert donc des compétences variées dont le partage suppose d'engager des collaborations et des collaborateurs dans le cadre de projets pluridisciplinaires nationaux et internationaux. C'est la raison pour laquelle toutes mes activités de recherche sont essentiellement collaboratives. En tant qu'enseignant en école d'ingénieur, j'ai l'avantage de pouvoir disposer d'une pépinière d'étudiants particulièrement étoffée, à la recherche d'un stage de fin d'études. Je puise très souvent dans ce vivier de qualité pour engager des travaux sur mes recherches en cours ou sur des sujets connexes, parfois exploratoires, porteurs de nouvelles voies de recherche. Il n'est pas rare que la qualité et l'intérêt des résultats obtenus dans le cadre de ces stages de recherche, les rendent immédiatement exploitables et montrables à la communauté scientifique. Parmi mes collaborateurs les plus proches, j'ai la chance de pouvoir compter des jeunes chercheurs qui ont choisi de consacrer leurs recherches doctorales à la gravimétrie. C'est une grande satisfaction d'avoir pu rendre ses propres sujets de recherche suffisamment attractifs pour susciter l'intérêt de jeunes chercheurs. De ma propre expérience, il s'ensuit un échange intellectuel et humain très fructueux, dans lequel l'enthousiasme, la curiosité, les compétences et les questionnements du jeune chercheur, sont les moteurs qui maintiennent actives la réflexion et l'inspiration. Ainsi, les réussites des travaux de recherche exposées au fil du mémoire, saluées dans les colloques nationaux et internationaux et publications scientifiques, n'auraient-elles jamais été aussi nettes sans le travail assidu et les contributions fondamentales des jeunes chercheurs que j'ai eu l'opportunité d'encadrer. Je suis définitivement convaincu que la formation par la recherche compte parmi les méthodes d'enseignement les plus efficaces, avec

cet avantage considérable que, par sa pratique, l'étudiant et son enseignant, le doctorant et son encadrant, collaborent et progressent de concert.

En plus de la formation de jeunes chercheurs, je considère comme fondamentale l'activité d'animation des travaux de recherche dans son propre laboratoire. En premier lieu, la rédaction de projets de recherche à soumettre aux différents appels d'offre proposés par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) ou les grands organismes de recherche, constitue un exercice très profitable pour trouver un cadre cohérent pour ses activités de recherches. Cette cohérence suppose des objectifs clairs accessibles par des moyens financiers bien dimensionnés via des collaborations pertinentes, et le souci constant des retombées sociétales des recherches engagées. C'est pourquoi je participe très régulièrement à l'élaboration et la rédaction de projets de recherche, dont certains en tant que porteur référent. En second lieu, ma propre recherche s'insère dans l'ensemble des travaux de toute une équipe pluridisciplinaire en géomatique (équipe de Géodésie et Géomatique du laboratoire Géomatique & Foncier (GeF-L2G), EA Cnam 4630), dont la pertinence sera très prochainement évaluée, en 2017, par le Haut Conseil de l'Évaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur (HCERES). Depuis janvier 2016, j'assure la coordination de ma propre équipe de recherche qui comprend, entre autres tâches, l'animation des réunions d'équipe, la gestion du budget, le suivi des projets de recherche et la rédaction du projet de laboratoire aux côtés du directeur de laboratoire. Cette fonction très enrichissante, permet d'acquérir une vision d'ensemble des travaux réalisés par les collègues, de bien identifier leurs domaines de compétence et leurs réseaux de collaborations. Cette vision d'ensemble est d'une aide considérable au moment de choisir un consortium adapté pour un projet de recherche. Aussi, c'est dans l'objectif d'évoluer dans mon propre domaine de recherche en continuant d'encadrer des jeunes chercheurs, d'entreprendre des projets de recherche avec des consortiums élargis, et d'assurer des tâches d'animation, voire de direction, d'activités de recherche que je me porte candidat à l'Habilitation à Diriger des Recherches selon les souhaits et les règles de l'université du Maine et de l'école doctorale « Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences et Architecture (SPIGA) ».

Ce mémoire est constituée de quatre parties dont une correspond aux annexes. La première partie contient une revue des connaissances et des applications classiques de la gravimétrie. Après un bref exposé sur l'origine de cette discipline (Chap. 1, p. 3), les principaux outils mathématiques sont présentés au chapitre 2 (p. 13). Puis les applications classiques de la gravimétrie à la géodésie et à la géophysique sont décrites respectivement aux chapitres 3 (p. 35) et 4 (p. 63). L'exposé s'appuie délibérément sur des modèles physiques simples bien que parfaitement rigoureux, dont le but est de montrer les concepts sans alourdir le propos par des difficultés techniques excessives. Le dernier chapitre de cette première partie (Chap. 5, p. 125) dresse un bilan des acquis et des limites de la gravimétrie moderne, et s'attache à montrer l'intérêt de la gravimétrie mobile rapprochée pour affiner notre connaissance du champ de gravité de la Terre et envisager de nouvelles applications qui nécessitent une cartographie du champ de gravité à haute résolution spatiale. La seconde partie comprend la synthèse proprement dite de mes travaux de recherche, divisée en deux grands chapitres consacrés respectivement à l'instrumentation et aux méthodologies de traitement en gravimétrie mobile rapprochée (Chap. 6, p. 179) et à la modélisation des sources de la gravité à partir de données de gravimétrie mobile (Chap. 7, p. 315). Chacun de ces chapitres se conclut par une présentation du projet de recherche que je souhaite mener à la suite des travaux présentés. Le bilan quantitatif de ma production scientifique et de mes activités de recherche, d'encadrement d'étudiants et de jeunes chercheurs et d'enseignement, fait l'ob-

jet de la troisième partie (p. 363). Les annexes présentes en fin de mémoire, permettent de préciser certains aspects mathématiques du mémoire qui concernent essentiellement les méthodes de traitement des données en gravimétrie mobile.

Les différentes étapes de mon parcours professionnel sont récapitulées dans le curriculum vitæ ci-contre.

Jérôme Verdun

Maître de Conférences

Formation universitaire

- 2000 **Doctorat ès sciences en géophysique**, université de Montpellier (34).
1997 **Diplôme d'études approfondies en géophysique**, université de Montpellier (34).
1995 **Agrégation de sciences – physiques**, option : physique & électricité appliquées.
1992 – 1997 **Élève de l'École Normale Supérieure de Cachan (94)**.

Expérience professionnelle

Expérience en recherche

- Depuis sept. 2011 **Maître de conférences**⁽¹⁾, chercheur au laboratoire « Géomatique & Foncier » (GeF) du Conservatoire National des Arts & Métiers (Cnam).
(1) : section CNU 35 « Structure et évolution de la Terre et des autres planètes.
Équipe d'accueil « Géomatique & Géosciences » (L2G, EA Cnam 4630).
Depuis sept. 2008 **Chercheur associé**, Laboratoire de REcherches en Géodésie (LAREG).
IGN, ENSG, Marne la Vallée (77).
Sept. 2003 – Août 2008 **Chercheur permanent**, LAREG, IGN, ENSG, Marne la Vallée (77).
Sept. 2000 – Sept 2002 **Chercheur post-doctorant**.
« Geodesy & Geodynamics Lab », École Polytechnique Fédérale de Zürich (ETHZ).
Sept. 1997 – Déc. 2000 **Doctorant**.
Laboratoire « Géosciences Montpellier », université de Montpellier (34).

Expérience pédagogique

- Depuis sept. 2011 **Maître de conférences**, enseignant à l'École Supérieure des Géomètres & Topographes (EGST) du Cnam, le Mans (72).
Sept. 2008 – Août 2011 **Professeur agrégé de physique – chimie**.
Lycée François Rabelais, Chinon (37).
Chargé de cours à l'École Nationale des Sciences Géographiques.
ENSG, Marne la Vallée (77).
Chargé de cours à l'École Supérieure des Géomètres & Topographes.
ESGT, Le Mans (72).
Sept. 2003 – Août 2008 **Professeur agrégé détaché**, Institut Géographique National (IGN).
Enseignant à l'ENSG au département « Positionnement Terrestre & Spatial ».
Sept. 2002 – Juin 2003 **Professeur agrégé de physique appliquée**.
Lycée Camille Claudel, Blois (41).
Sept. 1997 – Déc. 2000 **Moniteur de l'Enseignement Supérieur**.
Université de Montpellier (34).

8 Allée Maurice Mathurin – 37100 Tours

☎ 06 75 44 01 72 • ✉ j.verdun@orange.fr

Né le 1^{er} août 1971 à Montpellier (34) ; Marié, 2 enfants

1/3

Activités de recherche

Métrologie en géophysique.

- ▷ Systèmes mobiles de lever gravimétrique.
- ▷ Capteurs de lever (gravimètre, accéléromètre), de position et d'orientation (centrale inertielle, radio-positionnement satellitaire).
- ▷ Traitement du signal : méthodes de filtrage et d'estimation.

Modélisation numérique du champ de gravité de la Terre.

- ▷ Méthodes numériques de calcul de champ.
- ▷ Interprétation des données de gravimétrie satellitaire.

Géophysique de l'Environnement.

- ▷ Auscultation des berges de rivières par levés LIDAR terrestres.
- ▷ Traitements de nuages de points acquis en milieu naturel.

Production scientifique

24 publications scientifiques, dont 10 dans des revues à comité de lecture (ACL) et 6 dans des actes de conférence internationale à comité de lecture (ACTI).

36 communications scientifiques, dont 23 présentations (COM) et 13 affiches (AFF).

Projets de recherche & collaborations

5 projets de recherche en cours, dont 1 en tant que coordinateur principal.

Sources de financement

- ▷ DGA (Astrid Maturation en cours de soumission)
- ▷ CNES (TOSCA)
- ▷ Fonds Européen de Développement Régional (FEDER)
- ▷ Contrat de Plan État-Région (CPER) Bretagne
- ▷ Région des Pays de la Loire
- ▷ Agence de l'eau Loire Bretagne

Collaborations

- ▷ Institut de Physique du Globe de Strasbourg (IPGS)
- ▷ Université de Bretagne Occidentale (UBO)
- ▷ Université de La Rochelle (ULR)
- ▷ IFREMER
- ▷ SHOM
- ▷ ONERA
- ▷ IGN

Activités de direction de recherche

5 co-encadrements de thèse, dont 2 en cours : une soutenance prévue en mai 2017 et un achèvement de thèse en 2018.

12 directions de stage de recherche, niveau M2.

Activités d'expertise

Relecteur (« referee »).

Revue « Geophysical Journal International » & « Geophysics »

Évaluateur de projets de recherche.

Institut polaire français Paul-Émile Victor (IPEV)

2 comités de suivi de thèse.

2 jurys de thèse.

4 prestations d'expertise en domaine industriel.

Associations scientifiques

Groupes de recherche.

▷ Membre du Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale (GRGS).

▷ Membre du Comité National Français de Géodésie et Géophysique (CNFGG).

▷ Member of the Joint Study Group on "Multiresolutional aspects of potential field theory" (JSG0.11) of the International Association of Geodesy (IAG).

Activités d'enseignement

Cycle d'ingénieur de l'ESGT & l'ENSG.

Algèbre ; probabilités & statistiques ; méthodes numériques, filtrage de Kalman.

Géodésie géométrique & physique ; relevés 3D ; positionnement dynamique.

Mastère spécialisé « PPMD » de l'ENSG.

(PPMD = Photogrammétrie, Positionnement et Mesure de Déformation)

Géodésie physique avancée ; navigation inertielle.

Formation continue.

Lasergrammétrie : acquisition, traitement & modélisation 3D.

Responsabilités administratives & collectives

Depuis Janv. 2016 **Coordinateur de l'équipe de recherche « L2G ».**

Décembre 2015 **Examineur pour l'examen de géomètre-expert foncier DPLG.**

Depuis Sept. 2013 **Responsable pédagogique du cycle ingénieur de l'ESGT, 3^e année.**

Depuis Sept. 2008 **Rédacteur/correcteur du concours d'entrée de l'ESGT.**

Écrit & oral de mathématiques ; écrit de physique.

Sept. 2004 – Sept. 2008 **Responsable pédagogique des Sciences Pour l'Ingénieur à l'ENSG.**

Table des matières

Préambule	iii
Curriculum vitæ	vii
I Revue des fondamentaux et problématique de la mesure en gravimétrie	1
1 « Petite histoire » des origines	3
1.1 Les précurseurs	5
1.1.1 Les intuitions mécaniques géniales de Galilée	5
1.1.2 Huygens, « grand horloger »	6
1.2 Vers la modernité	7
1.2.1 L'étonnante efficacité des théories de Newton	7
1.2.2 Les savants explorateurs du siècle des Lumières	9
2 Fondements mathématiques de la théorie de la gravité	13
2.1 De la distribution de masse au champ de gravité	15
2.1.1 La loi de Newton	15
2.1.2 L'équation fondamentale de Poisson	21
2.1.3 Un corollaire capital : l'équation de Laplace	22
2.2 L'essentiel sur les séries d'harmoniques sphériques	23
2.2.1 L'équation de Laplace en coordonnées sphériques	23
2.2.2 Solutions de l'équation de Laplace	23
2.2.3 Le tenseur de Marussi	26
2.3 Potentiel gravitationnel d'une distribution de masse arbitraire	27
2.3.1 Expression générale du potentiel	27
2.3.2 Distribution de densité à symétrie sphérique	28
2.3.3 Cas d'une surface approximativement sphérique	29
3 Gravimétrie et géodésie dynamique	35
3.1 La Terre « au degré 2 »	37
3.1.1 Potentiel et champ de pesanteur au degré 2	37
3.1.2 Principe du calcul d'un modèle de géoïde	43
3.1.3 Aplatissement dynamique	45
3.1.4 L'ellipsoïde, meilleure seconde approximation de la figure de la Terre	48
3.2 Modèles plus réalistes de la figure de la Terre	50
3.2.1 Interprétation physique du potentiel au degré 2	50
3.2.2 Le géoïde sur la Terre réelle	53
3.2.3 Formulation mathématique de la détermination du géoïde	55
3.3 Vers les méthodes modernes de calcul du géoïde	58

4	Gravimétrie et Terre solide	63
4.1	Anomalies de gravité observables en surface	65
4.2	Géophysique de la lithosphère	70
4.2.1	Effets de l'isostasie	71
4.2.2	Effets de la flexion élastique de la lithosphère	84
4.2.3	Isostasie thermique	90
4.2.4	Retour sur les grandes longueurs d'onde du géoïde	95
4.3	Variations temporelles de la gravité	96
4.3.1	Marées terrestres	96
4.3.2	Rebond post-glaciaire	103
4.3.3	Rotation de la Terre	118
5	Vers la cartographie « haute résolution » du champ de gravité	125
5.1	Inventaire des données gravimétriques actuelles	127
5.1.1	Types de données	127
5.1.2	Modèles globaux du champ de pesanteur	127
5.1.3	L'altimétrie satellitaire	139
5.1.4	Les données gravimétriques acquises sur la surface terrestre	146
5.1.5	Des niches à combler	159
5.2	Enjeux et défis de la gravimétrie moderne	161
5.2.1	Les nouveaux instruments	161
5.2.2	La fusion de données hétérogènes	164
5.2.3	Séparation et modélisation des sources de la gravité	166
5.3	Plaidoyer pour la gravimétrie mobile en champ proche	166
5.3.1	Bonification des référentiels altimétriques	166
5.3.2	La pesanteur des grands fonds	171
5.3.3	Les faces cachées du littoral	172
II	Synthèse analytique des travaux de recherche	177
6	Méthodologies et instrumentation en gravimétrie mobile	179
6.1	Principes de mesure en gravimétrie mobile	181
6.1.1	Mesure de la gravité dans un repère inertiel	181
6.1.2	Modèle général d'un système de gravimétrie mobile	185
6.1.3	Les dispositifs de gravimétrie mobile	191
6.1.4	Erreurs systématiques en gravimétrie mobile	202
6.1.5	L'imbraglio des erreurs aléatoires	210
6.2	Estimation optimale de la gravité	213
6.2.1	Un problème de filtrage	213
6.2.2	Le classique filtrage passif	214
6.2.3	Le puissant filtrage optimal	225
6.3	Deux systèmes français pour la gravimétrie mobile	270
6.3.1	Inventaire des systèmes concurrents notoires	270
6.3.2	Le gravimètre terrestre mobile « Limo-g »	279
6.3.3	« GRAVIMOB » : un gravimètre mobile pour le fond de mer	288
6.4	Projets de recherche	306
6.4.1	Préceptes de la gravimétrie mobile « rapprochée »	306
6.4.2	Instrumentation sui generis pour les levés côtiers et fluviaux	309
6.4.3	Champs d'application	312

7	Modélisation de sources de la gravité	315
7.1	Les « débouchés » de la modélisation	317
7.2	Calculs directs des anomalies de gravité	318
7.2.1	Modèles géophysiques exhaustifs de la Terre	318
7.2.2	Représentation spectrale du potentiel gravitationnel de polyèdres	319
7.2.3	Partitions de la planète Terre	333
7.3	Projets de recherche	350
7.3.1	Assimilation des mesures gravimétriques satellitaires	350
7.3.2	Affinement des modèles géophysiques globaux	351
7.3.3	Investigation des échelles régionales	355
	Épilogue	359
III	Revue des activités et publications	361
	Liste des publications et colloques	363
	Liste des projets de recherche	375
	Encadrement d'étudiants et jeunes chercheurs	381
	Enseignement & pédagogie	393
IV	Annexes	401
A	Expressions des matrices de passage	403
A.1	Matrices de passage orthogonales	403
A.1.1	Du repère e vers le repère n	403
A.1.2	Du repère b vers le repère n	403
A.2	Matrices de vitesse de rotation	403
A.2.1	Repère e par rapport au repère i	403
A.2.2	Repère n par rapport au repère e	404
A.2.3	Repère b par rapport au repère i	404
A.2.4	Repère b par rapport au repère n	404
B	Ordre de grandeur des termes correctifs en gravimétrie mobile vectorielle	405
B.1	Normes matricielles	405
B.2	Application aux équations de la gravimétrie mobile	406
C	Équation de Fredholm de première espèce	409
C.1	Problème bien posé	409
C.2	L'équation de Fredholm	410
D	Modèle linéaire généralisé	413
D.1	Le modèle linéaire	413
D.1.1	Formulation	413
D.1.2	Hypothèses fondamentales du modèle linéaire	414
D.1.3	Estimateur des Moindres Carrés Généralisés (MCG)	414
D.2	Propriétés statistiques de l'estimateur MCG	415
D.2.1	Espérance et variance	415

D.2.2	Théorème d'Aitken	415
D.2.3	Estimateur de σ_0^2	416
D.2.4	Cas de la normalité des perturbations	416
E	Modèle mixte non linéaire	417
E.1	Formulation	417
E.2	Estimateur des moindres carrés	418
E.3	Calcul numérique de l'estimateur des moindres carrés	419
F	Filtre de Kalman	421
F.1	Filtre de Kalman à temps discret	421
F.2	Propriétés fondamentales du filtre de Kalman	423
F.3	Extensions aux équations non linéaires	424
	Liste des acronymes	427
	Liste des figures	436
	Liste des tableaux	438
	Glossaire	439
	Bibliographie	459

Première partie

Revue des fondamentaux et problématique de la mesure en gravimétrie

Chapitre 1

« Petite histoire » des origines

« Notre héritage n'est précédé d'aucun testament »

René Char
Feuillets d'Hypnos

LE socle des connaissances sur lesquelles s'appuie la gravimétrie moderne a été constitué progressivement pendant presque quatre siècles. Les plus grands savants y ont apporté leur contribution comme en témoigne la profusion de noms illustres associés aux théorèmes et aux équations de la gravimétrie toujours enseignées de nos jours. L'héritage reçu de la part des précurseurs est considérable : ces derniers nous ont légué des lois physiques, des procédés de mesure et des théories mathématiques employés quotidiennement par les gravimétriciens contemporains.

Avant de décrire les avancées de la gravimétrie actuelle permises par la technologie moderne, il est très instructif d'examiner l'histoire de cette discipline qui révèle notamment cette filiation remarquable entre les recherches actuelles et celles des pionniers. C'est pour leur rendre hommage que le chapitre qui suit, raconte dans ses grandes lignes, l'histoire passionnante de l'émergence de la gravimétrie théorique et expérimentale à partir du XVII^e siècle. Son contenu s'appuie sur l'excellent ouvrage de DEPARIS et LEGROS (2000) qui traite de l'histoire des sciences de la Terre, duquel ont été tirés trois articles (DEPARIS et LEGROS, 2011a,b,c) décrivant plus particulièrement l'histoire de la gravimétrie.

1.1 Les précurseurs

1.1.1 Les intuitions mécaniques géniales de Galilée

Le précurseur de la gravimétrie, plus justement appelée *géodésie dynamique* ou *géodésie physique*, est sans nul doute le savant italien Galileo Galilei (1564 – 1642), dit Galilée (Fig. 1.1a). En 1632, il énonce les lois de la chute des corps à la surface de la Terre selon lesquelles la vitesse v de la chute est proportionnelle à sa durée Δt_c et la distance h parcourue par le corps durant la chute, proportionnelle au carré de la durée de chute. En notation moderne, ces lois s'expriment par les deux relations :

$$v = g \Delta t_c \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2} g \Delta t_c^2, \quad (1.1)$$

où g est une constante liée à une propriété physique de la Terre que le savant nomme *capacité d'attraction*.

Six ans plus tard en 1638, Galilée réalise des expériences sur le pendule simple et postule l'isochronisme des oscillations, autrement dit, l'indépendance de la période des oscillations avec la masse du peson et l'amplitude des oscillations. Il énonce également une loi stipulant que le carré de la période T des oscillations est proportionnelle à la longueur l du pendule et dépend de la capacité d'attraction de la Terre. L'homme de science distingue déjà deux tendances dans cette capacité d'attraction, l'une attractive dirigée vers le bas, et l'autre « explosive » très inférieure à la première, due à la rotation de la Terre. Ce faisant, il anticipe la définition moderne de la pesanteur terrestre, formée par les contributions d'une accélération de nature gravitationnelle et d'une accélération centrifuge due à la rotation de la Terre.



(a) Galileo Galilei (1564 – 1642)



(b) Christiaan Huygens (1629 – 1695)

FIGURE 1.1 – Les « précurseurs » de la gravimétrie.

Droits réservés ©Bibliothèque de l'Observatoire de Paris et ©National Portrait Gallery, Londres.

L'apport magistral de Galilée tient en la découverte d'un point commun entre ses travaux sur la chute libre et sur le pendule : pour lui, c'est la même capacité d'attraction de la

Terre qui se manifeste à la fois dans la chute des corps et le balancement du pendule. La question qui se pose ensuite est celle du lien existant entre les lois qui régissent les deux phénomènes : y a-t-il une relation entre les constantes de proportionnalité $2h/\Delta t_c^2$ et l/T^2 qui entrent en jeu respectivement dans la chute libre et les oscillations du pendule ? La résolution magistrale de ce problème va être conduite avec succès presque vingt ans plus tard par un expérimentateur de génie : Christiaan Huygens (1629 – 1695, Fig. 1.1b).

1.1.2 Huygens, « grand horloger »

En 1659, Huygens travaille sur la conception d'horloges de grande précision. Il démontre que l'isochronisme des périodes d'oscillation du pendule simple n'est valable que pour les petites amplitudes d'oscillation. Il réalise également des expériences avec le pendule cycloïdal formé d'une boule en mouvement dans une gouttière dont la forme est celle d'une cycloïde. Il démontre que les périodes des oscillations d'un pendule cycloïdal sont parfaitement isochrones et établit que la durée de descente de la boule dans une gouttière cycloïdale est liée à la capacité d'attraction de la Terre. En notant Δt la durée de descente et g l'intensité de la pesanteur, la relation de Huygens s'écrit avec les notations modernes :

$$\Delta t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}, \quad (1.2)$$

où R désigne le rayon du cercle générateur de la cycloïde.

Le savant montre ensuite que la longueur l du pendule simple ayant la même période T que le pendule cycloïdal doit être quatre fois plus grande que le rayon R . Sachant que la boule du pendule cycloïdal réalise deux montées et deux descentes par période qui durent exactement chacune Δt , il vient d'après la relation 1.2 :

$$T = 4\Delta t = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}},$$

autrement dit,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.3)$$

Cette simple relation suggère également une possibilité de détermination de la pesanteur à partir de la mesure de période d'oscillation d'un pendule simple. En ajustant la longueur l d'un pendule pour que ce dernier « batte la seconde », autrement, dit oscille avec la période $T = 2$ s. La relation 1.3 devient alors :

$$4\pi^2 \frac{l}{g} = 2^2 = 4,$$

d'où

$$g = \pi^2 l. \quad (1.4)$$

La mesure de la longueur l du pendule permet ainsi de calculer la valeur de g . La distance h parcourue par un corps en chute libre pendant une seconde – soit $\Delta t_c = 1$ s dans l'équation 1.1 – est également liée à la longueur l par :

$$h = \frac{\pi^2}{2} l. \quad (1.5)$$

En 1690 dans son ouvrage intitulé « *Discours sur la cause de la pesanteur* », Huygens écrit que la longueur du pendule qui bat la seconde à Paris est « de 3 pieds et 8,66 lignes » soit 0,9941 m, ce qui lui permet d'estimer avec une justesse admirable l'intensité de la pesanteur à $9,812 \text{ m.s}^{-2}$. Ainsi, le pendule simple constitue-t-il le premier gravimètre en tant qu'instrument de mesure de la pesanteur et, Galilée et Huygens, les initiateurs de la gravimétrie expérimentale.

L'utilisation des pendules pour la réalisation de mesures gravimétriques s'est poursuivie jusqu'au début du XX^e siècle. De nos jours, les gravimètres absolus balistiques mesurent le temps de chute libre d'un corps pour déterminer très précisément la valeur de la pesanteur. Les deux types d'instruments utilisent somme toute deux principes élaborés par Galilée et Huygens au XVII^e siècle, ce qui perpétue de façon remarquable les travaux de ces pionniers.

1.2 Vers la modernité

1.2.1 L'étonnante efficacité des théories de Newton

La poursuite du développement de la gravimétrie provient d'une querelle ardemment nourrie entre Huygens et quelques-uns de ses contemporains dont Leibniz (1646 – 1716), avec un théoricien anglais prolifique mais très controversé, Sir Isaac Newton (1642 – 1727, Fig. 1.2).

Entre 1664 et 1685, Newton va élaborer le premier modèle physique de la pesanteur terrestre. En 1665, Newton s'appuie sur une analogie déjà réalisée par Kepler (1571 – 1630) entre l'attraction magnétique et l'attraction gravitationnelle pour affirmer que la force qui maintient la Lune sur son orbite est la même que celle qui fait tomber les objets à la surface de la Terre. Il étend son raisonnement en stipulant que cette attraction est universelle et concerne toutes les particules massives présentes dans l'univers, depuis les particules élémentaires jusqu'aux corps célestes. Il lui restait à trouver une loi permettant de quantifier cette attraction. Pour ce, il lui manque un ingrédient indispensable : la *loi de l'accélération centrifuge*.

Cette dernière est déjà connue par Huygens qui a établi son expression en v^2/r , v désignant la vitesse linéaire due à la rotation et r le rayon du cercle qui constitue la trajectoire. C'est encore l'accélération centrifuge qui est mise à profit par Huygens dans le pendule conique, dispositif très ingénieux de mesure de la pesanteur terrestre qui lui avait déjà permis d'obtenir une estimation de l'accélération de la pesanteur à $9,81 \text{ m.s}^{-2}$. En reprenant à son compte la notion de force centrifuge, Newton propose une autre démonstration de son expression et utilise la troisième loi de Kepler sur le mouvement des astres, publiée en 1618, pour formuler définitivement la loi de l'attraction universelle dite en « $1/r^2$ ».



FIGURE 1.2 – Isaac Newton (1642 – 1727). Droits réservés ©National Portrait Gallery, Londres.

Son raisonnement très simple s'appuie sur la trajectoire de la Lune supposée circulaire :

si cette dernière se maintient sur son orbite, c'est que l'accélération centrifuge compense exactement l'accélération gravitationnelle de la Terre. Si r désigne la distance entre la Terre et la Lune, v_L , la vitesse linéaire de la Lune sur son orbite et ω_L , la vitesse angulaire de son mouvement de rotation autour de la Terre, alors l'accélération centrifuge a pour expression :

$$\frac{v_L^2}{r} = \frac{r^2 \omega_L^2}{r} = \frac{r^3 \omega_L^2}{r^2}.$$

Or, d'après la troisième loi de Kepler, la quantité $r^3 \omega_L^2$ est une constante C indépendante de la masse de la Lune. L'accélération gravitationnelle qui compense l'accélération centrifuge obéit donc à une loi de la forme C/r^2 .

La loi de l'attraction universelle va permettre à Newton d'obtenir une profusion de résultats quantitatifs. Il estime à 1/305 le rapport m entre l'accélération centrifuge et l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre, valeur différant de seulement 6 % de la détermination plus juste de Huygens (1/289). Il prouve l'identité de la force par unité de masse retenant la Lune sur son orbite et de la pesanteur terrestre, puis en s'interrogeant sur le lien entre l'attraction universelle et le mouvement elliptique des planètes, il démontre les deux premières lois de Kepler.

En outre, Newton établit, en appliquant la loi en $1/r^2$ aux particules de matière, que l'attraction gravitationnelle à la surface d'une sphère homogène est la même que celle qui serait produite par un corps ponctuel de même masse que la sphère placé en son centre; c'est le théorème de Newton. Ainsi, pour une Terre sphérique de rayon R_T , homogène et immobile, l'attraction gravitationnelle en surface doit-elle être en $1/R_T^2$. Tout écart à cette loi indique que la Terre réelle doit s'écarter de cette répartition sphérique homogène et qu'il faut donc tenir compte dans l'attraction de masses additionnelles venant de la non sphéricité, de la topographie de surface et des contrastes internes de densité. Ce faisant, Newton établit pour la première fois un lien entre la forme de la Terre et la pesanteur, événement qui signe en 1685 le début de la gravimétrie théorique.

En 1687, Newton publie son explication du système du monde – loi de l'attraction universelle, forme de la Terre, théorie de la Lune, précession des équinoxes, marées océaniques – dans son ouvrage « *Philosophiae naturalis principia mathematica* » (Fig. 1.3). Curieusement, ses travaux sur le système monde sont accueillis avec la plus grande réserve par ses contemporains. Ces derniers reconnaissent exclusivement Newton comme le grand théoricien éponyme de trois lois de la mécanique au puissant pouvoir explicatif, à savoir, le principe de l'inertie, le principe fondamental de la dynamique et le principe de l'action et de la réaction. L'origine de la controverse vient d'une différence fondamentale entre les conceptions de Newton et Huygens concernant la nature de l'attraction gravitationnelle.

L'attraction newtonienne entre particules trouble très fortement Huygens qui réfute l'explication selon laquelle cette dernière puisse agir à distance sans



FIGURE 1.3 – Version française des « Principia » traduite du latin par la Marquise du Châtelet (1706 – 1749). Droits réservés ©Bibliothèque nationale de France.

cause apparente. Ce dernier préfère l'interprétation de la physique cartésienne selon laquelle l'univers baigne dans un fluide en mouvement baptisé éther. Ainsi, l'attraction gravitationnelle serait-elle de nature mécanique telle une réaction des corps au mouvement centrifuge de l'éther. Cette conception est compatible avec une loi de l'attraction en $1/r^2$ et une accélération centrifuge en v^2/r . En revanche, pour Huygens, elle signifie que l'attraction gravitationnelle est indépendante de la forme de la Terre et constante en son intérieur.

À ce point charnière de l'histoire des sciences, l'adhésion de la majorité des savants à la conception de Huygens a gêné l'émergence des idées de Newton. Le basculement va s'opérer progressivement au cours de la première moitié du XVIII^e siècle grâce aux grandes expéditions scientifiques au cours desquelles furent pratiquées les premières mesures gravimétriques. Dès 1740, le système newtonien s'épanouit sur le « Continent » et marque les débuts d'une nouvelle façon d'appréhender les phénomènes naturels à partir des observations et non des causes supposées, qui sera qualifiée plus tard de physique newtonienne.

1.2.2 Les savants explorateurs du siècle des Lumières

L'évolution de la gravimétrie vers une véritable science de la Terre va encore connaître quelques péripéties où vont s'illustrer particulièrement deux savants aux noms très familiers pour les gravimétriciens actuels : Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765, Fig. 1.4a) et Pierre Bouguer (1698 – 1758, Fig. 1.4b).



(a) Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765)



(b) Pierre Bouguer (1698 – 1758)

FIGURE 1.4 – Les « fondateurs » de la gravimétrie moderne.

Droits réservés ©RMN – Grand Palais, Paris, domaine de Chantilly/René-Gabriel Ojéda et Musée du Louvre/Tony Querrec.

Dans la deuxième moitié du XVII^e siècle, les savants ont découvert que la pesanteur varie suivant la latitude grâce notamment aux mesures de l'astronome Jean Richer (1630 – 1696) qui, envoyé en 1672 à Cayenne – en Guyane – pour mesurer la parallaxe de la planète Mars, constata que le pendule qui bat la seconde y est plus court qu'à Paris. En outre, le perfectionnement des instruments d'observation des astres permit de constater l'aplatissement de certaines planètes comme Jupiter ou Mercure. L'idée soutenue notamment par le géodésien français Jean-Félix Picard (1620 – 1682), selon laquelle la Terre n'est pas parfaitement sphérique s'impose progressivement.

Cette problématique n'a évidemment pas échappé à la sagacité de Newton et de Huygens. Tous deux ont d'ores et déjà postulé que la figure d'équilibre hydrostatique d'une Terre fluide en rotation est un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles. Newton en calcule l'aplatissement dans ses « *Principia* » (1687) : en notant a et b respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe d'une ellipse méridienne, il définit l'aplatissement f à l'aide de la relation :

$$f = \frac{a-b}{a}, \quad (1.6)$$

et estime que :

$$f = \frac{5}{4} m \approx \frac{1}{230},$$

où m est le rapport sans dimension de l'accélération centrifuge par l'accélération gravitationnelle.

De son côté, Huygens montre que la section méridienne de la Terre est une ellipse et en évalue l'aplatissement à partir d'une condition d'équilibre différente de celle de Newton. Il aboutit en 1690 au résultat suivant :

$$f = \frac{1}{2} m \approx \frac{1}{578}.$$

Ces deux estimations très différentes de l'aplatissement de la Terre, issues de deux conceptions concurrentes de la gravité, posent question; il n'en fallait pas moins pour que l'Académie des Sciences de Paris décide la réalisation de deux expéditions scientifiques vers le Pérou (1735) et la Laponie (1736) pour mesurer, entre autres grandeurs, la longueur d'un degré d'arc de méridien, la pesanteur à l'équateur et à proximité du pôle nord. Le résultat pour l'aplatissement de $1/178$ obtenu presque dix ans plus tard au terme d'expéditions très mouvementées, est plutôt en faveur de Newton. En revanche, un problème de fond subsiste qui vient de ce que les théories respectives de Huygens et de Newton ne peuvent expliquer la variation observée de l'accélération de la pesanteur entre les pôles et l'équateur, respectivement surestimée par Huygens et sous-estimée par Newton.

L'explication ultime va être fournie par Clairaut en 1743 qui met à profit le tout récent calcul différentiel et intégral pour calculer l'attraction gravitationnelle d'une Terre hétérogène aplatie dont la densité croît avec la profondeur. Le calcul de Clairaut concorde admirablement avec les observations. Ce dernier établit, dans l'hypothèse d'une Terre en équilibre hydrostatique, une relation entre l'aplatissement f et l'aplatissement dynamique f_g mesurant la variation relative de la valeur de la pesanteur entre les pôles et l'équateur; si g_p et g_e désignent respectivement les valeurs de la pesanteur aux pôles et à l'équateur, l'aplatissement dynamique f_g s'écrit

$$f_g = \frac{g_p - g_e}{g_e}, \quad (1.7)$$

et la relation de Clairaut s'exprime par :

$$f_g + f = \frac{2}{230}. \quad (1.8)$$

L'équation 1.8 constitue la première relation entre deux grandeurs liées respectivement à la forme et à la pesanteur de la Terre.

La traditionnelle géodésie géométrique se voit-elle ainsi reliée de façon indissociable à la nouvelle géodésie dynamique, qui apparaît dès lors comme un outil d'investigation de la forme de la Terre à partir d'hypothèses préalables sur sa constitution interne.

La percée de Clairaut dans l'application de la gravimétrie à l'étude globale de la Terre va très vite s'enrichir de la contribution exceptionnelle de Bouguer, consignée dans son ouvrage « *La figure de la Terre* » (Fig. 1.5) publié en 1749.

Ce dernier participe à l'expédition au Pérou aux côtés de l'encyclopédiste Charles-Marie de la Condamine (1701 – 1774) et du botaniste Joseph de Jussieu (1704 – 1779). Il est chargé de la réalisation de mesures pendulaires et de déviation de la verticale qu'il opère selon un protocole expérimental nouveau et très rigoureux qui comporte notamment la correction des mesures d'effets perturbateurs – dilatation du pendule et modification de la poussée d'Archimède – liés aux variations de la température et de la pression.



FIGURE 1.5 – « *La figure de la Terre* » (1749). Droits réservés ©Bibliothèque nationale de France.

La qualité des mesures gravimétriques réalisées par Bouguer lui permet deux découvertes à l'importance capitale :

- d'une part, en exploitant des mesures acquises à différentes altitudes, Bouguer constate un désaccord avec la loi de l'attraction universelle en $1/r^2$;
- d'autre part, il découvre une autre particularité de la pesanteur : la surprenante faiblesse de la déviation de la verticale due aux masses des montagnes.

Le désaccord constaté par Bouguer porte sur la variation relative de pesanteur $\Delta g/g$ entre deux points séparés de la dénivelée H qui, selon la loi de l'attraction universelle, et en négligeant l'accélération centrifuge, s'exprime par :

$$\frac{\Delta g}{g} = -2 \frac{H}{R_T}. \quad (1.9)$$

Ne parvenant pas à vérifier cette valeur, l'homme de science interprète cet effet comme résultant de l'attraction des montagnes situées entre le niveau de la mer et le point de mesure qui compense partiellement la diminution de pesanteur due à l'éloignement du centre de la Terre. Il introduit alors deux corrections dites « à l'air libre » et « de plateau » pour tenir compte de ces deux effets systématiques. Le savant utilise ensuite la variation relative de pesanteur pour estimer, selon ses propres termes, le rapport entre la densité superficielle δ et la densité profonde ρ des matériaux qui forment l'écorce terrestre. Le rapport δ/ρ est estimé par Bouguer à 0,21. Cette valeur reste très approximative comparée à la valeur 0,5 admise aujourd'hui. Le savant a cependant ouvert la voie de l'interprétation des données gravimétriques locales en termes de variations de densité des roches formant l'écorce terrestre.

Parmi les causes de l'estimation erronée du rapport δ/ρ figurent bien entendu la non prise en compte de l'attraction des masses topographiques – obtenu aujourd'hui grâce au calcul des effets de terrain – et du phénomène que traduit la faiblesse de la déviation de la verticale au voisinage des montagnes, à savoir l'existence d'une racine qui prolonge les roches des montagnes en profondeur. Bouguer ne parviendra pas à interpréter ce phénomène qui, à nouveau confirmé par des mesures réalisées au XIX^e siècle, sera finalement expliqué à l'aide d'une nouvelle théorie sur la constitution interne de la Terre appelée *théorie de l'isostasie*.

La conjonction des découvertes de Clairaut et de Bouguer a fourni le cadre conceptuel de la gravimétrie moderne. Lorsque Clairaut calcule la pesanteur d'une Terre à l'équilibre hydrostatique, sans relief ni hétérogénéité latérale de densité, il élabore en réalité un modèle de pesanteur à partir d'une figure théorique de référence. Par ailleurs, les termes correctifs de la pesanteur réelle introduits par Bouguer s'appuient implicitement sur un modèle de référence. Dès lors, l'écart entre la pesanteur mesurée et corrigée et celle calculée via un modèle de référence doit être considérée comme une anomalie – fort justement appelée par la suite *anomalie de Bouguer* – vis-à-vis du modèle de référence et interprétée par un raffinement au moins local de la répartition des densités.

Ainsi les questionnements, les théories mathématiques et les procédés de Clairaut et de Bouguer ont-ils posé les bases de la gravimétrie appliquée à la connaissance de la constitution interne de la Terre. La capacité d'abstraction et de formalisation mathématique, l'ingéniosité et l'habileté expérimentale, l'obstination et le courage, la rigueur et la clairvoyance, sont autant de qualités remarquables des savants explorateurs et aventuriers du siècle des Lumières qui forcent aujourd'hui encore l'admiration.

Chapitre 2

Fondements mathématiques de la théorie de la gravité

« Ô vous qui étudiez, étudiez les mathématiques, et ne construisez pas sans fondements »

Léonard de Vinci

LA théorie mathématique de la gravité repose sur la théorie du potentiel newtonien. Cette dernière comprend une équation fondamentale appelée équation de Poisson de laquelle en découle une seconde très populaire, *l'équation de Laplace*. L'équation de Laplace est omniprésente en physique théorique où elle apparaît dans des théories physiques en apparence aussi distinctes que celles de l'optique, de l'électrostatique, du magnétisme, de l'hydrodynamique, de la propagation de la chaleur, de l'élasticité et de la viscosité. Elle apparaît également dans les ouvrages de mathématiques comme exemple d'équation aux dérivées partielles de type elliptique.

Il est clair que cette théorie est de nos jours bien établie et sous-tend un grand nombre de concepts et de méthodes de la gravimétrie actuelle. L'objectif de ce chapitre est donc d'en présenter les résultats essentiels, tirés de KELLOGG (1954), LEVALLOIS (1970), MACMILLIAN (1930) et WAHR (1996), et ce afin de faciliter la compréhension des problématiques de la gravimétrie. Un certain nombre de définitions et de notations utiles dans la suite du mémoire y sont également données.

2.1 De la distribution de masse au champ de gravité

Nous supposons l'espace physique usuel – espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ – muni d'un repère cartésien constitué par une origine O et une base orthonormée $(\hat{e}_X, \hat{e}_Y, \hat{e}_Z)$. Tout point M de l'espace est alors repéré par le vecteur $\mathbf{x}_M = \overrightarrow{OM} = X\hat{e}_X + Y\hat{e}_Y + Z\hat{e}_Z$ où (X, Y, Z) sont les coordonnées cartésiennes du vecteur $\mathbf{x}_M$.

2.1.1 La loi de Newton

Toute distribution continue de masse (Fig. 2.1) peut être complètement déterminée en se donnant une fonction $\rho(\mathbf{x})$ définie en tout point de l'espace, donnant la masse volumique ou densité locale mesurée en kg m^{-3} . L'attraction gravitationnelle $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ exercée par la distribution de matière sur une masse de 1 kg au point P , s'exprime d'après la loi de Newton par :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_P) = G \int_{\text{espace}} \frac{\rho(\mathbf{x}_M) (\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_P)}{\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_P\|^3} d^3\mathbf{x}_M, \quad (2.1)$$

où G est une constante appelée *constante de gravitation universelle* dont une valeur usuelle avec les unités du Système International (SI) est $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. La notation $\|\dots\|$ désigne ici la norme euclidienne.

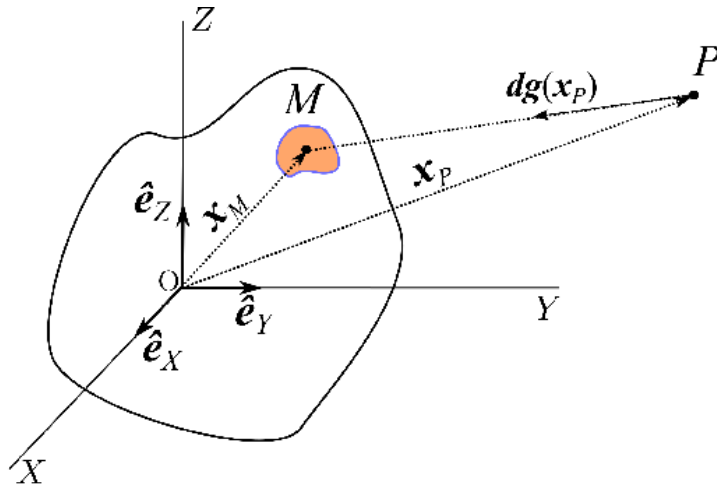


FIGURE 2.1 – Attraction gravitationnelle d'une distribution continue de masse déterminée à partir de la loi de Newton. La distribution de densité est supposée connue en tout point M et entièrement déterminée par la fonction scalaire $\rho(\mathbf{x}_M)$. La loi de Newton permet de déterminer l'effet gravitationnel de cette distribution en ajoutant les contributions élémentaires $d\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ à l'attraction gravitationnelle, créées par des éléments de masse infinitésimaux centrés en M .

La fonction $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ définit un champ vectoriel plus communément appelé *champ de gravité* ou *champ gravitationnel*. L'intensité $g(\mathbf{x}_P) = \|\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)\|$ de l'attraction gravitationnelle ainsi définie est homogène à une accélération de nature gravitationnelle mesurée en m s^{-2} avec les unités du SI. Il est toujours d'usage en gravimétrie d'exprimer les accélérations dans le système d'unité « Centimètre, Gramme, Seconde (CGS) » dans lequel ces dernières s'expriment en gal (Gal) avec la correspondance $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$.

La fonction potentiel V définit un champ scalaire qui peut également s'exprimer en fonction de la distribution de densité $\rho(\mathbf{x}_M)$ par :

$$V(\mathbf{x}_P) = G \int_{\text{espace}} \frac{\rho(\mathbf{x}_M)}{\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_P\|} d^3 \mathbf{x}_M. \quad (2.2)$$

Le champ de gravité $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ dérive d'un *potentiel*, autrement dit il existe une fonction scalaire V telle qu'en tout point P :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_P) = \vec{\nabla}_P V(\mathbf{x}_P), \quad (2.3)$$

où $\vec{\nabla}_P(\dots)$ désigne l'opérateur gradient calculé par rapport aux coordonnées du vecteur $\mathbf{x}_P$.

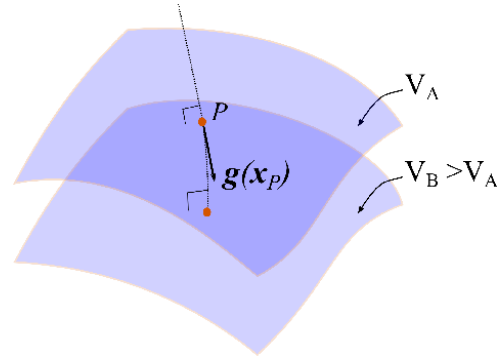


FIGURE 2.2 – Le champ de gravité $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ est orthogonal à la surface équipotentielle passant par P , de potentiel V_A . Il pointe dans la direction où la variation de potentiel est positive et la plus grande possible ($V_B > V_A$).

Le potentiel est défini à une constante additive près et sa valeur se mesure en $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ dans le système SI. La pratique a consacré l'usage de l'*unité géopotentielle*, notée UGP, avec la correspondance $1 \text{ UGP} = 10 \text{ m}^2 \text{s}^{-2} = 10^3 \text{ Gal m}$. La relation 2.3 implique que les lignes du champ de gravité $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sont orthogonales en chacun de leurs points à une surface équipotentielle (Fig. 2.2). Autrement dit, la direction normale en tout point P d'une surface équipotentielle est celle du vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ qui pointe dans la direction vers laquelle l'accroissement du potentiel depuis le point P est le plus grand. Par conséquent, la direction de $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ est dite celle des « potentiels croissants ».

2.1.1.1 Applications à des distributions de masse « hautement symétriques »

La relation 2.2 permet de calculer le potentiel et l'attraction de sources de forme simple et/ou qui possèdent de nombreux éléments de symétrie. À titre d'illustration, considérons un cylindre de matière dont la densité est décrite en M par la fonction $\rho(M)$, de centre O , d'axe de symétrie dirigé par $\hat{\mathbf{e}}_Z$ (Fig. 2.3). Soient R son rayon et H sa hauteur.

Cylindre « infiniment fin »

La masse M_c du cylindre s'exprime par :

$$M_c = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-H/2}^{+H/2} d\alpha dr dZ r \rho(M).$$

Dans le cas d'un cylindre infiniment fin ($H \ll R$), la quantité $\int_{-H/2}^{+H/2} dZ \rho(M)$ peut soit tendre vers 0, soit tendre vers une valeur finie. La distribution de masse est alors répartie sur une couche superficielle infiniment mince dont la *densité surfacique*, notée $\sigma(M)$ et mesurée en kg m^{-2} , est définie par :

$$\sigma(M) = \lim_{H \rightarrow 0} \int_{-H/2}^{+H/2} dZ \rho(M). \quad (2.4)$$

Cette notion de distribution surfacique caractérisée par une densité superficielle est particulièrement utile en pratique pour modéliser des couches fines de matière de petites dimensions comparées au reste de la distribution de masse.

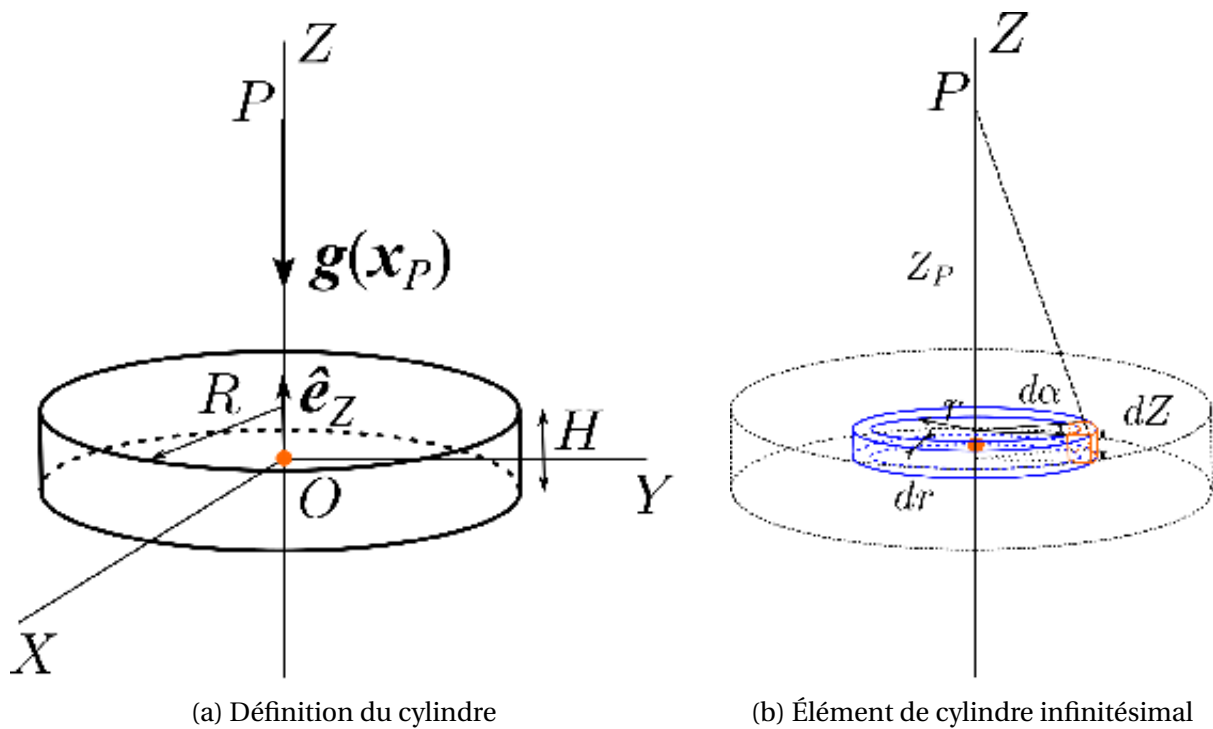


FIGURE 2.3 – Cylindre de densité $\rho(M)$, de hauteur H dont la base circulaire est de rayon R (Fig. 2.3a). Le potentiel gravitationnel est calculé en un point P de l'axe du cylindre dirigé par $\hat{e}_Z$. Le point de départ du calcul du champ gravitationnel sur l'axe du cylindre consiste à déterminer le potentiel d'un élément de cylindre infinitésimal (en orange sur la figure 2.3b) entourant le point courant M , de hauteur dZ , dont les faces supérieures et inférieures sont des portions, délimitées par l'angle $d\alpha$, de la couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons r et $r + dr$. L'aire de chaque face de l'élément de masse est donnée par : $r dr d\alpha$.

En conservant l'hypothèse d'un cylindre fin de densité surfacique $\sigma(M)$, la masse de l'élément de cylindre en M devient simplement $\sigma(M)r dr d\alpha$. Nous supposons de plus la densité surfacique constante égale à σ . Le potentiel V en un point P de l'axe du cylindre, de cote Z_P est alors donné par :

$$V(P) = G \int_0^{2\pi} \int_0^R d\alpha dr \frac{r \sigma}{\sqrt{r^2 + Z_P^2}}.$$

Tous calculs faits, il vient :

$$V(P) = V(Z_P) = 2\pi G \sigma \left(\sqrt{R^2 + Z_P^2} - \varepsilon Z_P \right), \quad (2.5)$$

avec $\varepsilon = 1$ pour $Z_P \geq 0$ ou -1 si $Z_P < 0$.

L'accélération gravitationnelle correspondante s'obtient en calculant le gradient de la relation 2.5, ce qui donne :

$$\mathbf{g}(P) = \partial_{Z_P} V(Z_P) \hat{\mathbf{e}}_Z = -2\pi G \sigma \left(\varepsilon - \frac{Z_P}{\sqrt{R^2 + Z_P^2}} \right) \hat{\mathbf{e}}_Z. \quad (2.6)$$

L'accélération gravitationnelle sur l'axe du cylindre est donc colinéaire à ce dernier. Cette propriété aurait pu être prévue en considérant les éléments de symétrie de la distribution de masse. Il est établi que le champ gravitationnel en un point appartient à tout plan de symétrie de la distribution de masse passant par ce point en question. Dans le cas du cylindre, l'axe correspond à l'intersection de tous les plans de symétrie contenant les génératrices du cylindre. Le champ gravitationnel en un point de l'axe doit appartenir simultanément à tous ces plans ; il est donc nécessairement porté par l'axe qui constitue leur intersection.

En outre, le cas limite où R tend vers l'infini, correspond à une distribution surfacique de masse plane, infiniment étendue. Dans ce cas, toute droite perpendiculaire à la distribution peut constituer un axe de symétrie de cette dernière et par conséquent, l'accélération gravitationnelle est colinéaire au vecteur $\hat{\mathbf{e}}_Z$ en tout point. En étendant la relation 2.6 au cas d'un plan infini ($R \rightarrow +\infty$), il vient l'expression de l'accélération gravitationnelle en un point P quelconque au-dessus ($\varepsilon = 1$) ou au-dessous ($\varepsilon = -1$) du plan :

$$\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(Z_P) = -2\pi G \sigma \varepsilon \hat{\mathbf{e}}_Z. \quad (2.7)$$

L'accélération gravitationnelle est donc verticale, dirigée vers la distribution plane, et d'intensité constante quelle que soit la position du point de calcul. Considérons à présent un plateau infini, d'épaisseur H et de densité ρ uniforme. L'accélération gravitationnelle créée par ce plateau peut être vue comme résultant de la superposition des accélérations gravitationnelles dues à une succession de couches superficielles planes, de densité surfacique σdZ . Si $\mathbf{g}_{\text{plateau}}$ désigne l'accélération gravitationnelle due au plateau, il vient à partir de la relation 2.7 :

$$\mathbf{g}_{\text{plateau}}(P) = \mathbf{g}_{\text{plateau}}(Z_P) = - \int_{-H/2}^{+H/2} dZ 2\pi G \rho \varepsilon \hat{\mathbf{e}}_Z,$$

soit, puisque ρ est constante, la relation donnant l'effet de plateau :

$$\mathbf{g}_{\text{plateau}}(P) = \mathbf{g}_{\text{plateau}}(Z_P) = -2\pi G \rho H \varepsilon \hat{\mathbf{e}}_Z. \quad (2.8)$$

L'effet gravitationnel d'un plateau homogène et infini est donc uniforme, de direction orthogonale au plateau, d'intensité proportionnelle au produit ρH . Les relations 2.7 et 2.8 s'avère

être d'une grande utilité pratique en gravimétrie pour déterminer les effets gravitationnels de sources de forme plus complexe.

Enfin, l'exemple du cylindre envisagé ici permet d'illustrer le comportement du potentiel et de l'accélération gravitationnelle au passage d'une surface limite. Les relations 2.5 et 2.6 indiquent que le potentiel sur l'axe du cylindre est continu en $Z_P = 0$ alors que l'accélération gravitationnelle subit une discontinuité qui s'exprime par :

$$\mathbf{g}(Z_P^+) - \mathbf{g}(Z_P^-) = -2\pi G\sigma(+1 - (-1))\hat{\mathbf{e}}_Z = -4\pi G\sigma\hat{\mathbf{e}}_Z$$

Nous verrons que cette dernière relation se généralise à toute distribution surfacique de masse et s'applique sur la composante de l'accélération gravitationnelle dirigée suivant la normale à la surface de la distribution.

Cylindre « infiniment étroit »

Le cas du cylindre infiniment étroit est obtenu lorsque $R \ll H$. Lorsque la quantité

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} dr d\alpha r \rho(M)$$

tend vers une limite finie, elle correspond à une densité par unité de longueur d'une distribution de masse répartie sur une ligne confondue avec l'axe du cylindre. La *densité linéique* de masse $\Lambda(M)$, mesurée en kg m^{-1} , se définit alors par :

$$\Lambda(M) = \lim_{R \rightarrow 0} \int_0^R \int_0^{2\pi} dr d\alpha r \rho(M). \quad (2.9)$$

Déterminons à présent le potentiel en un point quelconque P du plan médiateur du cylindre étroit, c'est-à-dire le plan (OXY) , repéré par la distance radiale $r_P = \sqrt{X_P^2 + Y_P^2}$. Chaque élément de cylindre de hauteur dZ , de masse $\Lambda(M) dZ$ contribue au potentiel qui s'exprime alors par :

$$V(P) = G \int_{-H/2}^{+H/2} dZ \frac{\Lambda(M)}{\sqrt{r_P^2 + Z^2}}.$$

En supposant que la densité linéique Λ est constante, une fonction admissible pour le potentiel s'exprime par :

$$V(P) = V(r_P) = 2G\Lambda \ln \left(\frac{H + \sqrt{H^2 + 4r_P^2}}{2r_P} \right) - 2G\Lambda \ln C,$$

où C est une constante réelle positive qui permet d'assurer la convergence du potentiel dans le cas limite où H tend vers l'infini.

En choisissant $C = H$, la convergence est assurée et l'expression finale du potentiel devient :

$$V(P) = V(r_P) = 2G\Lambda \ln \left(\frac{H + \sqrt{H^2 + 4r_P^2}}{2Hr_P} \right). \quad (2.10)$$

En notant $\hat{\mathbf{e}}_r$ le vecteur unitaire radial, l'expression de l'accélération gravitationnelle qui dérive de ce potentiel s'écrit :

$$\mathbf{g}(P) = \partial_{r_P} V(r_P) \hat{\mathbf{e}}_r,$$

soit, tous calculs faits,

$$\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(r_P) = 2G\Lambda \left(\frac{4r_P}{\left(H + \sqrt{H^2 + 4r_P^2}\right) \left(\sqrt{H^2 + 4r_P^2}\right)} - \frac{1}{r_P} \right) \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (2.11)$$

Le champ gravitationnel est donc radial, ce qui respecte la symétrie de la source puisque la direction radiale se situe à l'intersection de deux plans de symétrie : le plan médiateur et un plan quelconque passant par l'axe du cylindre étroit.

Lorsque $H \rightarrow +\infty$, la distribution tend vers une répartition linéique de masse infiniment longue, de densité linéique constante. L'accélération gravitationnelle s'exprime alors par :

$$\mathbf{g}(P) = \mathbf{g}(r_P) = -\frac{2G\Lambda}{r_P} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (2.12)$$

Cette relation sera également mise à profit dans des calculs de champ de sources à distribution plus complexe.

2.1.1.2 Interprétation énergétique du potentiel

Les différences de potentiel ont une interprétation physique simple. Imaginons un opérateur qui souhaiterait amener, de façon quasi-statique, une masse m depuis un point A où la valeur du potentiel est V_A jusqu'à un point B de potentiel V_B en l'absence de toute autre champ de force. Ce dernier doit compenser l'attraction gravitationnelle subie par la masse en exerçant la force $-m\mathbf{g}(\mathbf{x}_M)$ en tout point M du trajet reliant A à B . Le travail W_{op} dépensé par l'opérateur au cours de cette opération s'exprime alors par la circulation de cette force, soit :

$$W_{\text{op}} = \int_{A \rightarrow B} (-m\mathbf{g}(\mathbf{x}_M)) \cdot d\mathbf{x}_M = -m \int_{A \rightarrow B} \mathbf{g}(\mathbf{x}_M) \cdot d\mathbf{x}_M$$

qui, d'après l'équation 2.3, devient :

$$W_{\text{op}} = -m \int_{A \rightarrow B} \vec{\nabla}_M V(\mathbf{x}_M) \cdot d\mathbf{x}_M = m(V_A - V_B).$$

Le travail W_{op} mesure la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle de la masse m entre les points A et B . Autrement dit, la différence de potentiel gravitationnel $V_A - V_B$ mesure la variation d'énergie potentielle gravitationnelle par unité de masse lors d'un déplacement du point A au point B .

Il est clair également que cette différence de potentiel est indépendante du trajet suivi lors de ce déplacement; le champ de gravitation est dit à circulation *conservative*. En outre, l'interprétation énergétique des différences de potentiel suppose implicitement que la fonction potentiel ne présente ni discontinuité, ni singularité. La continuité du potentiel est une propriété fondamentale de ce champ scalaire qui se démontre mathématiquement à partir de la relation 2.2.

Les équations intégrales 2.1 et 2.2 indiquent que la détermination du champ de gravité en tout point à partir du potentiel V ou de l'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ est possible dès lors que la distribution des masses, autrement dit la fonction ρ , est connue en tout point. La détermination du champ de gravité à partir de ses sources constitue le *problème direct* de la gravimétrie.

2.1.2 L'équation fondamentale de Poisson

L'équation de Poisson fournit une formulation alternative à celle proposée par Newton avec l'équation 2.2. Soit ∇^2 l'opérateur laplacien, qui appliqué à une fonction scalaire $V(\mathbf{x}_M)$, se définit en coordonnées cartésiennes par :

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}_M) = \partial_{XX}^2 V(\mathbf{x}_M) + \partial_{YY}^2 V(\mathbf{x}_M) + \partial_{ZZ}^2 V(\mathbf{x}_M) \quad (2.13)$$

où les notations $\partial_{\alpha\alpha}^2 V$ avec $\alpha = X, Y, Z$, désignent les dérivées partielles secondes, calculées suivant les coordonnées du point M , de la forme suivante :

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 V(\mathbf{x}_M) = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}. \quad (2.14)$$

En tout point M où la fonction $\rho(\mathbf{x}_M)$ est continue, l'équation de Poisson stipule que le potentiel $V(\mathbf{x}_M)$ satisfait la relation :

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}_M) = -4\pi G \rho(\mathbf{x}_M). \quad (2.15)$$

L'équation de Poisson est donc une équation aux dérivées partielles linéaire, du second ordre, de type elliptique. Cette dernière découle de l'équation intégrale du potentiel 2.2 et, réciproquement, l'intégration de l'équation de Poisson conduit à l'équation intégrale du potentiel.

L'équation de Poisson permet de ramener le problème de la détermination du potentiel V à celui de la résolution dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace d'une équation aux dérivées partielles elliptique qui nécessite la connaissance de *conditions aux limites*. Ces conditions peuvent être de deux types suivant la nature de la fonction connue sur la bordure $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$: il s'agit des *conditions de Dirichlet* lorsque le potentiel V est connu en tout point de la bordure $\partial\mathcal{D}$ et des *conditions de Neumann* lorsque seule la composante de $\mathbf{g}(\mathbf{x}_M)$ suivant la normale $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_M)$ en M au domaine $\mathcal{D}$, autrement dit la *dérivée normale* $\partial_n V(\mathbf{x}_M) = \nabla V(\mathbf{x}_M) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_M)$, est connue en tout point de la bordure. Il est alors possible d'accéder au potentiel sans connaître nécessairement la distribution $\rho(\mathbf{x}_M)$ en tout point, mais seulement le potentiel ou le champ gravitationnel sur une surface fermée entourant la région de l'espace où le potentiel est recherché.

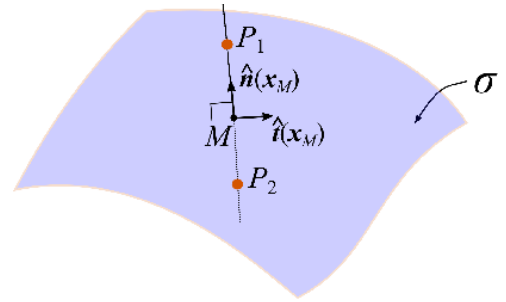


FIGURE 2.4 – Schéma illustrant les éléments géométriques nécessaires pour exprimer les conditions de continuité du champ gravitationnel au passage d'une surface limite.

L'équation de Poisson n'étant pas valable aux points de discontinuité de la fonction densité $\rho(\mathbf{x}_M)$, la formulation des conditions aux limites nécessite de connaître le comportement du potentiel $V(\mathbf{x}_M)$ ou du vecteur $\mathbf{g}(\mathbf{x}_M)$ au voisinage des discontinuités. La condition de continuité du potentiel est essentielle puisqu'elle permet de fixer très facilement des conditions aux limites. En revanche, la continuité n'est plus assurée pour le champ de gravité.

Considérons par exemple une distribution de masse répartie sur une surface S et caractérisée par la densité surfacique $\sigma(\mathbf{x}_M)$ mesurée en kg m^{-2} (Fig. 2.4). Soient $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_M)$ le vecteur unitaire normal à la surface au point M et $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_M)$ un vecteur unitaire localement tangent à la surface S en M . Soient P_1 et P_2 deux points situés de part et d'autre de la surface S de sorte

que $\overrightarrow{MP_1} = -\overrightarrow{MP_2} = k \hat{n}(\mathbf{x}_M)$ pour $k \in \mathbb{R}$.

Les conditions de continuité pour le champ gravitationnel $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \overrightarrow{\nabla} V$ s'expriment alors par :

$$\lim_{P_1, P_2 \rightarrow M} \left[\overrightarrow{\nabla} V(\mathbf{x}_{P_1}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_M) - \overrightarrow{\nabla} V(\mathbf{x}_{P_2}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_M) \right] = 0; \quad (2.16)$$

$$\lim_{P_1, P_2 \rightarrow M} \left[\overrightarrow{\nabla} V(\mathbf{x}_{P_1}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_M) - \overrightarrow{\nabla} V(\mathbf{x}_{P_2}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_M) \right] = -4\pi\sigma(\mathbf{x}_M). \quad (2.17)$$

Les deux conditions précédentes indiquent que la composante tangentielle du champ gravitationnel $\overrightarrow{\nabla} V(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ est continue sur S alors que la composante normale $\partial_n V$ est discontinue sauf dans le cas où la densité surfacique est nulle sur S . L'équation de Poisson et les conditions de continuité 2.16 et 2.17 permettent théoriquement la détermination complète du potentiel gravitationnel.

2.1.3 Un corollaire capital : l'équation de Laplace

La conséquence immédiate de l'équation de Poisson est que le potentiel V satisfait l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 V(\mathbf{x}_M) = 0, \quad (2.18)$$

en tout point M tel que $\rho(\mathbf{x}_M) = 0$.

Le problème de la détermination du potentiel V dans un domaine $\mathcal{D}$ ne comportant aucune masse, revient à chercher une fonction deux fois continûment différentiable dans $\mathcal{D}$ satisfaisant l'équation de Laplace étant donné les conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann. Ces dernières consistent respectivement à fixer le potentiel $V(\mathbf{x}_Q)$, ou sa dérivée normale $\partial_n V(\mathbf{x}_Q)$, en tout point Q de $\partial\mathcal{D}$. La fonction recherchée est dite *harmonique* dans le domaine $\mathcal{D}$. La théorie mathématique du potentiel permet de montrer que cette fonction existe et est unique.

D'un point de vue strictement théorique, le potentiel gravitationnel extérieur de la Terre est une fonction harmonique et régulière à l'infini. Il suffit donc, pour le définir dans tout l'espace, de le connaître uniquement sur la surface de la Terre pour satisfaire les conditions de Dirichlet. De même, il suffirait de connaître sa dérivée normale $\partial_n V(\mathbf{x})$ sur toute la surface terrestre pour satisfaire les conditions de Neumann. L'adéquation du problème mathématique de la détermination du potentiel gravitationnel avec le problème géodésique concret demeure cependant incomplète puisque, d'une part, la dérivée normale ne s'identifie qu'à la pesanteur d'une Terre sphérique, homogène et immobile et, d'autre part, la surface de la Terre sur laquelle doit s'appliquer la théorie, c'est-à-dire la surface topographique, reste inconnue. La solution pratique mise au point par les gravimétriciens pour la détermination du potentiel extérieur repose sur une représentation fonctionnelle particulière de la fonction potentiel : la décomposition en série d'*harmoniques sphériques*.

2.2 L'essentiel sur les séries d'harmoniques sphériques

Les séries d'harmoniques sphériques constituent une représentation fonctionnelle des solutions de l'équation de Laplace exprimée en *coordonnées sphériques*. Ces dernières permettent de repérer tout point M de l'espace par deux angles, la *longitude* λ et la *colatitude* θ associées à un réel positif r égal à la norme du vecteur $\vec{OM}$.

2.2.1 L'équation de Laplace en coordonnées sphériques

Tout point M de coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) possède également un triplet de coordonnées sphériques (λ, θ, r) appartenant au pavé $[0, 2\pi[\times [0, \pi] \times [0, +\infty[$ (Fig. 2.5). Le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes s'effectue grâce aux trois relations suivantes :

$$\begin{cases} X = r \sin \theta \cos \lambda \\ Y = r \sin \theta \sin \lambda \\ Z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.19)$$

La *surface coordonnée* correspondant à la coordonnée r – c'est-à-dire la surface décrite par le point M lorsque le couple (λ, θ) parcourt le pavé $[0, 2\pi[\times [0, \pi]$, r étant fixé – est une sphère de centre O et de rayon r . L'angle λ est celui formé par le plan $(\hat{e}_X, \hat{e}_Z)$ et le plan méridien passant par M et l'axe (OZ) – également surface coordonnée de la longitude –. La colatitude est finalement l'angle formé dans le plan méridien par l'axe (OZ) et le vecteur $\vec{OM}$.

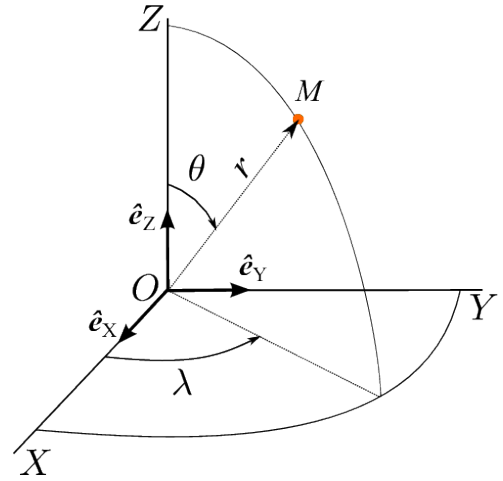


FIGURE 2.5 – Définition des coordonnées sphériques.

En notant respectivement ∂_λ , ∂_θ et ∂_r les dérivées partielles premières par rapport à λ , θ , et r , le laplacien de la fonction potentiel V exprimé en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\lambda (\partial_\lambda V) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta V) + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r V). \quad (2.20)$$

2.2.2 Solutions de l'équation de Laplace

La résolution de l'équation de Laplace à partir de la relation 2.20 conduit toute une famille de fonctions solutions V_l^m appelées *harmoniques sphériques* de la forme suivante :

$$V_l^m(\lambda, \theta, r) = \left\{ \begin{matrix} r^l \\ r^{-(l+1)} \end{matrix} \right\} Y_l^m(\lambda, \theta), \quad (2.21)$$

où l et m sont deux entiers relatifs, appelés respectivement *degré* et *ordre* de l'harmonique sphérique, tels que $l \geq 0$ et $|m| \leq l$.

Les fonctions $Y_l^m(\lambda, \theta)$ forment la *partie angulaire* de l'harmonique sphérique, puisqu'ils ne dépendent que de la longitude et la colatitude du point d'observation. Elles sont appelées *harmoniques sphériques de surface* et définies sur la sphère unité – et sur toute sphère

homothétique – par les relations suivantes :

$$Y_l^m(\lambda, \theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\lambda} & \text{pour } m \geq 0 \\ (-1)^{-m} (Y_l^{-m})^*(\lambda, \theta) & \text{pour } m < 0 \end{cases}, \quad (2.22)$$

où le symbole $(\dots)^*$ est utilisé pour désigner le complexe conjugué; les fonctions P_l^m sont définies pour toute valeur réelle de x de l'intervalle $[-1, +1]$ par :

$$P_l^m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = P_l(x) & \text{pour } m = 0 \\ (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) & \text{pour } m > 0 \end{cases}. \quad (2.23)$$

Les fonctions $P_l(x) = P_l^0(x)$ sont des polynômes de degré l appelés *polynômes de Legendre*. Lorsque $m > 0$, les fonctions non polynomiales $P_l^m(x)$ sont plus généralement appelées *fonctions associées de Legendre*.

La propriété fondamentale des harmoniques sphériques de surface est qu'ils forment un système complet de fonctions orthogonales sur la sphère unité. Ainsi, toute fonction $V_0(\lambda, \theta)$ définie sur la sphère unité – c'est-à-dire pour $(\lambda, \theta) \in [0, 2\pi[\times [0, \pi]$ –, suffisamment régulière et telle que :

$$V_0(\lambda, \theta) = V_0(\lambda + 2\pi, \theta),$$

peut-elle être décomposée en harmoniques sphériques, c'est-à-dire qu'il existe des nombres complexes A_l^m tels que :

$$V_0(\lambda, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l A_l^m Y_l^m(\lambda, \theta). \quad (2.24)$$

Les nombres complexes A_l^m , appelés également *coefficient de Stokes*, peuvent être calculés par l'intégrale suivante :

$$A_l^m = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi d\theta \sin\theta V_0(\lambda, \theta) (Y_l^m)^*(\lambda, \theta), \quad (2.25)$$

qui découle de la relation d'orthogonalité :

$$\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_l^m(\lambda, \theta) (Y_{l'}^{m'})^*(\lambda, \theta) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.26)$$

où $\delta_{ll'}$ (resp. $\delta_{mm'}$) désigne le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ll'} = 0$ (resp. $\delta_{mm'} = 0$) si $l \neq l'$ (resp. $m \neq m'$) et $\delta_{ll} = 1$ (resp. $\delta_{mm} = 1$).

La représentation du potentiel gravitationnel sous la forme d'une série d'harmoniques sphériques permet de résoudre simplement l'équation de Laplace lorsque les conditions aux limites sont données sur des sphères.

Considérons, par exemple, une sphère de rayon a sur laquelle le potentiel gravitationnel est constant égal à V_0 . La détermination du potentiel extérieur revient à résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0 & \text{pour } r > a; \\ V(\lambda, \theta, r = a) = V_0 & \text{et } \lim_{r \rightarrow +\infty} V(\lambda, \theta, r) = 0. \end{cases}$$

L'expression générale du potentiel extérieur peut donc s'écrire :

$$V(\lambda, \theta, r) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_l^m r^{-(l+1)} Y_l^m(\lambda, \theta),$$

où B_l^m sont des coefficients complexes à déterminer. Les contributions en $r^l Y_l^m$ ont été délibérément écartées de par leur divergence à l'infini.

Les conditions aux limites sur la sphère de rayon a permettent d'exprimer une décomposition de la constante V_0 sous la forme :

$$V_0 = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} B_l^m a^{-(l+1)} Y_l^m(\lambda, \theta),$$

d'où il résulte, d'après la relation 2.25 :

$$B_l^m = a^{l+1} V_0 \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi d\theta \sin\theta (Y_l^m)^*(\lambda, \theta).$$

Sachant que $\sqrt{4\pi} Y_0^0 = 1$ d'après 2.22 et 2.23, la relation précédente peut s'écrire sous la forme d'une relation d'orthogonalité :

$$B_l^m = \sqrt{4\pi} a^{l+1} V_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_0^0(\lambda, \theta) (Y_l^m)^*(\lambda, \theta)}_{\delta_{l0} \delta_{m0}};$$

il en résulte :

$$B_l^m = \begin{cases} \sqrt{4\pi} a V_0 & \text{si } l = m = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le potentiel cherché s'écrit donc :

$$V(\lambda, \theta, r) = \sqrt{4\pi} V_0 \frac{a}{r} \underbrace{Y_0^0(\lambda, \theta)}_{=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}} = V_0 \frac{a}{r}.$$

Cet exemple simple illustre la méthode de résolution de l'équation de Laplace basée sur la recherche des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques de sa solution. Les termes V_0 et a qui entrent dans l'expression du potentiel rappellent la dépendance de la solution vis-à-vis de la condition aux limites $V = V_0$ sur la sphère de rayon a . Le terme en $1/r$ permet la convergence en 0 lorsque r tend vers l'infini, c'est-à-dire sur la surface limite d'une sphère infiniment grande contenant tout l'espace.

Plus généralement, la dépendance en $r^{-(l+1)}$ des harmoniques sphériques de degré l du potentiel extérieur rend leur contribution au potentiel décroissante lorsque le degré augmente. Ce dernier conditionne également la valeur minimale de la longueur d'onde spatiale que l'harmonique sphérique peut représenter.

Au degré l et à l'ordre m , la longueur d'onde accessible du potentiel mesuré sur une sphère de rayon égal au rayon moyen de la Terre, soit 6371 km, est de :

- $\frac{40000 \text{ km}}{l - m}$ dans la direction nord-sud le long d'un méridien de la sphère unité ;
- $\frac{40000 \text{ km}}{m}$ dans la direction est-ouest le long d'un parallèle.

Il est d'usage de majorer cette valeur, par $40000 \text{ km}/l$. C'est pourquoi les longueurs d'onde du potentiel les plus courtes sont celles dont l'effet est le plus rapidement atténué avec l'éloignement du point d'observation dans une décomposition en harmoniques sphériques. Ce sont ces mêmes courtes longueurs d'onde qui nécessitent le plus grand nombre de coefficients B_l^m , puisqu'une décomposition limitée au degré L contient exactement $(L + 1)^2$ coefficients de ce type.

La décomposition en harmoniques sphériques du potentiel gravitationnel s'interprète finalement comme une représentation spectrale discrète d'autant plus étendue vers les hautes fréquences (resp. les plus courtes longueurs d'onde) que le degré l est élevé. En termes de résolution – c'est-à-dire demi-longueur d'onde –, les expressions retenues pour un modèle en harmoniques sphériques, développé jusqu'au degré l sont :

$$\mathcal{R}_{\text{ang}}[\text{deg}] = \frac{180}{l} \quad \text{pour la résolution angulaire ;} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{R}_{\text{spa}}[\text{km}] = \frac{20000}{l} \quad \text{pour la résolution spatiale.} \quad (2.28)$$

2.2.3 Le tenseur de Marussi

Les équations de Poisson et de Laplace expriment des relations locales entre certaines dérivées spatiales secondes du potentiel gravitationnel. Ces quantités s'interprètent également comme des dérivées spatiales premières des composantes de l'accélération gravitationnelle. Plus précisément, si g_X, g_Y, g_Z désignent les composantes de l'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ dans un repère cartésien en un point P , alors la relation 2.3 et qui la relie au potentiel, se traduit par :

$$g_\alpha(\mathbf{x}_P) = \partial_\alpha V(\mathbf{x}_P) \quad \text{avec} \quad \alpha = X, Y, Z.$$

À partir de ces composantes, il est possible de former neuf dérivées partielles secondes $\partial_\beta g_\alpha$ où $\alpha, \beta = X, Y, Z$. Chaque quantité $\partial_\beta g_\alpha$ correspond à la variation spatiale dans la direction β de la composante de $\mathbf{g}$ suivant α . Les neuf dérivées partielles secondes forment un tenseur T d'ordre 2 des gradients de gravité. Ce dernier peut également se définir à partir des dérivées spatiales secondes du potentiel par :

$$\partial_{\beta\alpha}^2 V(\mathbf{x}_P) \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta = X, Y, Z. \quad (2.29)$$

Ce tenseur, appelé *tenseur de Marussi* est symétrique puisque $\partial_{\beta\alpha} V = \partial_{\alpha\beta} V$. De plus, les équations de Poisson et de Laplace donnent des relations sur la trace de T puisque cette dernière s'identifie au laplacien du potentiel. Il vient donc :

$$\text{Trace}(T(\mathbf{x}_P)) = V_{XX}(\mathbf{x}_P) + V_{YY}(\mathbf{x}_P) + V_{ZZ}(\mathbf{x}_P) = \begin{cases} -4\pi G\rho(\mathbf{x}_P) & \text{si } \rho(\mathbf{x}_P) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La symétrie du tenseur et la relation physique qui lie ses éléments diagonaux font que seuls cinq des neuf éléments du tenseur de Marussi sont indépendants.

Du point de vue dimensionnel, les gradients de gravité sont homogènes à une accélération par unité de longueur. Leur unité dans le système SI est donc s^{-2} . L'usage a consacré une autre unité baptisée « eötvös » (E) en l'honneur du physicien hongrois Eötvös, avec la correspondance $1 \text{ E} = 0,1 \mu\text{Gal}/\text{m} = 10^{-9} s^{-2}$ et son sous-multiple $1 \text{ mE} = 10^{-3} \text{ E} = 10^{-12} s^{-2}$.

Le tenseur de Marussi constitue un troisième outil mathématique d'étude champ de gravité au même titre que le potentiel et l'accélération gravitationnels. Si l'étude du champ de gravité s'envisage d'un point de vue géométrique, c'est-à-dire par le biais des surfaces équipotentielles, l'accélération gravitationnelle constitue le champ de vecteurs qui indique la direction des lignes de plus grande pente et le champ de tenseurs de Marussi permet de déterminer les courbures locales. Nous reviendrons sur l'utilité du tenseur de Marussi pour l'interprétation des sources géophysiques à partir de cartes du champ de gravité. Le regain d'intérêt actuel pour l'étude des gradients de gravité a été suscité par le développement d'instruments baptisés *gradiomètres* qui permettent de réaliser des mesures des gradients de gravité.

2.3 Potentiel gravitationnel d'une distribution de masse arbitraire

La détermination du potentiel gravitationnel d'une distribution continue de masse peut être réalisée à l'aide des décompositions en harmoniques sphériques. Le point de départ consiste à réaliser une décomposition en harmoniques sphériques de la distribution de densité $\rho(\mathbf{x}_M)$ au point M de coordonnées sphériques $(\lambda_M, \theta_M, r_M)$ de la forme :

$$\rho(\mathbf{x}_M) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \rho_l^m(r_M) Y_l^m(\lambda_M, \theta_M), \quad (2.30)$$

où les coefficients $\rho_l^m(r_M)$ correspondent à la décomposition de la fonction $\rho(\lambda, \theta, r)$ sur la sphère $r = r_M$; ces derniers s'expriment donc, d'après 2.25, par :

$$\rho_l^m(r_M) = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi d\theta \sin\theta \rho(\lambda, \theta, r_M) (Y_l^m)^*(\lambda, \theta). \quad (2.31)$$

2.3.1 Expression générale du potentiel

En vue d'utiliser la relation 2.30 avec la loi de Newton pour le potentiel 2.2, il convient de disposer de la décomposition en harmoniques sphériques de la *distance réciproque* entre le point de calcul P et le point courant de la distribution de masse M . Cette dernière s'exprime par :

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_M\|} = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} (Y_l^m)^*(\lambda_M, \theta_M) Y_l^m(\lambda_P, \theta_P) \begin{cases} \frac{r_M^l}{r_P^{l+1}} & \text{si } r_M < r_P \\ \frac{r_P^l}{r_M^{l+1}} & \text{si } r_P < r_M \end{cases}. \quad (2.32)$$

La combinaison des équations 2.30 et 2.32 avec la loi de Newton 2.2, permet d'exprimer le potentiel en un point P extérieur à la distribution – c'est-à-dire vérifiant $r_P > r_M$ quel que

soit M – par la relation :

$$V(\mathbf{x}_P) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{B_l^m}{r_P^{l+1}} Y_l^m(\lambda_P, \theta_P) \quad \text{avec} \quad B_l^m = \frac{4\pi G}{2l+1} \int_{\text{espace}} dr_M r_M^{l+2} \rho_l^m(r_M). \quad (2.33)$$

La relation 2.33 établit un lien quantitatif entre la représentation fonctionnelle de la distribution de densité $\rho(\mathbf{x}_M)$ et celle du potentiel extérieur $V(\mathbf{x}_P)$ par l'intermédiaire des coefficients B_l^m , qui apparaissent dès lors comme des moyennes pondérées des coefficients $\rho_l^m(r_M)$ pour un degré l et un ordre l donnés. Le terme r_M^{l+2} amplifie préférentiellement les sources proches de la surface terrestre d'autant plus que le degré l est élevé. Les sources superficielles de courtes longueurs d'onde ont donc une contribution significative au potentiel extérieur.

Connaissant les coefficients B_l^m à partir de mesures gravimétriques, il est théoriquement possible d'accéder aux coefficients $\rho_l^m(r_M)$, donc à la distribution de densité, en résolvant ce qui est communément appelé un *problème inverse*.

Enfin la détermination des coefficients $\rho_l^m(r_M)$ qui revient à réaliser l'analyse spectrale de la distribution de densité, nécessite une discrétisation du volume de la distribution en éléments de volume situés entre des sphères concentriques, de centre O . Ce type de discrétisation est bien adapté aux corps dont les limites sont des sphères ou dont le volume peut être correctement décrit par un ensemble d'éléments de volume sphériques.

2.3.2 Distribution de densité à symétrie sphérique

Considérons la distribution de densité à symétrie sphérique définie par :

$$\rho(\mathbf{x}_M) = \rho(r_M) = \begin{cases} \rho_a(r_M) & \text{si } r_M < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette distribution correspond à celle d'une Terre sphérique de rayon a , immobile, dont la densité varie uniquement avec la profondeur. Le calcul des coefficients $\rho_l^m(r_M)$ donne dans ce cas :

$$\begin{aligned} \rho_l^m(r_M) &= \begin{cases} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi d\theta \sin\theta \rho_a(r_M) (Y_l^m)^*(\lambda, \theta) & \text{si } r_M < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi d\theta \sin\theta \rho_a(r_M) \underbrace{\sqrt{4\pi} Y_0^0(\lambda, \theta)}_{=1} (Y_l^m)^*(\lambda, \theta) & \text{si } r_M < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{4\pi} \rho_a(r_M) & \text{si } r_M < a \text{ et } l = m = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

D'après la relation 2.33, le potentiel gravitationnel extérieur de cette distribution s'exprime par :

$$V(\mathbf{x}_P) = 4\pi G \frac{1}{r_P} \left(\int_0^a dr_M r_M^2 \rho_0^0(r_M) \right) Y_0^0(\lambda_P, \theta_P),$$

soit, tous calculs faits,

$$V(\mathbf{x}_P) = \frac{G}{r_P} \int_0^a dr_M 4\pi r_M^2 \rho_a(r_M). \quad (2.34)$$

Le champ gravitationnel $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ correspondant à cette distribution s'obtient en calculant le gradient du potentiel, soit :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_P) = -G \frac{\hat{\mathbf{e}}_{r_P}}{r_P^2} \int_0^a dr_M 4\pi r_M^2 \rho_a(r_M). \quad (2.35)$$

La quantité $\int_0^a dr_M 4\pi r_M^2 \rho_a(r_M)$ correspond à la masse totale de la distribution. Les relations 2.34 et 2.35 traduisent donc le théorème de Newton, selon lequel le champ gravitationnel produit à l'extérieur d'une sphère dont la densité interne ne dépend que de la profondeur, est le même que celui produit par une masse ponctuelle d'égale valeur placée au centre de la sphère.

2.3.3 Cas d'une surface approximativement sphérique

Le cas plus réaliste d'une distribution de densité limitée par une surface proche de celle d'une sphère, peut être envisagé comme une perturbation du cas de la distribution à symétrie sphérique. Considérons, par exemple, la distribution homogène $\rho(\mathbf{x}_M)$ définie comme suit :

$$\rho(\mathbf{x}_M) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r_M < r_S(\lambda_M, \theta_M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (2.36)$$

pour laquelle le rayon limite r_S dépend de la position du point courant M , et s'exprime par :

$$r_S(\lambda_M, \theta_M) = a \left(1 + \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \varepsilon_l^m Y_l^m(\lambda_M, \theta_M) \right) \quad (2.37)$$

avec $\varepsilon_l^m \ll 1$ quels que soient l, m et $\varepsilon_0^0 = 0$.

La quantité a correspond, dans ce cas, au rayon de la sphère moyenne, puisque la valeur moyenne sur la sphère de l'harmonique sphérique de surface Y_l^m est donnée par :

$$\langle Y_l^m \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_l^m(\lambda, \theta) \underbrace{\sqrt{4\pi} (Y_0^0)^*(\lambda, \theta)}_{=1} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{l0} \delta_{m0}, \quad (2.38)$$

d'où il résulte :

$$\langle r_S \rangle = a + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \underbrace{\varepsilon_0^0}_{=0} = a.$$

La contribution au potentiel extérieur $V(\mathbf{x}_P)$ de la sphère moyenne s'exprime, d'après 2.34, par :

$$V_a(\mathbf{x}_P) = \frac{4\pi G \rho_0 a^3}{3 r_P}. \quad (2.39)$$

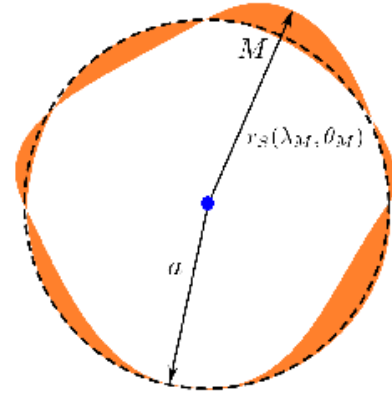


FIGURE 2.6 – Définition d'une surface approximativement sphérique.

La différence entre le potentiel extérieur et la contribution de la sphère moyenne provient de l'effet gravitationnel de la couche de matière comprise entre cette dernière et la surface réelle de la distribution. L'épaisseur de cette couche varie suivant la position et s'exprime au point M de coordonnées sphériques $(\lambda_M, \theta_M, r_M)$ par la relation :

$$a \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \varepsilon_l^m Y_l^m(\lambda_M, \theta_M).$$

Cette couche de matière est équivalente à une distribution surfacique de masse $\sigma(\lambda, \theta)$ sur la sphère de rayon a donnée par :

$$\sigma(\lambda, \theta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sigma_l^m Y_l^m(\lambda_M, \theta_M) \quad \text{avec} \quad \sigma_l^m = \rho_0 a \varepsilon_l^m. \quad (2.40)$$

La détermination de la décomposition en harmoniques sphériques de la distribution de densité 2.40 s'effectue de façon analogue à celle menée pour une distribution volumique, à partir de l'expression du potentiel extérieur d'une distribution surfacique :

$$V_S(\mathbf{x}_P) = G \int_{\text{espace}} \frac{\sigma(\mathbf{x}_M)}{\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_P\|} d^2 \mathbf{x}_M. \quad (2.41)$$

Elle conduit au potentiel $V_S(\mathbf{x}_P)$ donné par :

$$V_S(\mathbf{x}_P) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{C_l^m}{r_P^{l+1}} Y_l^m(\lambda_P, \theta_P) \quad \text{avec} \quad C_l^m = \frac{4\pi G}{2l+1} a^{l+2} \sigma_l^m. \quad (2.42)$$

En ajoutant les contributions respectives de la sphère moyenne (cf Éq. 2.39) et de la distribution surfacique (cf Éq. 2.42), il vient finalement l'expression du potentiel extérieur de la distribution quasi-sphérique décrite par 2.36 :

$$V(\mathbf{x}_P) = \frac{4\pi G \rho_0 a^3}{3 r_P} + 4\pi G a^2 \rho_0 \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{\varepsilon_l^m}{2l+1} \left(\frac{a}{r_P}\right)^{l+1} Y_l^m(\lambda_P, \theta_P). \quad (2.43)$$

L'équation 2.43 montre très clairement que le calcul du potentiel extérieur de la Terre peut être réalisé à différents niveaux d'approximation, en raffinant un modèle initialement sphérique de la surface limite de la distribution. En outre, ce raffinement s'opère depuis les basses jusqu'aux hautes fréquences du potentiel, selon le degré harmonique maximum atteint par le développement constitué du 2^e terme de l'équation 2.43. Ce degré maximum $l_{\max}$ fixe la plus courte longueur d'onde $\lambda_{\min} = 40000 \text{ km} / l_{\max}$ représentée par le modèle, autrement dit, sa résolution spatiale $\lambda_{\min}/2$.

2.3.3.1 Potentiel gravitationnel d'un ellipsoïde faiblement aplati

À titre d'illustration de la relation 2.43, nous nous proposons de déterminer le potentiel gravitationnel extérieur d'un ellipsoïde de révolution faiblement aplati, d'axe (OZ) (Fig. 2.7).

Soient A son demi-grand axe et f son aplatissement supposé faible ($f \ll 1$). L'équation cartésienne d'un tel ellipsoïde dans le repère cartésien $(OXYZ)$ s'écrit alors :

$$\frac{X^2 + Y^2}{A^2} + \frac{Z^2}{A^2(1-f)^2} = 1. \quad (2.44)$$

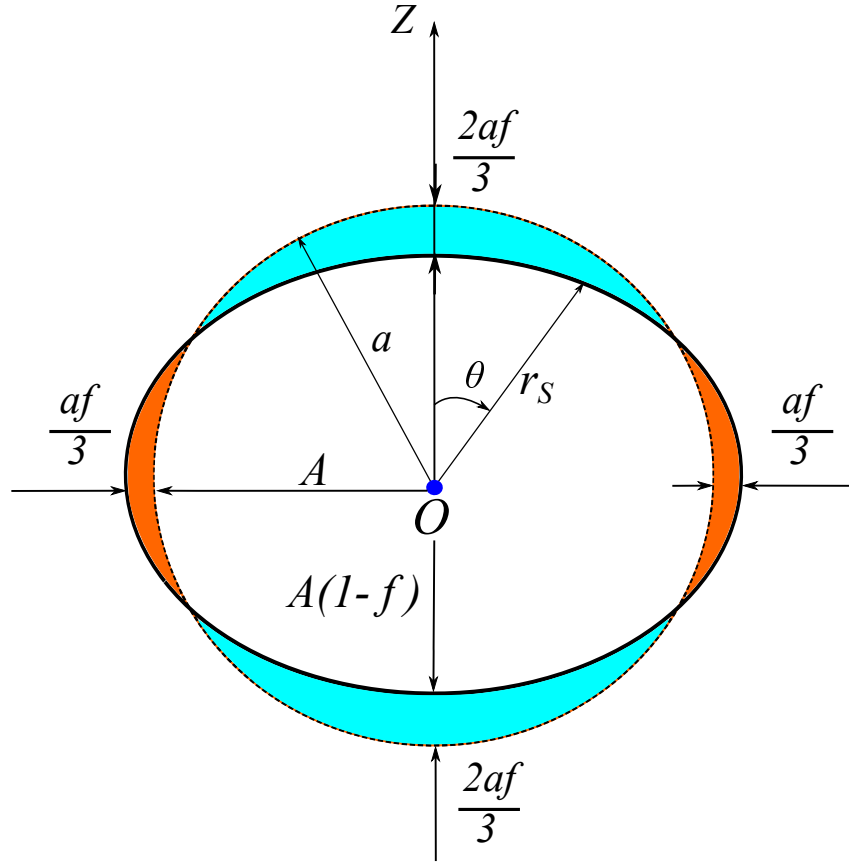


FIGURE 2.7 – Ellipsoïde faiblement aplati vu comme une perturbation d'une sphère. Les parties colorées en orange et en bleu correspondent respectivement à des excès et des défauts de matière par rapport à la sphère dont il faut calculer la contribution gravitationnelle.

Soit r_S le rayon tel que tout point de coordonnées sphériques $(\lambda, \theta, r_S(\lambda, \theta))$ appartiennent à cet ellipsoïde. En exprimant r_S en fonction de Z à l'aide des relations 2.44 et 2.19, il vient :

$$r_S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = A^2 + (1-f)^2 Z^2 = A^2 + (1-f)^2 r_S^2 \cos^2 \theta,$$

soit encore,

$$r_S^2 = \frac{A^2}{1 - (1-f)^2 \cos^2 \theta}.$$

En se limitant aux termes du premier ordre en f , l'équation polaire de l'ellipsoïde étudié s'écrit :

$$r_S(\theta) = A(1 - f \cos^2 \theta). \quad (2.45)$$

Une identification de cette dernière équation avec la relation 2.37 permet alors de déterminer les termes qui contribuent au potentiel gravitationnel 2.43. Plus précisément, il est clair que le potentiel ne comporte aucun terme de degré strictement supérieur à 2, ni de terme de degré 1. De plus, la symétrie de révolution rend le potentiel indépendant de l'angle λ donc le potentiel ne peut contenir de terme d'ordre différent de 0. L'identification doit donc être opérée à partir de la relation suivante :

$$r_S(\theta) = A(1 - f \cos^2 \theta) = a(1 + \varepsilon_2^0 Y_2^0).$$

Sachant que $Y_2^0(\lambda, \theta) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} P_2(\cos \theta) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$, il résulte :

$$A \left(1 - \frac{f}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} f Y_2^0 \right) = a(1 + \varepsilon_2^0 Y_2^0).$$

Par conséquent, au premier ordre en f :

$$a = A \left(1 - \frac{f}{3} \right),$$

$$\varepsilon_2^0 = -\frac{2A}{3a} f \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \approx -\frac{2}{3} f \sqrt{\frac{4\pi}{5}}.$$

Le potentiel gravitationnel de l'ellipsoïde faiblement aplati au point $P(\lambda, \theta, r)$ s'exprime finalement par :

$$V(\theta, r) = \frac{4\pi G \rho_0 a^3}{3r} \left(1 - \frac{2}{5} f \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) \right) \quad \text{avec} \quad a = A \left(1 - \frac{f}{3} \right). \quad (2.46)$$

Le potentiel ainsi déterminé, peut s'interpréter comme celui d'une sphère homogène de masse $M = \frac{4\pi a^3 \rho_0}{3}$, perturbé par un terme de degré 2 proportionnel à l'aplatissement f de l'ellipsoïde. L'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}$ qui en dérive, comporte un composante radiale g_r prépondérante et une composante ortho-radiale g_θ dans la base sphérique ($\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\lambda$). Plus précisément, en posant :

$$\mathbf{g}(\theta, r) = g_r \hat{\mathbf{e}}_r + g_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

il vient en calculant le gradient du potentiel V :

$$g_r(\theta, r) = \partial_r V = -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{6}{5} f \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) \right)$$

$$g_\theta(\theta, r) = \frac{1}{r} \partial_\theta V = +\frac{GM}{r^2} \frac{3}{5} f \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin 2\theta \quad (2.47)$$

Ainsi, sur la sphère de rayon a , la valeur maximale du rapport $|g_\theta/g_r|$ atteint-elle $(3/5)f$. Pour un aplatissement de $1/300$, la composante ortho-radiale ne vaut donc que le 500^e de la composante radiale, ce qui correspond à un écart angulaire de $\mathbf{g}$ par rapport à la direction radiale de $0,11^\circ$. Cet exemple illustre de façon remarquable la petitesse des effets gravitationnels induits par l'aplatissement de la Terre.

2.3.3.2 Cas d'une couche ellipsoïdale faiblement aplatie

Le calcul précédent permet très aisément de déterminer le potentiel et le champ gravitationnels d'une couche de matière homogène, ellipsoïdale, faiblement aplatie (Fig. 2.8). Il suffit pour ce de considérer la couche de matière comprise entre les ellipsoïdes homothétiques de même aplatissement et de demi-grands axes respectifs A et $A(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$ et de densités respectives ρ_0 et $-\rho_0$. La superposition des effets gravitationnels produits par ces deux sources correspond à celui de la couche ellipsoïdale dont l'épaisseur à l'équateur égale αA .

Pour obtenir le potentiel correspondant à l'ellipsoïde de densité $-\rho_0$ et de demi-grand axe $A(1 - \alpha)$, il suffit de remplacer a par $(1 - \alpha)a$ et ρ_0 par $-\rho_0$ dans la relation 2.46. Il vient, tous calculs faits :

$$V_{\text{couche}}(\theta, r) = \frac{GM}{r} \left[1 - (1 - \alpha)^3 - \frac{2}{5} f \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - (1 - \alpha)^2 (1 - \alpha)^3) P_2(\cos \theta) \right].$$

Si, de plus, la couche est mince alors $\alpha \ll 1$ et l'expression du potentiel se ramène à :

$$V_{\text{couche}}(\theta, r) = \alpha \frac{GM}{r} \left(3 - 2 f \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) \right). \quad (2.48)$$

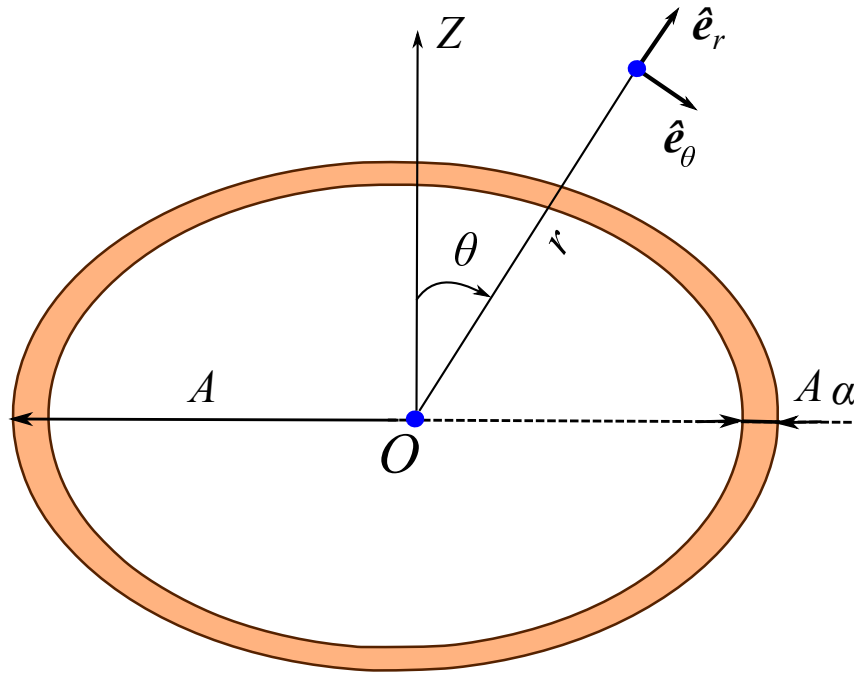


FIGURE 2.8 – Couche ellipsoïdale faiblement aplatie, de densité homogène. L'effet gravitationnel de cette dernière peut être obtenu en ajoutant les contributions dues à deux ellipsoïdes concentriques, homothétiques, de densités ρ_0 et $-\rho_0$, et de demi-grands axes A et $A(1 - \alpha)$ respectivement.

L'expression obtenue est formellement analogue à la relation 2.46, si bien que le champ gravitationnel de la couche ellipsoïdale peut être déterminé en utilisant les relations 2.47 en remplaçant la masse M par $3\alpha M$ et l'aplatissement f par $(5/3)f$. Le facteur α joue le rôle d'un facteur d'atténuation de l'amplitude du potentiel et du champ conséquence du retrait de matière au cœur de l'ellipsoïde. Le rapport entre les composantes radiale et ortho-radiale demeure, en revanche, de l'ordre de l'aplatissement f .

Chapitre 3

Gravimétrie et géodésie dynamique

« (...) Terre, change de forme; et que la pesanteur en abaissant le pôle, élève l'équateur (...) »

Voltaire

Sur la philosophie de Newton
Poème à Émilie du Châtelet, 1736.

DANS son acception courante adoptée au XX^e siècle, le terme gravimétrie désigne une branche de la géophysique interne au même titre que le géomagnétisme ou la sismologie. La seule étymologie du terme gravimétrie (du latin *gravis*, « lourd, qui pèse dans la balance » et *metrum*, « mesure », traduit également en grec par *metron*) ne rend cependant pas compte des diverses activités des gravimétriciens modernes.

Si la mesure de la gravité de la Terre, la recherche de nouvelles méthodes de mesure et la conception d'instruments font partie des tâches classiques du gravimétricien, elles ne doivent pas occulter toutes les recherches menées par la gravimétrie sur la théorie mathématique du champ de gravité et ses applications dans le domaine des sciences de la Terre – géodésie, géophysique, hydrologie, océanographie, glaciologie –, la métrologie physique et la navigation. Ce chapitre présente une revue des applications traditionnelles de la gravimétrie en géodésie dynamique. À partir de raisonnements très simples, il se propose de montrer comment la connaissance de la gravité nous renseigne sur les dimensions et la forme de la Terre. Cette revue s'appuie sur les ouvrages remarquables de STACEY (1969), LEVALLOIS (1970), WAHR (1996) et TURCOTTE et SCHUBERT (2014).

3.1 La Terre « au degré 2 »

L'un des problèmes les plus importants de la gravimétrie consiste en la détermination des surfaces équipotentielles de la pesanteur considérées dès lors comme des figures d'équilibre de la Terre ou utilisées comme des surfaces de niveau de référence. L'essentiel des « ingrédients » nécessaires à une telle détermination peut être mis en évidence à partir d'un modèle simple de la pesanteur développé jusqu'au degré harmonique 2, comprenant seulement les contributions gravitationnelle et centrifuge. En réalité, le modèle au degré 2 explique plus de 90 % de l'aplatissement de la Terre et de l'amplitude des variations spatiales de la pesanteur.

En notant Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre, l'expression du potentiel $V_c(\mathbf{x})$ dont dérive l'accélération centrifuge au point $P(\lambda, \theta, r)$ s'écrit, à une constante additive près :

$$V_c(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta. \quad (3.1)$$

Le potentiel de pesanteur $V_T(\mathbf{x})$ considéré ci-après est défini par :

$$V_T(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + V_c(\mathbf{x}),$$

où $V(\mathbf{x})$ désigne le potentiel gravitationnel.

3.1.1 Potentiel et champ de pesanteur au degré 2

Considérons une Terre en rotation dont la distribution interne de densité $\rho(\mathbf{x}_M)$ possède une symétrie de révolution autour de l'axe (OZ) de sorte que $\rho(\mathbf{x}_M) = \rho(\theta_M, r_M)$, et cherchons un développement en harmoniques sphériques au degré 2 du potentiel de pesanteur extérieur. Il est clair que ce dernier ne peut dépendre de la longitude, ce qui élimine tous les termes d'ordre différent de 0. D'après la relation 2.33, une expression recevable du potentiel gravitationnel extérieur est donnée par :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{B_0^0}{r} Y_0^0(\lambda, \theta) + \frac{B_1^0}{r^2} Y_1^0(\lambda, \theta) + \frac{B_2^0}{r^3} Y_2^0(\lambda, \theta).$$

Il vient, tous calculs faits, en utilisant les résultats rassemblés dans la table 3.1 :

$$B_0^0 = \sqrt{4\pi} G \int_{\text{espace}} \rho(\mathbf{x}_M) d^3 \mathbf{x}_M$$

$$B_1^0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} G \int_{\text{espace}} \rho(\mathbf{x}_M) Z_M d^3 \mathbf{x}_M \quad \text{où} \quad Z_M = r_M \cos \theta_M$$

$$B_2^0 = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} G \int_{\text{espace}} \rho(\mathbf{x}_M) r_M^2 P_2(\cos \theta_M) d^3 \mathbf{x}_M = G \int_{\text{espace}} \rho(\mathbf{x}_M) \frac{3Z_M^2 - r_M^2}{2} d^3 \mathbf{x}_M$$

Le terme B_0^0 est simplement proportionnel à la masse $M_T = \int_{\text{espace}} \rho(\mathbf{x}_M) d^3 \mathbf{x}_M$ de la Terre. Le terme B_1^0 est proportionnel à la coordonnée suivant l'axe (OZ) du centre de gravité de la Terre, obtenue par $\int_{\text{espace}} \rho(\mathbf{x}_M) Z_M d^3 \mathbf{x}_M$. Il est donc nul si l'origine O est confondu avec le

Degré l	$P_l(\cos \theta)$	$Y_l^0(\lambda, \theta)$
0	1	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	$\cos \theta$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_1(\cos \theta)$
2	$\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$\sqrt{\frac{5}{4\pi}} P_2(\cos \theta)$

TABLEAU 3.1 – Relation entre les harmoniques sphériques de surface de degrés 0, 1, et 2, d'ordre 0 et les polynômes de Legendre.

centre de gravité, ce que nous supposons réalisé.

Enfin le terme B_2^0 est lié aux moments d'inertie A , B et C de la Terre par rapport aux axes du repère cartésien géocentrique (OX) , (OY) et (OZ) respectivement. Étant donné la symétrie de révolution, ces derniers coïncident avec les axes d'inertie principaux de la distribution de masse. En remarquant que, si (X_M, Y_M, Z_M) désignent les coordonnées cartésiennes du point M , alors :

$$3 Z_M^2 - r_M^2 = 2 Z_M^2 - X_M^2 - Y_M^2 = (Y_M^2 + Z_M^2) + (X_M^2 + Z_M^2) - 2(X_M^2 + Y_M^2),$$

il vient :

$$B_2^0 = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} G \left(\frac{A+B}{2} - C \right). \quad (3.2)$$

En appelant a le rayon de la sphère moyenne correspondant à la surface de la Terre, le terme B_2^0 peut s'écrire :

$$B_2^0 = -\sqrt{\frac{4\pi}{5}} G M_T a^2 J_2,$$

où J_2 est un terme sans dimension, appelé *facteur de forme dynamique*.

L'hypothèse sur la symétrie de révolution d'axe (OZ) de la distribution de densité implique que cette dernière est invariante par rotation autour de (OZ) , ce qui entraîne l'égalité des moments d'inertie A et B . Le facteur J_2 est donc donné par :

$$J_2 = \frac{C - A}{M_T a^2}. \quad (3.3)$$

Le facteur J_2 ainsi défini, constitue une mesure relative de la différence entre le moment d'inertie de la Terre par rapport à l'axe (OZ) et le moment d'inertie moyen par rapport aux deux autres axes.

L'expression du potentiel de pesanteur extérieur $V_T(\mathbf{x})$ au degré 2 s'obtient en remarquant que le terme centrifuge $V_c(\mathbf{x})$ peut s'exprimer à l'aide du polynôme de Legendre $P_2(\cos \theta)$. En effet, puisque :

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{3} (2 P_2(\cos \theta) + 1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2(\cos \theta),$$

il résulte :

$$V_c(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{3} r^2 \Omega^2 - \frac{1}{3} r^2 \Omega^2 P_2(\cos \theta),$$

et finalement :

$$V_T(\mathbf{x}) = V_T(\theta, r) = \frac{GM_T}{r} + \frac{1}{3} r^2 \Omega^2 - \frac{GM_T}{r^3} a^2 J_2 P_2(\cos \theta) - \frac{1}{3} r^2 \Omega^2 P_2(\cos \theta). \quad (3.4)$$

Les conséquences qui peuvent être tirées de la relation 3.4 sur la figure de la Terre sont nombreuses. Il faut avoir préalablement les valeurs numériques des paramètres physiques constitués par la masse de la Terre M_T – ou le produit GM_T , le facteur de forme dynamique J_2 , la vitesse angulaire de rotation de la Terre Ω et le rayon a .

Considérons, par exemple, les valeurs des paramètres physiques de la Terre utilisées dans le système de référence moderne baptisé Geodetic Reference System 1980 (GRS 80) (MORITZ, 2000), et rassemblées dans la table 3.2. Lorsque r est voisin de a , les termes $\frac{1}{3} r^2 \Omega^2$ et $\frac{GM_T}{r^3} a^2 J_2$ sont du premier ordre comparés à $\frac{GM_T}{r}$ puisqu'il vient numériquement :

$$\frac{\frac{1}{3} a^2 \Omega^2}{\frac{GM_T}{a}} = \frac{a \Omega^2}{3 \frac{GM_T}{a^2}} \approx \frac{1}{867} \approx 1,15 \times 10^{-3},$$

et

$$\frac{\frac{GM_T}{a^3} a^2 J_2}{\frac{GM_T}{a}} = J_2 \approx 1,08 \times 10^{-3}.$$

L'expression 3.4 du potentiel comprend donc :

- un terme prépondérant indépendant de la direction :

$$V_T^0(r) = \frac{GM_T}{r} + \frac{1}{3} r^2 \Omega^2; \quad (3.5)$$

- un terme perturbateur $\delta V_T(\theta, r) = V_T(\theta, r) - V_T^0(r)$ qui dépend de la direction, puisque donné par :

$$\delta V_T(\theta, r) = -\frac{GM_T}{r^3} a^2 J_2 P_2(\cos \theta) - \frac{1}{3} r^2 \Omega^2 P_2(\cos \theta). \quad (3.6)$$

Ensuite, il est clair que la surface $r = a$, autrement dit la sphère de rayon a , est proche d'une équipotentielle dont la valeur est GM_T/a . L'écart de cette dernière avec la surface de la sphère vient des termes perturbateurs $\frac{1}{3} r^2 \Omega^2$ et $\delta V_T(\theta, r)$. La détermination de l'équipotentielle la plus proche peut être menée en considérant, pour chaque point $P(\theta, \lambda, r)$ de l'équipotentielle, la différence $\delta r(\theta) = r - a$ supposée infinitésimale. Le terme perturbateur δr doit être déterminé de sorte que, pour tout angle θ , la valeur $V_T(\theta, a + \delta r(\theta))$ du potentiel de pesanteur soit indépendante de θ . Il en résulte, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, l'équation polaire du terme perturbateur δr :

$$\delta r(\theta) = -a \left(J_2 + \frac{\Omega^2 a}{3 g_a} \right) P_2(\cos \theta), \quad (3.7)$$

avec

$$g_a = \frac{GM_T}{a^2}. \quad (3.8)$$

<i>Valeurs numériques admises par définition</i>			
Paramètre	Notation	Valeur	Unité
Constante gravitationnelle (atmosphère incluse)	GM_T	$3\,986\,005 \times 10^8$	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
Vitesse angulaire de rotation	Ω	$7\,292\,115 \times 10^{-11}$	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Facteur de forme dynamique (Déformation permanente de marée exclue)	J_2	$108\,263 \times 10^{-8}$	sans dimension
<i>Valeurs numériques dérivées</i>			
Paramètre	Notation	Valeur	Unité
Rayon moyen	a	6 371 008,7714	m

TABLEAU 3.2 – Valeurs numériques des paramètres physiques de la Terre utilisées dans le système de référence GRS 80 (MORITZ, 2000).

Cette expression de $\delta r(\theta)$ est de valeur moyenne nulle sur la sphère de sorte que l'équipotentielle moyenne coïncide avec la sphère de rayon a .

L'équation polaire de l'équipotentielle cherchée dans un plan méridien de la sphère peut donc s'écrire :

$$r(\theta) = a \left(1 - \frac{2}{3} f P_2(\cos \theta) \right) = a \left(1 + \frac{f}{3} \right) (1 - f \cos^2 \theta), \quad (3.9)$$

où le paramètre f s'exprime par :

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m \quad (3.10)$$

avec :

$$m = \frac{\Omega^2 a}{g_a}. \quad (3.11)$$

L'équation 3.9 représente un ellipsoïde de révolution faiblement aplati, d'axe (OZ), d'aplatissement f (cf Chap. 2, Éq. 2.45, p. 31), de demi-grand axe $a(1 + f/3)$ et de demi-petit axe $a(1 - 2f/3)$. La différence entre le demi-grand axe et le demi-petit axe égale donc exactement af .

L'équipotentielle correspondant à la valeur GM_T/a est donc la surface d'un ellipsoïde de révolution dont l'aplatissement f dépend du facteur J_2 et du rapport m entre l'accélération centrifuge à l'équateur $\Omega^2 a$ sur la sphère de rayon a et l'accélération gravitationnelle g_a sur sa surface.

À partir des valeurs du système de référence GRS 80, il vient numériquement :

$$m = \frac{1}{289,87};$$

$$f = \frac{1}{298,61};$$

$$af = 21\,359 \text{ m.}$$

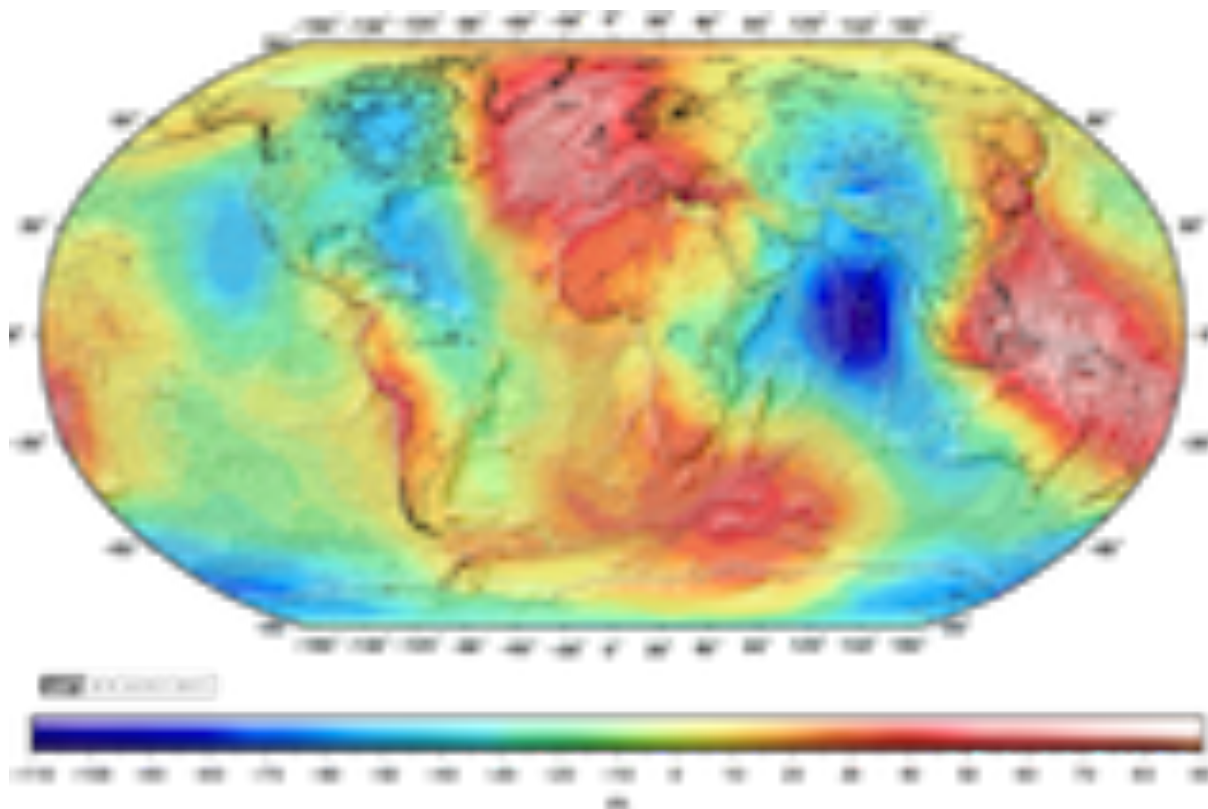


FIGURE 3.1 – Carte de l'ondulation du géoïde mondial ($0,1^\circ \times 0,1^\circ$) par rapport à l'ellipsoïde équipotentiel du modèle GRS 80. Ces données indiquent que les valeurs de l'ondulation varient entre $-107,4$ m et $+85,4$ m avec un écart quadratique moyen de $30,6$ m. Les ondulations positives de plus grande amplitude sont localisées dans au nord de l'Océan Atlantique et au sud-ouest de l'Océan Pacifique. Les ondulations négatives les plus fortes en valeur absolue, se situent dans l'Océan Indien au sud de l'Inde. Ces ondulations ont été calculées à partir du modèle global de champ nommé Earth Gravitational Model 2008 (EGM 2008) (PAVLIS et al., 2008), à l'aide du calculateur en ligne proposé par le « centre international pour les modèles globaux de gravité de la Terre » (International Centre for Global Earth Models (ICGEM)) (BARTHELMES et KÖHLER, 2012). Ce centre est l'un des six centres scientifiques dédiés à l'étude du champ de gravité proposés par le Service International pour le champs de gravité (International Gravity Field Service (IGFS)), soutenu par l'Association Internationale de Géodésie (International Association of Geodesy (IAG)). Les données topographiques qui ont servi à la réalisation de l'ombrage, sont issues du modèle global ETOPO1 (AMANTE et EAKINS, 2009) diffusé par L'Agence américaine d'observation océanique et atmosphérique (National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA)).

Carte produite à l'aide du logiciel The Generic Mapping Tools (GMT) (WESSEL et al., 2013).

Sur les 21,4 km de raccourcissement entre le rayon polaire et rayon équatorial de cet ellipsoïde, 11,0 km (51,5 %) viennent de l'accélération centrifuge et 10,4 km (48,5 %), du facteur de forme dynamique.

La valeur numérique obtenue pour l'aplatissement pour f ($\approx 1/298,61$) dans le cadre de ce modèle diffère de seulement 0,12 % de celle calculée dans le système de référence GRS 80 ($\approx 1/298,26$), ce qui entraîne une différence de 26 m sur les 21 km de raccourcissement entre l'équateur et les pôles. Cette différence vient de ce que le modèle de pesanteur utilisé dans le système de référence GRS 80 est d'un ordre d'approximation supérieur à celui utilisé ici, ce qui se traduit par la prise en compte d'un terme du second ordre en f dans l'équation 3.9. Le modèle de champ de pesanteur utilisé dans GRS 80, très souvent employé comme référence, est appelé *champ de la pesanteur normale* (HOFMANN-WELLENHOF et MORITZ, 2005).

L'écart maximum observé entre l'ellipsoïde équipotentiel de la pesanteur normale et l'équipotentielle de la pesanteur réelle (Fig. 3.1) atteint environ 100 m, c'est-à-dire 0,5 % du raccourcissement pôle/équateur. Ainsi est-il possible de considérer que 99,5 % de la figure d'équilibre de la Terre peut être expliquée par le modèle de la pesanteur normale.

Enfin, la surface de l'équipotentielle GM_T/a correspond aussi à la surface d'équilibre des liquides qui couvrent la Terre considérée, en constituant ainsi une figure d'équilibre appelée *géoïde*. La quantité δr mesure, pour une direction radiale donnée, l'écart entre la surface du géoïde et celle de la sphère de rayon a . D'après les relations 3.6, 3.7 et 3.8, il vient :

$$\delta V_T(\theta, r) = -a g_a \left(\frac{a^3}{r^3} J_2 + \frac{\Omega^2 r^2}{3 a g_a} \right) P_2(\cos \theta)$$

et

$$\delta r(\theta) = -a \left(J_2 + \frac{\Omega^2 a}{3 g_a} \right) P_2(\cos \theta),$$

d'où il résulte :

$$\delta r(\theta) = \frac{\delta V_T(\theta, r = a)}{g_a}. \quad (3.12)$$

Cette relation constitue l'*équation de Bruns*. Elle montre dans le cadre de ce modèle simple que la détermination du géoïde peut être réalisée à partir de la connaissance de la perturbation du potentiel δV_T et du champ gravitationnel g_a sur la surface moyenne de la Terre. Le terme δV_T se mesure directement par gravimétrie satellitaire et indirectement à partir de mesures gravimétriques de surface.

3.1.2 Principe du calcul d'un modèle de géoïde

La connaissance du potentiel de pesanteur par la relation 3.4 permet le calcul du *champ de pesanteur* $\mathbf{g}_T(\mathbf{x}) = -\vec{\nabla} V_T$ au point $P(\lambda, \theta, r)$, qui s'exprime en coordonnées sphériques par :

$$\mathbf{g}_T(\mathbf{x}) = g_r(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{e}}_r + g_\theta(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{e}}_\theta + g_\lambda(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{e}}_\lambda, \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} g_r(\mathbf{x}) &= \partial_r V_T; \\ g_\theta(\mathbf{x}) &= \frac{1}{r} \partial_\theta V_T; \\ g_\lambda(\mathbf{x}) &= \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\lambda V_T. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Le potentiel V_T ne dépend pas de la longitude, donc $\mathbf{g}_T(\mathbf{x}_P)$ n'a pas de composante suivant $\hat{\mathbf{e}}_\lambda$ ($g_\lambda(\mathbf{x}) = 0$). L'intensité $g_{\text{géol}}(\theta)$ de la pesanteur sur le géoïde est déterminée en calculant la norme euclidienne du vecteur $\mathbf{g}_T(\mathbf{x})$ par :

$$g_{\text{géol}}(\theta) = \sqrt{g_r^2(\theta, r = a + \delta r) + g_\theta^2(\theta, r = a + \delta r)}, \quad (3.15)$$

qui, une fois développée au premier ordre en δr , conduit à :

$$g_{\text{géol}}(\theta) = \frac{GM_T}{a^2} - \frac{2}{3}a\Omega^2 + \underbrace{\left(\frac{2}{3}a\Omega^2 - 3\frac{GM_T}{a^2}J_2 \right) P_2(\cos\theta) - \frac{2GM_T}{a^3}\delta r}_{\delta g_T(\theta)}. \quad (3.16)$$

Dans l'expression de $g_{\text{géol}}(\theta)$, le terme $\delta g_T(\theta)$ qui varie avec la direction, ne dépend en définitive que de la perturbation du potentiel; plus précisément, avec les relations 3.6 et 3.12, il vient :

$$\delta g_T = \underbrace{\left(\frac{2}{3}a\Omega^2 - 3g_a J_2 \right) P_2(\cos\theta) - \frac{2}{a}g_a}_{-\partial_r \delta V_T(\theta, r=a)} \underbrace{\delta r}_{\delta V_T(\theta, r=a)/g_a} = - \left(\partial_r \delta V_T + \frac{2}{a} \delta V_T \right)_{r=a}. \quad (3.17)$$

La relation 3.17, appelée *équation fondamentale de la gravimétrie*, permet de relier la perturbation de potentiel δV_T à la perturbation de pesanteur δg_T par une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. Elle permet d'envisager le calcul du terme δr à partir de valeurs de la pesanteur sur le géoïde, selon le schéma de calcul suivant :

$$g_{\text{géol}}(\theta) \xrightarrow{\text{partie angulaire}} \delta g_T(\theta) \xrightarrow{\text{équation fondamentale}} \delta V_T(\theta, r = a) \xrightarrow{\text{équation de Bruns}} \delta r(\theta).$$

En réalité, l'accès aux valeurs de la pesanteur sur le géoïde s'effectue indirectement à partir de mesures gravimétriques réalisées sur la surface topographique réelle de la Terre. Il faut donc opérer un prolongement des mesures depuis la surface de la Terre jusqu'au géoïde. Cette opération nécessite le choix d'un modèle des variations de la pesanteur depuis le géoïde jusqu'au point de mesure, et une mesure effective de la distance qui sépare le géoïde de l'équipotentielle passant par le point de mesure. Cette dernière provient du *nivellement* de la surface topographique qui permet de déterminer l'*altitude orthométrique* du point de mesure.

Si $H(\theta, r)$ désigne l'altitude du point de mesure et $g_{\text{topo}}(\theta, r)$, la mesure de l'intensité de la pesanteur en ce point et sachant que $H \ll a$, il est légitime de poser :

$$g_{\text{géol}}(\theta) \approx g_{\text{topo}}(\theta, r) - H(\theta, r) \partial_r g_{\text{topo}}(\theta, r), \quad (3.18)$$

où $\partial_r g_{\text{topo}}(\theta, r)$ est la composante du gradient de g_{topo} suivant la direction radiale.

Étant donné que les variations radiales de g_{topo} restent proches de celles observables sur la sphère moyenne, il vient :

$$\partial_r g_{\text{topo}}(\theta, r) \approx -\frac{2GM_T}{r^3} \approx -\frac{2GM_T}{a^3} \approx -\frac{2}{a} g_{\text{topo}}(\theta, r).$$

Une relation approximative de prolongement des valeurs de la pesanteur en surface s'écrit alors :

$$g_{\text{géol}}(\theta) \approx g_{\text{topo}}(\theta, r) \left(1 + 2 \frac{H(\theta, r)}{a} \right). \quad (3.19)$$

Cette relation utilise explicitement les valeurs de l'altitude H et illustre l'importance des mesures de nivellement associées à celles de la pesanteur.

3.1.3 Aplatissement dynamique

Examinons à présent les variations dans l'espace de l'intensité de la pesanteur sur le géoïde $g_{\text{géo}}$. D'après les équations 3.16 et 3.7, il vient :

$$g_{\text{géo}}(\theta) = g_a - \frac{2}{3} a \Omega^2 + \frac{2}{3} g_a \left(2 \frac{a \Omega^2}{g_a} - \frac{3}{2} J_2 \right) P_2(\cos \theta).$$

L'aplatissement dynamique f_g de la Terre dans le cadre de ce modèle (cf Éq. 1.7) se détermine à partir de la relation :

$$f_g = \frac{g_p - g_e}{g_e} = \frac{g_{\text{géo}}(\theta = 0) - g_{\text{géo}}(\theta = \pi/2)}{g_{\text{géo}}(\theta = \pi/2)}, \quad (3.20)$$

avec :

$$\begin{cases} g_p = g_{\text{géo}}(\theta = 0) = g_a + \frac{2}{3} a \Omega^2 - g_a J_2, \\ g_e = g_{\text{géo}}(\theta = \pi/2) = g_a - \frac{4}{3} a \Omega^2 + \frac{1}{2} g_a J_2. \end{cases}$$

Il en résulte au premier ordre :

$$f_g = 2 \frac{a \Omega^2}{g_a} - \frac{3}{2} J_2 = 2m - \frac{3}{2} J_2. \quad (3.21)$$

Puisque $J_2 = \frac{1}{3} (2f - m)$ (cf Éq. 3.10), l'expression de f_g au premier ordre, en fonction de l'aplatissement géométrique f , devient :

$$f_g = -f + \frac{5}{2} m. \quad (3.22)$$

Cette relation est due à Clairaut. Elle stipule que la forme de la Terre est liée aux variations de son champ de gravité au sens où tout accroissement (resp. diminution) de l'aplatissement de la Terre entraîne une diminution (resp. un accroissement) de son aplatissement dynamique.

En exprimant la pesanteur sur le géoïde en fonction de $\cos \theta$, il vient une relation formellement analogue à celle donnant $r(\theta)$ (cf Éq. 3.9) qui s'écrit :

$$g_{\text{géo}}(\theta) = g_a - \frac{4}{3} a \Omega^2 + \frac{1}{2} g_a J_2 + g_a f_g \cos^2 \theta,$$

soit, finalement :

$$g_{\text{géo}}(\theta) = g_e \left(1 + \frac{g_a f_g}{g_e} \cos^2 \theta \right). \quad (3.23)$$

Cette relation indique que la variation de la pesanteur entre l'équateur et les pôles est positive ($g_p - g_e > 0$), égale à $g_a f_g$.

À partir des valeurs du système de référence GRS 80, il vient numériquement :

$$g_a = 9,8202 \text{ m.s}^{-2};$$

$$g_p = 9,8322 \text{ m.s}^{-2};$$

$$g_e = 9,7804 \text{ m.s}^{-2};$$

$$f_g = \frac{1}{189,55};$$

$$g_a f_g = 0,0518 \text{ m.s}^{-2}.$$

La différence des valeurs de la pesanteur entre les pôles et l'équateur est donc égale à $5,18 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$, c'est-à-dire 5,18 Gal. La relation 3.21 indique que la seule prise en compte du terme centrifuge (m) conduirait à une variation de la pesanteur plus forte égale à 6,77 Gal. Le terme en J_2 permet de réduire cette valeur de 1,59 Gal, soit 24 %. Ainsi, la variation entre le pôle et l'équateur de la pesanteur sur une Terre ellipsoïdale, est-elle diminuée d'environ un quart comparée à celle observée sur une Terre sphérique.

En fait, la plus forte variation de la pesanteur observable à la surface de la Terre est justement celle mesurable entre les pôles et l'équateur. La carte représentée sur la figure 3.2 indique les écarts de la pesanteur réelle par rapport à son modèle de degré 2. Globalement, les variations crête-à-crête de ces écarts n'excèdent pas 400 mGal, c'est-à-dire environ 8 % de la variation de pesanteur pôle/équateur. Le modèle au degré 2 explique donc 92 % des variations spatiales de la pesanteur à la surface de la Terre. Cette constatation montre que la gravimétrie consiste essentiellement à mesurer et interpréter des « petites variations » voire des perturbations de la pesanteur.

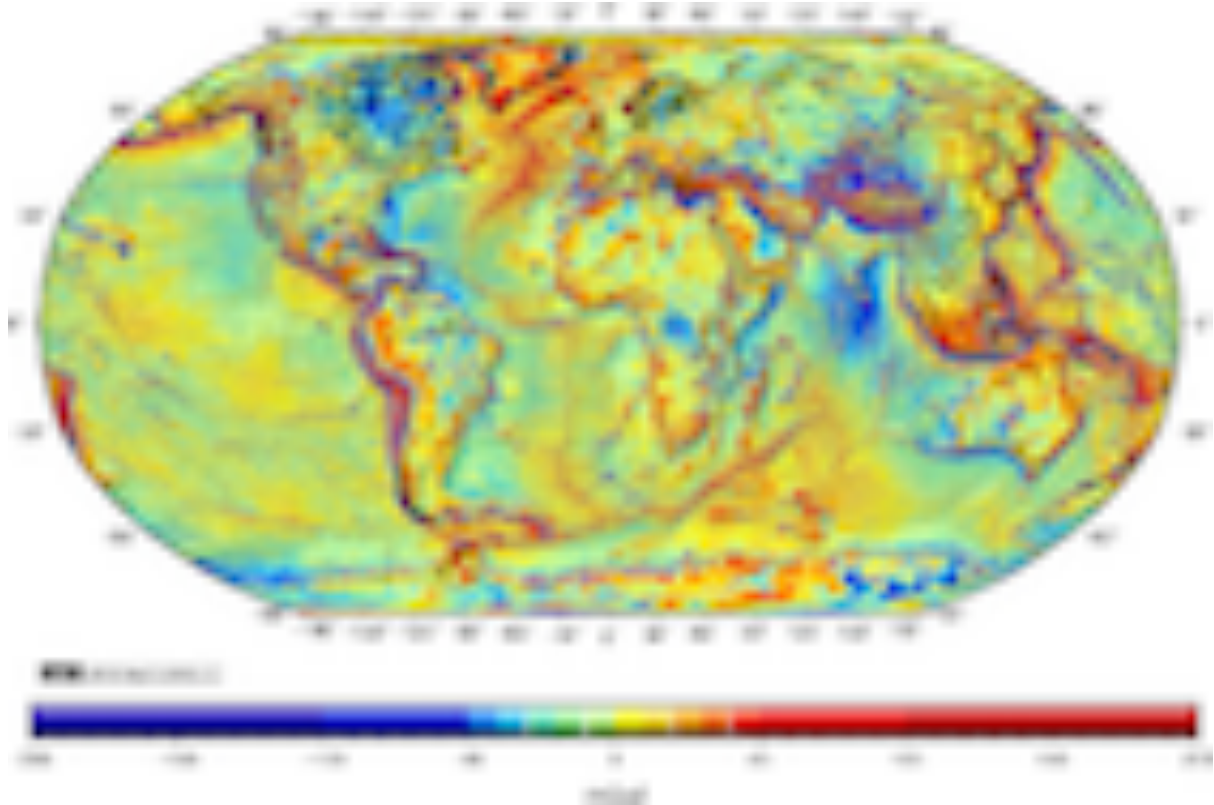


FIGURE 3.2 – Carte de l'anomalie à l'air libre publiée dans le cadre du projet World Gravity Map 2012 (WGM2012) (BONVALOT et al., 2012) par le Bureau Gravimétrique International (BGI) d'après les travaux de BALMINO et al. (2012). Nous verrons à la section 4.1 du chapitre 4, que l'anomalie à l'air libre peut s'interpréter comme une différence de la pesanteur réelle avec celle donnée par un modèle au degré 2. La corrélation de l'anomalie à l'air libre avec la topographie apparaît clairement. L'amplitude crête-à-crête des variations de cette anomalie ne dépasse pas 400 mGal sur la Terre entière.

Carte produite à l'aide du logiciel GMT.

3.1.4 L'ellipsoïde, meilleure seconde approximation de la figure de la Terre

Le modèle de degré 2 le plus largement répandu pour décrire le champ de pesanteur terrestre est celui de la pesanteur normale. La table 3.3 indique très clairement que le raffinement obtenu dans ce modèle par la prise en compte de termes d'ordre supérieur à 1, n'excède pas 1 %.

Paramètre	Expression	Valeur	Valeur dans GRS 80	Écart relatif
Aplatissement géométrique	$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m$	1/298,61	1/289,26	0,12 %
Aplatissement dynamique	$f_g = -\frac{3}{2} J_2 + 2 m$	1/189,55	1/188,59	0,51 %

TABLEAU 3.3 – Comparaison des valeurs des aplatissements obtenues avec la théorie au premier ordre en f et f_g développée ici et la théorie de la pesanteur normale utilisée dans le système de référence GRS 80. Les écarts relatifs donnent respectivement 26 m sur 21 km d'aplatissement géométrique et 26 mGal sur les 5 Gal de variations pôle/équateur.

À titre d'illustration, nous donnons, ci-après, les caractéristiques de l'ellipsoïde équipotentiel dans le système de référence GRS 80 (cf Tab. 3.4), adopté lors de la XVII^e assemblée de l'Union Internationale de Géodésie et Géophysique (International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) General Assembly; Canberra, Australia, December 1979). Ces dernières ont été publiées dans MORITZ (2000). Nous donnons également la formule de la pesanteur normale (cf Tab. 3.5 et Éq. 3.24), associée à ce système de référence. Nous considérerons dorénavant ce modèle comme celui donnant la meilleure seconde approximation de la figure de la Terre et des variations spatiales de sa pesanteur.

Paramètre	Notation	Valeur	Unité	Nature
Demi-grand axe	a	6 378 137	m	Valeur de définition
Demi-petit axe	b	6 356 752,3141	m	Valeurs dérivées
Aplatissement	f	0,003 352 810 681 18	sans dim.	
Potentiel	U_0	6 263 686,0850 × 10	m ² s ⁻²	

TABLEAU 3.4 – Valeurs numériques des paramètres de l'ellipsoïde équipotentiel du système de référence GRS 80 (MORITZ, 2000). Le demi-grand axe de l'ellipsoïde a constitue, avec les paramètres GM_T , J_2 et Ω , les seuls paramètres de la pesanteur normale dont les valeurs sont posées par définition. Toutes les autres grandeurs en découlent.

Paramètre	Notation	Valeur	Unité
Pesanteur à l'équateur	γ_e	9,780 326 7715	ms^{-2}
Pesanteur aux pôles	γ_p	9,832 186 3685	ms^{-2}
Aplatissement dynamique	f_g	0,005 302 440 112	sans dim.
Facteur « m »	m	0,003 449 786 003 08	sans dim.

TABLEAU 3.5 – Valeurs numériques des paramètres de la pesanteur normale dans le système de référence GRS 80 (MORITZ, 2000).

Pesanteur normale à la colatitude θ

La relation 3.24 a été calculée à partir du développement en série selon les puissances croissantes de $\cos\theta$, de la formule de Pizzetti (PICK et al., 1973). Le développement réalisé jusqu'à la puissance 10 permet de garantir que le premier terme négligé est de l'ordre de $10^{-3} \mu\text{m.s}^{-2}$ soit 10^{-4} mGal .

$$\begin{aligned} \gamma_0(\theta) = \gamma_e (& 1 + 0,005\,350\,437\,27 \cos^2 \theta \\ & - 0,000\,048\,455\,90 \cos^4 \theta \\ & + 0,000\,000\,463\,30 \cos^6 \theta \\ & - 0,000\,000\,004\,59 \cos^8 \theta \\ & + 0,000\,000\,000\,03 \cos^{10} \theta). \end{aligned} \quad (3.24)$$

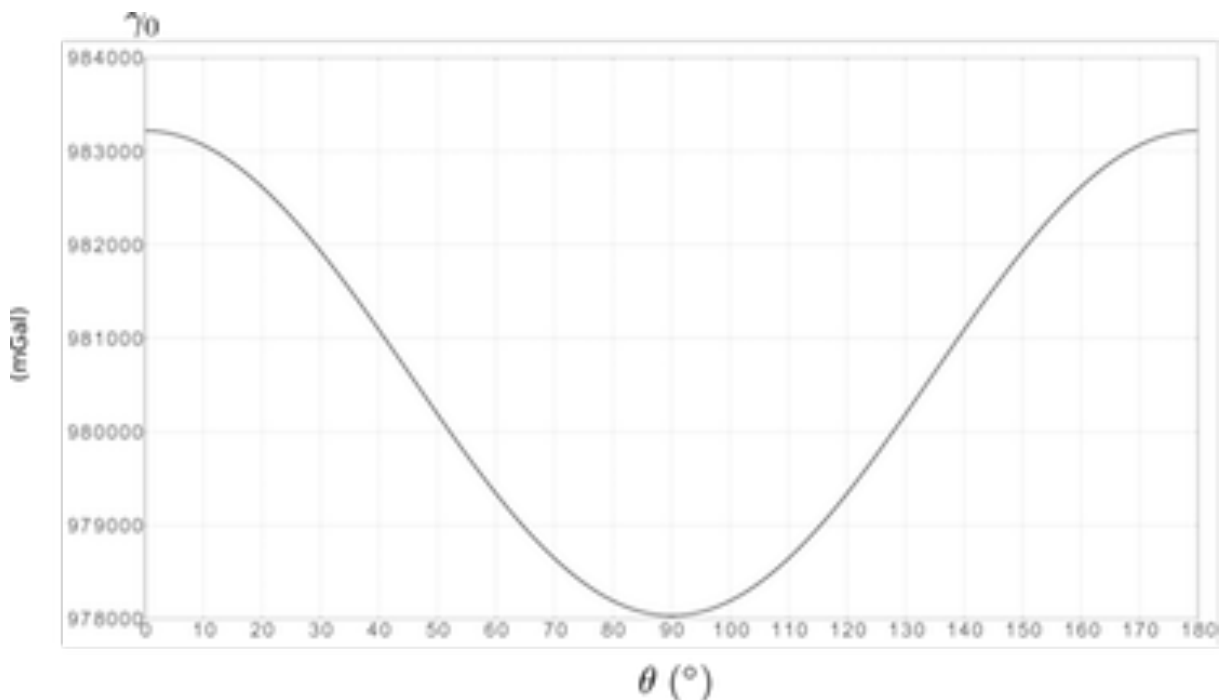


FIGURE 3.3 – Graphe représentant les variations de la pesanteur normale le long d'un méridien depuis le pôle nord jusqu'au pôle sud.

Une approximation plus fine de la pesanteur réelle est obtenue en tenant compte de l'effet gravitationnel de l'atmosphère à l'altitude du point considéré. Le principe du calcul revient à prendre en compte la masse atmosphérique dans la détermination du géoïde. MORITZ (2000) propose d'ajouter à la pesanteur mesurée une correction atmosphérique qui décroît avec l'altitude, égale à 0,87 mGal au niveau du sol et nulle au-dessus de 34 km d'altitude.

3.2 Modèles plus réalistes de la figure de la Terre

Avant de s'intéresser à des modèles plus raffinés de la figure de la Terre, il convient de s'interroger sur les causes physiques qui font de l'ellipsoïde de révolution aplati aux pôles et après la sphère, la surface de meilleure approximation de la figure de la Terre. L'explication de ce phénomène a été rendue possible grâce à une équation établie au XVIII^e siècle : *l'équation de Clairaut*.

3.2.1 Interprétation physique du potentiel au degré 2

Les hypothèses de l'équation de Clairaut sont très simples : la Terre est considérée comme une sphère fluide susceptible de se déformer dont la distribution de densité est à symétrie sphérique $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r)$, $r < a$. Elle est supposée mise en rotation autour de l'axe $\hat{\mathbf{e}}_Z$ à la vitesse angulaire Ω . En outre, l'accélération centrifuge est supposée très inférieure à l'accélération résultant de l'attraction gravitationnelle.

La question posée est celle de l'évolution de la distribution de densité après la mise en rotation, une fois l'équilibre hydrostatique établi. Étant donné la petitesse de l'accélération centrifuge, il est clair que les surfaces d'égale densité sont approximativement des sphères. La recherche des nouvelles figures d'équilibre peut donc être réalisée à partir d'une perturbation infinitésimale de la surface d'une sphère. Plus précisément, si r_0 désigne le rayon d'une sphère d'égale densité avant la mise en rotation, alors le rayon vecteur $\mathbf{r}$ qui amène sur le point de la surface d'équilibre de la Terre en rotation, a une norme $r = \|\mathbf{r}\|$ donnée par la décomposition en harmoniques sphériques suivante :

$$r = r_0 \left(1 - \frac{2}{3} \sum_{l=0}^{+\infty} \varepsilon_l(r_0) P_l(\cos\theta) \right), \quad \text{où } \varepsilon(r_0) \ll 1. \quad (3.25)$$

L'absence de termes d'ordre différent de zéro implique que la nouvelle distribution de densité présente une symétrie de révolution autour de l'axe dirigé par $\hat{\mathbf{e}}_Z$. La détermination de r dans toutes les directions d'un plan méridien – c'est-à-dire pour tout $\theta \in]0, \pi[$ – revient à trouver les coefficients $\varepsilon_l(r_0)$ pour tout rayon r_0 et tout degré l . La condition d'équilibre hydrostatique implique que les surfaces d'égale densité coïncident en tout point avec les surfaces équipotentielle de pesanteur. Le problème se ramène donc à la recherche de l'équation polaire des équipotentielles « $V_T(r(\theta)) = \text{cste}$ » à partir de l'équation 3.25.

La résolution du problème montre que les coefficients $\varepsilon_l(r_0)$ satisfont des équations intégrales différentielles impliquant la distribution de densité $\rho(r)$. En se limitant au degré harmonique 2 et compte tenu de la symétrie de révolution, l'équation de r déduite de la relation 3.25 s'écrit :

$$r = r_0 \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon_2(r_0) P_2(\cos\theta) \right). \quad (3.26)$$

Dans ce cas, le coefficient $\varepsilon_2(r_0)$ vérifie l'équation différentielle de Clairaut :

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{5} \pi G \left[\frac{1}{r_0^3} \int_0^{r_0} \rho(r') r'^4 \left(5\varepsilon_2(r') + r' \frac{d\varepsilon_2}{dr'} \right) dr' \right. \\ & \quad \left. + r_0^2 \int_{r_0}^a \rho(r') \frac{d\varepsilon_2}{dr'} dr' \right. \\ & \quad \left. - 5 \frac{\varepsilon_2(r_0)}{r_0} \int_0^{r_0} \rho(r') r'^2 dr' \right] = \Omega^2 r_0^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Une forme plus simple est obtenue après avoir multiplié chaque membre de l'équation précédente par r_0^3 et dérivé par rapport à r_0 , puis multiplié à nouveau chaque membre de l'équation obtenue par r_0^{-4} et dérivé une seconde fois par rapport à r_0 :

$$\bar{\rho}(r_0) \frac{d^2 \varepsilon_2}{dr_0^2} + \frac{6\rho(r_0)}{r_0} \frac{d\varepsilon_2}{dr_0} + \frac{6\varepsilon_2(r_0)}{r_0^2} (\rho(r_0) - \bar{\rho}(r_0)) = 0, \quad (3.28)$$

$$\text{avec } \bar{\rho}(r_0) = \frac{3}{r_0^3} \int_0^{r_0} \rho(r') r'^2 dr'.$$

Cette dernière équation est utilisée pour déterminer la forme générale de la solution $\varepsilon_2(r_0)$ de l'équation de Clairaut étant donné une distribution de densité. La solution est ensuite définitivement fixée par les conditions aux limites en utilisant notamment l'équation 3.27.

En supposant une distribution uniforme de densité $\rho(r) = \rho_0$, $r < a$, la résolution de l'équation de Clairaut conduit à :

$$\varepsilon_2(r_0) = \frac{15}{16} \frac{\Omega^2}{\pi \rho_0 G}. \quad (3.29)$$

Ce résultat indique, en particulier, que l'équipotentielle de surface obtenue avec $\varepsilon_2(r_0 = a)$ est la surface d'un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles – puisque $\varepsilon_2(r_0 = a) > 0$ –, d'aplatissement f_H donné par :

$$\begin{aligned} f_H = \varepsilon_2(r_0 = a) &= \frac{5}{4} \frac{3}{4\pi} \frac{\Omega^2}{\rho_0 G} \quad \text{avec} \quad \rho_0 = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi a^3}, \quad \text{d'où} \\ f_H &= \frac{5}{4} \frac{\Omega^2 a^3}{G M_T} = \frac{5}{4} m. \end{aligned} \quad (3.30)$$

La forme de l'équipotentielle de surface n'est pas remise en cause dans le cas d'une distribution de densité à symétrie de révolution ; les surfaces équipotentielles sont alors des ellipsoïdes de révolution concentriques dont les aplatissements vont en croissant du centre de la Terre vers la surface.

La théorie de Clairaut explique de façon remarquable la forme ellipsoïdale aplatie aux pôles de la figure d'équilibre de la Terre. En revanche, les valeurs de l'aplatissement f_H de l'équipotentielle de surface dépendent très fortement du modèle choisi pour décrire la distribution de densité. Étant donné les modèles actuels de distribution de densité issus de la sismologie, la valeur admise comme meilleure estimation de l'aplatissement selon l'équation de Clairaut est de 1/299,7, c'est-à-dire inférieure de 0,5 % comparée à celle obtenue

par les mesures satellitaires – égale à $1/298,26$ –. Le désaccord est également confirmé par la mesure de la période du mouvement de précession de la Terre – ≈ 26000 ans – qui permet une estimation de la variation relative f_d des moments d'inertie principaux de la Terre, également appelée *ellipticité dynamique*. En effet, cette dernière s'exprime par :

$$f_d = \frac{C - A}{C}. \quad (3.31)$$

La valeur observée de f_d est $1/304,437$. Dans le cadre de la théorie hydrostatique de Clairaut, la relation liant f_d et f_H s'écrit :

$$f_d = \frac{f_H - \frac{1}{2}m}{1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{m}{f_H} - 1}. \quad (3.32)$$

Cette relation étant indépendante de la densité, il est possible d'ajuster les modèles de distribution de densité de sorte que l'estimation de l'aplatissement f_H coïncide avec la valeur observée. La détermination de f_d par l'équation 3.32 fournit alors une valeur inférieure à 0,5 % de la valeur observée. La même démarche menée en fixant réciproquement f_d à sa valeur observée, donnerait une valeur de l'aplatissement f_H qui s'écarterait de 0,7 % par défaut de la valeur observée.

Les différences entre les valeurs observées de l'ellipticité dynamique f_d et de l'aplatissement f avec celles prédites par la théorie hydrostatique de Clairaut, indiquent que le comportement rhéologique de la Terre s'écarte de celui d'un fluide en rotation et maintenu en équilibre hydrostatique. La Terre est « plus aplatie » que ne le prévoit la théorie de Clairaut. De plus, cet effet est décelable dès le degré 2 des développements en harmoniques sphériques des grandeurs physiques étudiées – potentiel de pesanteur et rayon vecteur $\mathbf{r}$ des équipotentielles –. Il est vraisemblable qu'il existe au sein de l'écorce terrestre des contraintes non hydrostatiques qui pourraient prendre place dans des zones statiques à forte viscosité ou provenir de processus dynamiques de convection. Les partisans de la première hypothèse pensent que l'aplatissement de la Terre aurait été plus fort dans le passé et tendrait à diminuer suite au ralentissement de la rotation terrestre. Cette diminution s'effectuerait avec un retard dû à la viscosité du manteau, expliquant ainsi l'excès d'aplatissement encore observé actuellement.

L'existence de mouvements de convection de matière dans le manteau, associées à des variations latérales de la température entraînant celles de la densité, est une hypothèse séduisante. Ce sont ainsi des cellules de convection qui pourraient entraîner les plaques lithosphériques dans leur mouvement, apparaissant comme le moteur de la tectonique des plaques. Ce phénomène suscite un grand nombre de questions relatives à la géophysique interne telle, par exemple, l'estimation de la taille des cellules de convection, qui doit être reliée aux longueurs d'onde des ondulations des équipotentielles. Sur ce point précis, l'enjeu de la connaissance de la figure de la Terre jusqu'au degré 2 et au-delà est absolument crucial.

3.2.2 Le géoïde sur la Terre réelle

L'étude de la pesanteur de la Terre réelle est rendue plus complexe de par la variabilité – notamment latérale – de la densité des matériaux terrestres et les irrégularités de la surface topographique. Ainsi les équipotentiels de pesanteur présentent-elles des ondulations généralement non parallèles entre elles, ce qui complique les mesures de différence de niveau pratiquées par le nivellement. Considérons, par exemple, la situation décrite par la figure 3.4. Les points *A* et *B* étant situés sur la même équipotentielle, toute mesure de nivellement ne donnera aucune différence de niveau entre *A* et *B*. La *dénivelée* entre les points *A* et *B* est dite nulle. Les distances qui séparent respectivement les points *A* et *B* de la surface de niveau de référence – autrement dit leurs altitudes – doivent être les mêmes. Or, il est clair que l'équipotentielle coïncidant avec le niveau moyen des océans ne peut ici constituer cette référence, puisque les distances à parcourir depuis cette dernière pour rejoindre respectivement les points *A* et *B*, peuvent être différentes.

Supposons à présent deux points *A* et *B* situés de part et d'autre d'une montagne (Fig. 3.5) comportant un excès de masse local – dû par exemple à un changement de lithologie –. Supposons en outre que *A* et *B* soient au même niveau. Ils appartiennent donc à une même équipotentielle de pesanteur et, par conséquent, toute mesure de nivellement qui contournerait la montagne suffisamment loin pour ne pas subir d'influence gravitationnelle, n'enregistrerait aucune différence de niveau. Si à l'inverse le parcours de nivellement franchit la montagne, l'équipotentielle passant par *A* s'incline et s'élève de par l'excès local de masse et les équipotentiels voisines font de même. La dénivelée mesurée en montant le long du flanc gauche de la montagne sera plus courte que celle mesurée lors de la descente par le flanc droit, donnant ainsi le point *B* en dessous du point *A*. Cet exemple illustre la dépendance des mesures de différences de niveau avec le trajet suivi pour réaliser effectivement les mesures de dénivelées.

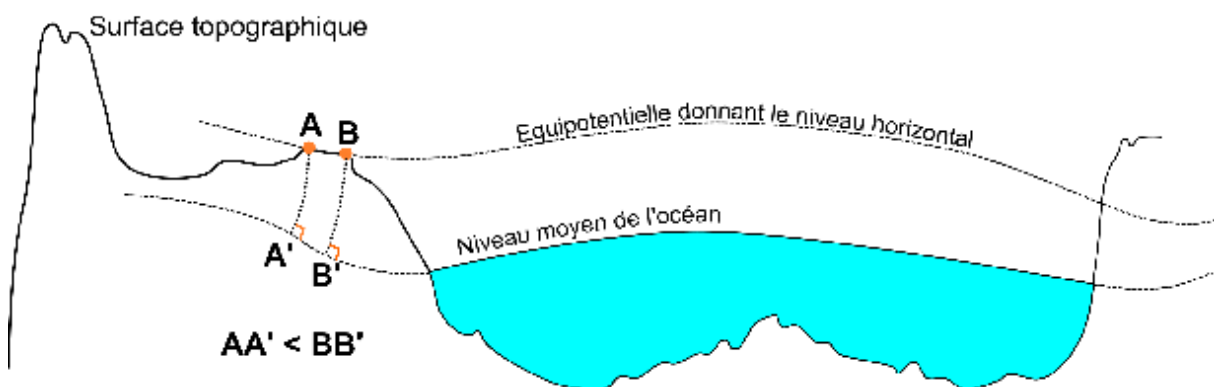


FIGURE 3.4 – Les points *A* et *B* ne présentent aucune différence de niveau, c'est-à-dire que la dénivelée qui les sépare est nulle. Pour autant, ils ne se situent pas à la même distance de la surface de référence, ici le niveau moyen de l'océan.

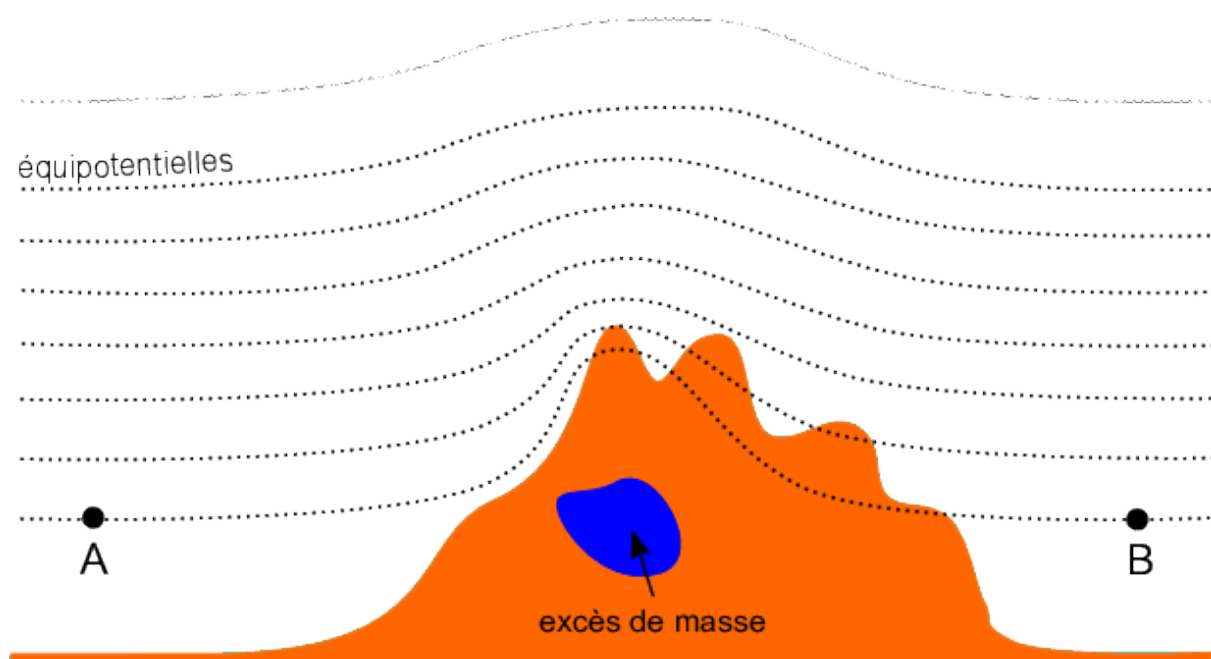


FIGURE 3.5 – Les points *A* et *B* ne présentent aucune différence de niveau, c'est-à-dire que la dénivelée qui les sépare est nulle. L'excès local de masse entraîne un resserrement des équipotentielles de sorte que la somme de dénivelées mesurées sur le flanc gauche de la montagne est inférieure à celle obtenue sur le flanc droit, ce qui situerait le point *B* au-dessous du point *A*. C'est une conséquence du non-parallélisme des surfaces équipotentielles dû aux contrastes latéraux de densité.

Les deux situations schématiques examinées ici suggèrent que les équipotentielles de la pesanteur de la Terre réelle ne peuvent rigoureusement jouer le rôle de surface de référence pour les mesures de nivellement. Si le géoïde est défini comme une équipotentielle de pesanteur alors sa surface coïncide effectivement avec la surface moyenne des océans, qui peut être considérée comme une surface horizontale de référence. En revanche, sur les continents, deux points au même niveau peuvent ne pas être situés à la même distance du géoïde. De plus, cette distance varie en fonction du trajet suivi pour la mesurer. Si la surface du géoïde demeure une horizontale stricto sensu, elle ne peut plus constituer une référence d'altitude puisque son utilisation conduirait à plusieurs déterminations différentes pour l'altitude du même point.

De ce point de vue, le géoïde ne peut être seulement considéré comme une surface de référence approchée des altitudes. Le non parallélisme des équipotentielles de la pesanteur s'estompe lorsque le point de mesure s'éloigne au-dessus de toute masse. Pour tirer parti de cette propriété avec des points situés sur la Terre, le potentiel utilisé pour définir les équipotentielles, notamment le géoïde, correspond au potentiel extérieur de la Terre calculé au point de mesure. Dès lors, l'inconvénient du non parallélisme des équipotentielles est limité au prix de la substitution du potentiel réel par un modèle d'approximation.

3.2.3 Formulation mathématique de la détermination du géoïde

En définitive, l'étude du potentiel complet de la Terre se ramène à celle des écarts de ce dernier par rapport à un modèle de potentiel développé jusqu'au degré 2. C'est en général le modèle de la pesanteur normale qui constitue la référence, donnant ainsi un ellipsoïde de révolution comme équipotentielle de référence et l'intensité du champ normal comme pesanteur de référence.

L'idée essentielle consiste ici à utiliser le potentiel extérieur à la distribution de masse constituant la Terre, qui est par conséquent harmonique en tout point extérieur. La modélisation du potentiel externe à l'aide d'un développement en harmoniques sphériques s'effectue aisément en séparant les contributions de degrés harmoniques respectivement supérieurs et inférieurs à deux; ainsi, le potentiel $V_T(\mathbf{x}_P)$ s'exprime-t-il au point $P(\lambda, \theta, r)$ par :

$$V_T(\mathbf{x}_P) = \left(\frac{GM_T}{r} + \frac{1}{3} \Omega^2 r^2 \right) - \left(\frac{1}{3} \Omega^2 r^2 + \frac{GM_T}{r^3} a^2 J_2 \right) P_2(\cos \theta) - \frac{GM_T}{r} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{\substack{m=-l \\ (l,m) \neq (2,0)}}^{+l} V_l^m \left(\frac{a}{r} \right)^l Y_l^m(\lambda, \theta), \quad (3.33)$$

où V_l^m sont les amplitudes des harmoniques sphériques de degré strictement supérieur à 2 qu'il faut déterminer.

Le développement 3.33 ne comporte pas de termes de degré un, ce qui suppose que l'origine du repère cartésien O soit confondue avec le centre de gravité de la Terre.

En outre, le développement comprend deux contributions respectivement indépendante et dépendante de l'orientation, qui peut être séparées comme suit :

$$V_T(\mathbf{x}_P) = V_T^0(r) + \delta V_T(\lambda, \theta, r), \quad (3.34)$$

avec

$$V_T^0(r) = \frac{GM_T}{r} + \frac{1}{3} \Omega^2 r^2, \quad (3.35)$$

et

$$\delta V_T(\lambda, \theta, r) = - \left(\frac{1}{3} \Omega^2 r^2 + \frac{GM_T}{r^3} a^2 J_2 \right) P_2(\cos \theta) - \frac{GM_T}{r} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{\substack{m=-l \\ (l,m) \neq (2,0)}}^{+l} V_l^m \left(\frac{a}{r} \right)^l Y_l^m(\lambda, \theta). \quad (3.36)$$

La recherche d'une équipotentielle de la pesanteur, telle le géoïde, peut alors être réalisée par une méthode de perturbation identique à celle utilisée dans la section 3.1. La perturbation δr recherchée affecte la sphère de rayon a en tout point, de sorte que le potentiel soit constant sur la surface perturbée, ce qui se traduit par :

$$V_T(\lambda, \theta, r = a + \delta r(\lambda, \theta)) = \text{cste}, \quad (3.37)$$

en tout point (λ, θ, r) de la surface équipotentielle, avec $\delta r \ll a$ et $\langle \delta r \rangle = 0$ sur la sphère.

La condition 3.37 met en jeu précisément le potentiel extérieur calculé au voisinage de la sphère de rayon a ; sans nul doute, ce dernier ne coïncide pas avec le potentiel de la distribution des masses terrestres sur cette zone. C'est donc véritablement un *prolongement vers*

le bas du potentiel extérieur qui modélise le potentiel de la Terre dans cette approche.

À partir d'un développement limité au premier ordre de la relation 3.37, il est possible d'exprimer δr de façon tout à fait identique à celle utilisée dans la section 3.1. Il en résulte l'équation de Bruns généralisée, analogue à 3.12, qui s'écrit :

$$\delta r(\lambda, \theta) = \frac{\delta V_T(\lambda, \theta, r = a)}{g_a}, \quad (3.38)$$

avec $g_a = G M_T / a$. Nous avons vu précédemment (cf §3.1.2) comment déterminer le terme δV_T à partir de mesures gravimétriques de surface. La différence essentielle vient de ce que le développement en harmoniques sphériques de l'ondulation δr n'est plus supposé limité au degré 2. La démarche employée pour établir la relation entre la pesanteur mesurée en surface et l'ondulation de l'équipotentielle demeure identique, comme nous allons le voir.

Au même ordre d'approximation, l'expression de l'intensité de la pesanteur g_T est donnée par :

$$g_T(\lambda, \theta, r) = \left\| \vec{\nabla} V_T(\mathbf{x}_P) \right\| \approx -\partial_r V_T(\lambda, \theta, r),$$

soit, tous calculs faits, compte tenu de 3.34, 3.35 et 3.36 :

$$g_T(\lambda, \theta, r) = \frac{G M_T}{r^2} - \frac{2}{3} \Omega^2 r - \partial_r (\delta V_T). \quad (3.39)$$

Les mesures de l'intensité de la pesanteur sont réalisées sur la surface terrestre de sorte qu'il est possible de décomposer le rayon vecteur r au point de mesure (λ, θ, r) selon la relation :

$$r = a + \delta r(\lambda, \theta) + H(\lambda, \theta), \quad (3.40)$$

où $H(\lambda, \theta)$ correspond à l'altitude du point de mesure, vérifiant $H(\lambda, \theta) \ll a$.

L'intensité de la pesanteur g_{topo} observable sur la surface topographique s'écrit alors :

$$g_{\text{topo}}(\lambda, \theta, r) = g_T(\lambda, \theta, r = a + \delta r + H).$$

Une fois développée au premier ordre en δr et H , la relation précédente devient :

$$g_{\text{topo}}(\lambda, \theta, r) \approx g_T(\lambda, \theta, r = a) + \partial_r g_T|_{r=a} (\delta r + H),$$

puis, à partir de la relation 3.39, il vient :

$$g_T(\lambda, \theta, r = a) = \underbrace{\frac{G M_T}{a^2}}_{g_a} - \frac{2}{3} \Omega^2 a - \partial_r (\delta V_T)|_{r=a},$$

et

$$\partial_r g_T|_{r=a} = \underbrace{-\frac{2 G M_T}{a^3}}_{-\frac{2}{a} g_a} - \frac{2}{3} \Omega^2 - \partial_{rr}^2 (\delta V_T)|_{r=a}.$$

Muni des deux relations précédentes et de l'équation de Bruns généralisée 3.38, il est possible d'exprimer g_{topo} au premier ordre en fonction de δV_T par :

$$g_{\text{topo}}(\lambda, \theta, r) = g_a - \frac{2}{3} \Omega^2 a - \partial_r (\delta V_T)|_{r=a} - \frac{2}{a} \delta V_T|_{r=a} - \frac{2}{a} g_a H.$$

Cette dernière relation s'interprète aisément en remarquant que le terme $\frac{2}{a} g_a H$ est justement celui qu'il faut ajouter à la valeur de pesanteur en surface g_{topo} pour obtenir la valeur sur le géoïde, autrement dit, la somme $g_{\text{topo}}(\lambda, \theta, r) + \frac{2}{a} g_a H$ correspond à l'intensité de la pesanteur mesurée sur le géoïde.

Nous avons d'ores et déjà étudié le champ de pesanteur sur le géoïde jusqu'au degré 2, qui est parfaitement décrit par le modèle de la pesanteur normale pour laquelle la surface du géoïde est celle d'un ellipsoïde de révolution. Soit $\gamma_0(\theta)$ l'intensité de la pesanteur normale mesurée sur l'ellipsoïde équipotentiel à la colatitude θ . Il est clair que cette quantité coïncide avec la somme des termes de g_T jusqu'au degré harmonique 2 à l'ordre 0. Soient $\delta V_T^{2,0}$ le terme de δV_T de degré harmonique 2 et d'ordre 0 et $\Delta V_T = \delta V_T - \delta V_T^{2,0}$ le terme résiduel appelé *anomalie de potentiel*. En séparant les termes ainsi définis dans l'expression de la pesanteur, il vient :

$$g_{\text{topo}}(\lambda, \theta, r) = \underbrace{g_a - \frac{2}{3} \Omega^2 a - \partial_r (\delta V_T^{2,0}) \Big|_{r=a} - \frac{2}{a} \delta V_T^{2,0} \Big|_{r=a}}_{\gamma_0(\theta)} - \partial_r (\Delta V_T) \Big|_{r=a} - \frac{2}{a} \Delta V_T \Big|_{r=a} - \frac{2}{a} g_a H.$$

Dans cette relation, la contribution à la pesanteur sur le géoïde autre que celle de la pesanteur normale, est appelée *anomalie de pesanteur* Δg ; elle s'exprime par :

$$\Delta g = g_{\text{topo}} - \gamma_0 + \frac{2}{a} g_a H. \quad (3.41)$$

D'un point de vue pratique, une anomalie de gravité est déterminée à partir de mesures gravimétriques et de nivellement donnant respectivement g_{topo} et H .

En outre, l'anomalie de pesanteur Δg obéit à une relation constituant une nouvelle *équation fondamentale de la gravimétrie* qui s'écrit :

$$\Delta g = - \partial_r (\Delta V_T) - \frac{2}{a} \Delta V_T \Big|_{r=a}. \quad (3.42)$$

Cette relation montre que les anomalies de pesanteur de potentiel, sont liées par une équation aux dérivées partielles linéaire et du premier ordre. La résolution de cette équation conduit à la détermination de l'anomalie de potentiel, qui complète notre connaissance du géoïde pour les degrés harmoniques non représentés dans la pesanteur normale, naturellement limitée au degré 2, ordre 0. En reprenant l'équation de Bruns généralisée 3.38, il est possible de séparer les contributions à l'ondulation du géoïde comme suit :

$$\delta r = \frac{\delta V_T^{2,0} \Big|_{r=a}}{g_a} + \frac{\Delta V_T \Big|_{r=a}}{g_a}.$$

Le premier terme de cette somme correspond à l'ellipsoïde de révolution équipotentiel de la pesanteur normale et le second mesure l'écart de la surface N du géoïde réel par rapport à l'ellipsoïde ou *anomalie du géoïde*. La relation de Bruns pour l'anomalie du géoïde s'écrit donc :

$$N = \frac{\Delta V_T \Big|_{r=a}}{g_a}. \quad (3.43)$$

Le schéma de calcul du géoïde à partir de mesures gravimétriques (cf ci-après), est tout à fait analogue à celui présenté dans la section 3.1 :

$$g_{\text{topo}}(\theta) \xrightarrow{-\gamma_0 + \frac{2}{a} g_a H} \Delta g \xrightarrow{\text{équation fondamentale}} \Delta V_T|_{r=a} \xrightarrow{\text{équation de Bruns}} N.$$

La différence vient de ce que l'anomalie du géoïde correspond à un écart du géoïde réel par rapport à un ellipsoïde de révolution équipotentiel, considéré comme une surface d'approximation du géoïde au deuxième ordre.

La nécessité de disposer conjointement de mesures gravimétriques et de nivellement sur la surface topographique pour déterminer des modèles de géoïde, découle de l'équation fondamentale de la gravimétrie 3.42. Cette dernière permet d'envisager théoriquement le calcul ponctuel des anomalies du géoïde à partir des anomalies de pesanteur. Ce n'est pas cependant la formulation retenue usuellement pour les calculs pratiques des modèles de géoïde, qui s'appuient, comme nous allons le voir, sur une forme intégrale de l'équation 3.42.

3.3 Vers les méthodes modernes de calcul du géoïde

Parmi les propriétés des anomalies de pesanteur déduites de l'équation 3.42, figure sa dépendance exclusive avec la longitude λ et la colatitute θ . En fait, l'anomalie de pesanteur étant supposée mesurée sur le géoïde, elle ne dépend que de la direction du rayon-vecteur du point d'observation. L'anomalie de pesanteur peut donc être représentée par sa décomposition en harmoniques sphériques sur la sphère unité :

$$\Delta g(\lambda, \theta) = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} g_l^m Y_l^m(\lambda, \theta), \quad (3.44)$$

avec $g_2^0 = 0$ puisque la contribution du terme de degré 2 et d'ordre 0 vient de la pesanteur normale.

La décomposition en harmoniques sphériques de l'anomalie de potentiel ΔV_T se déduit de la relation 3.36 et s'écrit :

$$\Delta V_T(\lambda, \theta, r) = -\frac{GM_T}{r} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} V_l^m \left(\frac{a}{r}\right)^l Y_l^m(\lambda, \theta) \quad \text{avec} \quad V_2^0 = 0. \quad (3.45)$$

En utilisant la décomposition 3.45 et l'équation fondamentale de la gravimétrie 3.42, il vient une nouvelle expression de l'anomalie de pesanteur en fonction des coefficients V_l^m qui s'écrit, tous calculs faits :

$$\Delta g(\lambda, \theta) = \frac{GM_T}{a^2} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (1-l) V_l^m,$$

d'où, par identification avec l'équation 3.44, l'expression des coefficients g_l^m :

$$g_l^m = g_a V_l^m (1-l) \quad \text{pour} \quad l \geq 2. \quad (3.46)$$

La relation de Bruns 3.43 et la décomposition de l'anomalie du potentiel 3.45, permettent d'exprimer la décomposition en harmoniques sphériques de l'anomalie de géoïde par :

$$N(\lambda, \theta) = \frac{1}{g_a} \left(-\frac{GM_T}{a} \right) \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} V_l^m Y_l^m(\lambda, \theta) = \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (-a V_l^m) Y_l^m(\lambda, \theta).$$

Une nouvelle identification permet de déterminer les coefficients N_l^m de la décomposition en harmoniques sphériques de N , qui s'expriment simplement par :

$$N_l^m = -a V_l^m \quad \text{pour } l \geq 2. \quad (3.47)$$

Les coefficients de l'anomalie du géoïde sont donc simplement proportionnels aux coefficients de l'anomalie du potentiel. Les conséquences des relations 3.46 et 3.47 sont capitales pour comprendre certains enjeux de la gravimétrie moderne, en particulier la gravimétrie spatiale. Rappelons tout d'abord que les coefficients V_l^m peuvent être complètement mesurés depuis l'espace en étudiant les perturbations de l'orbite des satellites artificiels. La détermination du géoïde à partir des seules mesures spatiales est donc tout à fait possible en admettant une limite vers les hautes fréquences (resp. courtes longueurs d'onde). En effet, les composantes spectrales de l'anomalie de potentiel de degré l mesurées au point P de rayon-vecteur r_P sont atténuées au point P' situé au-dessus de P ($r_{P'} > r_P$) par le facteur $\left(\frac{r_P}{r_{P'}}\right)^{l+1}$ (cf Éq. 3.45). Ce facteur d'atténuation est d'autant plus faible que le degré est élevé, c'est-à-dire que la longueur d'onde de la contribution est courte. C'est l'altitude du satellite qui fixe donc une limite supérieure en fréquence du spectre de l'anomalie de potentiel accessible à la mesure.

Par ailleurs, l'expression qui relie les coefficients N_l^m aux coefficients g_l^m s'écrit :

$$N_l^m = \frac{a g_l^m}{(l-1) g_a}. \quad (3.48)$$

Le facteur multiplicatif qui permet de passer des coefficients g_l^m de l'anomalie de pesanteur aux coefficients N_l^m de l'anomalie du géoïde, décroît lorsque le degré l augmente, ce qui implique que ce sont les courtes longueurs d'onde des anomalies de pesanteur qui sont les plus atténuées. Cette particularité traduit une propriété générale du géoïde, importante pour l'interprétation de ses ondulations, qui consiste en une plus grande sensibilité vers les grandes longueurs d'onde du champ de pesanteur. C'est donc les phénomènes géophysiques d'échelles mondiale à régionale qui impactent préférentiellement les ondulations du géoïde, faisant des cartes d'anomalies du géoïde un outil adapté à leur étude.

L'examen de la relation liant les coefficients g_l^m de l'anomalie de pesanteur à ceux de l'anomalie de potentiel V_l^m (cf Éq. 3.46) conduit à la conclusion inverse, puisque c'est à présent les composantes spectrales de haut degré qui sont favorisées dans l'expression de l'anomalie de pesanteur. Les cartes d'anomalies de pesanteur s'avèrent donc mieux adaptées à l'étude des phénomènes géophysiques d'échelles régionale à locale.

Actuellement, les modèles les plus fins de l'ondulation du géoïde, issus uniquement de mesures satellitaires, sont développés jusqu'au degré harmonique 280, ce qui équivaut à une longueur d'onde de 143 km. Le raffinement de la connaissance du géoïde jusqu'aux longueurs d'onde proche de 1 km nécessite donc la prise en compte de mesures gravimétriques locales. Le calcul de l'anomalie du géoïde à partir des anomalies de pesanteur mesurées en surface, est obtenu grâce à une relation intégrale, appelée *équation de Stokes*¹, dont nous allons expliquer l'origine.

1. mathématicien et physicien britannique, 1819 – 1903.

La relation 3.48 permet d'exprimer l'anomalie du géoïde comme une fonction sur la sphère par :

$$N(\lambda, \theta) = \frac{a}{g_a} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{g_l^m}{l-1} Y_l^m(\lambda, \theta),$$

où les coefficients g_l^m sont issus de la décomposition en harmoniques sphériques de l'anomalie de pesanteur $\Delta g(\lambda, \theta)$; ces derniers s'expriment donc par :

$$g_l^m = \int_{\text{sphère}} d\lambda' d\theta' \sin\theta' \Delta g(\lambda', \theta') (Y_l^m)^*(\lambda', \theta').$$

En combinant les relations précédentes, il vient :

$$N(\lambda, \theta) = \frac{a}{g_a} \int_{\text{sphère}} d\lambda' d\theta' \sin\theta' \Delta g(\lambda', \theta') \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{1}{l-1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\lambda, \theta) (Y_l^m)^*(\lambda', \theta').$$

La somme réalisée sur tous les ordres dans l'expression ci-dessus constitue une *formule d'addition* des harmoniques sphériques du surface, donnée par :

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_l^m(\lambda, \theta) (Y_l^m)^*(\lambda', \theta') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\psi) \quad (3.49)$$

où P_l est le polynôme de Legendre de degré l et ψ l'angle formé par les deux rayons-vecteurs d'extrémités (λ, θ) et (λ', θ') sur la sphère unité.

Le cosinus de l'angle ψ est implicitement fonction des angles $\lambda, \lambda', \theta, \theta'$ puisqu'il peut s'exprimer par :

$$\cos\psi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda' - \lambda). \quad (3.50)$$

Finalement, l'anomalie du géoïde s'exprime par la relation intégrale de Stokes suivante :

$$N(\lambda, \theta) = \frac{a}{4\pi g_a} \int_{\text{sphère}} d\lambda' d\theta' \Delta g(\lambda', \theta') \sin\theta' F(\psi), \quad (3.51)$$

où $F(\psi)$ désigne la fonction définie par :

$$F(\psi) = \sum_{l=2}^{+\infty} \frac{2l+1}{l-1} P_l(\cos\psi). \quad (3.52)$$

Un simple changement de repère orthonormé permet de faire coïncider l'axe Z du nouveau repère avec celui passant par le point P . Dans ce repère, un paramétrage (α, ψ) de la sphère dans lequel α et ψ jouent respectivement le rôle de la longitude et de la colatitude du point courant P' peut être défini. Ce changement de repère étant une transformation orthogonale, l'aire des surfaces élémentaires se conserve de sorte que l'intégrale de Stokes s'écrit également :

$$N(\lambda, \theta) = \frac{a}{4\pi g_a} \int_{\text{sphère}} d\alpha d\psi \Delta g(\alpha, \psi) \sin\psi F(\psi),$$

soit encore,

$$N(\lambda, \theta) = \frac{a}{4\pi g_a} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\psi \Delta g(\alpha, \psi) \sin\psi F(\psi).$$

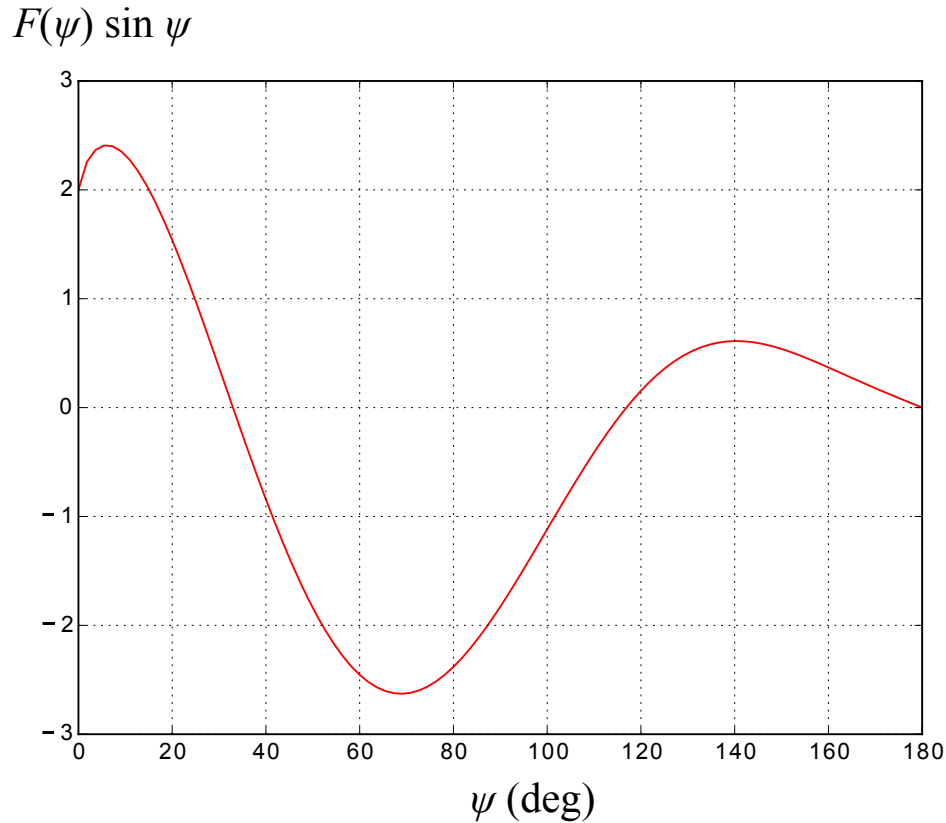


FIGURE 3.6 – Graphe de la fonction de Stokes modifiée qui pondère les anomalies gravimétriques dans le calcul de l’ondulation du géoïde par l’intégrale de Stokes. Ce graphe montre très clairement que des anomalies situées loin du point de calcul – par exemple pour $\psi \in [60^\circ, 80^\circ]$ – se voient affectées de poids non négligeables dans le calcul de l’intégrale de Stokes.

Ainsi, l’anomalie du géoïde en un point donné apparaît-elle comme proportionnelle à l’intégrale sur la sphère entière de l’anomalie de gravité pondérée par la fonction $\sin \psi F(\psi)$. La représentation graphique de la fonction de $\psi \mapsto \sin \psi F(\psi)$ (Fig. 3.6) montre une fonction non monotone qui ne tend pas vers 0 lorsque ψ tend vers π . L’intégrale de Stokes contient donc des contributions non négligeables de la part d’anomalies de pesanteur mesurées en des points éloignés du point de calcul. L’utilisation de l’intégrale de Stokes pour la détermination des anomalies du géoïde requiert donc des données en nombre suffisant réparties de façon homogène autour du point de calcul.

La pratique des mesures gravimétriques, comme nous le verrons, rend ces conditions difficiles à respecter notamment dans les zones ou les régions terrestres d’accès difficile. C’est là une gageure de la gravimétrie pour la détermination du géoïde par la méthode intégrale de Stokes. Cette dernière est donc plutôt réservée au calcul des plus courtes longueurs d’onde du géoïde, beaucoup plus sensibles aux distributions locales de densité. L’effet des plus grandes longueurs d’onde provient en général des modèles globaux de gravité. Bien entendu, cet effet doit avoir été préalablement retiré des anomalies gravimétriques prises en compte dans l’intégrale de Stokes. Cette séparation des contributions de courtes et grandes longueurs d’onde dans le calcul des ondulations du géoïde est à la base des techniques dites de *retrait – restauration*. L’efficacité de ces techniques dépend donc fortement de la disponibilité de modèles globaux à haute résolution spatiale et de données gravimétriques de qualité au voisinage du point de calcul.

Chapitre 4

Gravimétrie et Terre solide

« Savoir s'étonner à propos est le premier pas fait sur la route de la découverte »

Louis Pasteur

Nous avons vu que le champ de pesanteur mesuré sur la surface topographique restitue de façon préférentielle les plus courtes longueurs d'onde (cf Chap. 3, Sec. 3.3, p. 58), ce qui conduit tout naturellement à son utilisation dans l'interprétation géophysique. Plus précisément, l'amplitude et les variations du champ de pesanteur sont reliées à la distribution de la densité dans les structures de l'écorce terrestre, qui rend compte à la fois des valeurs de la densité et des dimensions de structures.

L'interprétation du champ de pesanteur s'effectue essentiellement sur des anomalies de gravité. Aussi, ce chapitre expose les modèles géophysiques fondamentaux qui sous-tendent l'utilisation des anomalies de gravité en géophysique. Les modèles présentés sont délibérément exprimés dans leurs versions les plus simples, pour ne pas privilégier les développements mathématiques aux dépens des conclusions sur la physique des phénomènes. L'essentiel des éléments qui ont servi à l'élaboration de ce chapitre sont tirés de WAHR (1996) et TURCOTTE et SCHUBERT (2014).

4.1 Anomalies de gravité observables en surface

Nous supposons dorénavant que tout point P de l'espace peut être repéré par ses *coordonnées géographiques* dans un système de référence comportant un ellipsoïde de révolution équipotentiel $\mathcal{E}_0$. Les coordonnées géographiques comportent (Fig. 4.1) :

- la longitude λ identique à celle définie pour les coordonnées sphériques ;
- la *latitude géographique* φ qui mesure l'angle formé, dans le plan méridien passant par P , par la normale à l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ passant par P et la droite d'intersection du plan méridien et du plan équatorial ;
- la *hauteur* h mesurée le long de la normale à l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ passant par P , depuis la surface de l'ellipsoïde jusqu'au point P .

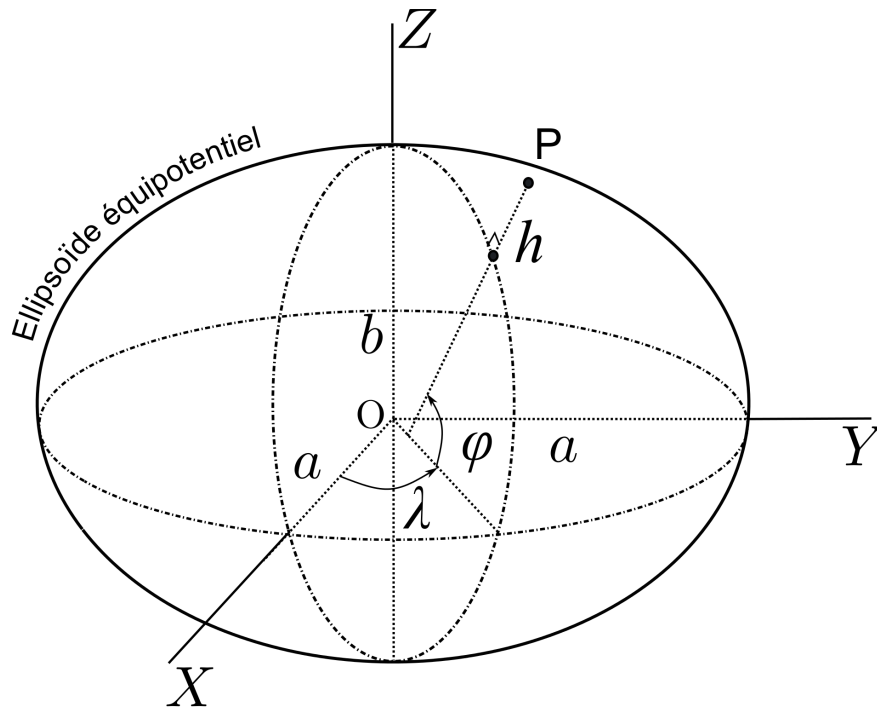


FIGURE 4.1 – Définition des coordonnées géographiques d'un point P : longitude (λ), latitude (φ) et hauteur au-dessus de l'ellipsoïde (h). Les grandeurs a et b représentent respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipsoïde équipotentiel $\mathcal{E}_0$.

Les relations liant les coordonnées cartésiennes et géographiques du point P s'expriment par :

$$\begin{cases} X &= (N(\varphi) + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N(\varphi) + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= (N(\varphi)(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{cases}, \quad (4.1)$$

où e désigne la première excentricité de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ définie à partir de son demi-grand axe a et son demi-petit axe b par :

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad (4.2)$$

et $N(\varphi)$ est le rayon de courbure de la section normale orthogonale défini par :

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (4.3)$$

Nous envisageons dans ce qui suit les seules variations spatiales de la pesanteur supposée constante dans le temps. La prise en compte des phénomènes dynamiques induisant des variations temporelles sera étudiée dans la section 4.3. Dans ce cas, la pesanteur en surface varie notamment de par les changements de niveaux qui équivalent à des rapprochements ou des éloignements des sources gravitationnelles. Pour prendre en compte cet effet non lié directement aux variations de densité, il convient d'utiliser les anomalies dites *à l'air libre*. Si H désigne l'altitude du point P et g_{obs} la valeur de la pesanteur en P , l'anomalie à l'air libre en ce point Δg_{FA} s'exprime par :

$$\Delta g_{\text{FA}}(\lambda, \varphi) = g_{\text{obs}} - \gamma_0(\varphi) - H \partial_h \gamma + \delta g_A, \quad (4.4)$$

où $\gamma_0(\varphi)$ désigne la valeur de la pesanteur normale sur l'ellipsoïde à la base de la normale à $\mathcal{E}_0$ passant par P , $\partial_h \gamma$, le gradient normal de la pesanteur normale dont la valeur usuelle est 0,3086 mGal/m, et δg_A un terme correctif dû à l'atmosphère. Plus précisément, l'addition de la quantité δg_A à la pesanteur mesurée, dispense du calcul direct de l'effet des masses atmosphériques, ces dernières étant justement ramenées par ce calcul en dessous du géoïde. Le terme δg_A est positif et décroît avec l'altitude du point de mesure; il n'excède pas 0,87 mGal (MORITZ, 2000).

L'utilisation de l'altitude H à la place de la hauteur h dans le calcul de l'effet lié au gradient vertical de la pesanteur mérite quelques explications. Stricto sensu, la pesanteur normale au point P à une hauteur h au-dessus de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ s'exprime en ajoutant à la pesanteur normale sur le géoïde $\gamma_0(\theta)$, la quantité négative $h \partial_h \gamma$. Ce n'est donc pas la pesanteur normale au point P qui est utilisée dans l'expression de l'anomalie à l'air libre, mais celle calculée en un point P^* située à une hauteur H au-dessus de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_0$. Le point P^* est tel que la différence de potentiel de pesanteur entre ce dernier et la surface de l'ellipsoïde le long de la ligne de force du champ normal, égale celle mesurée entre le point P et le géoïde le long de la ligne de force du champ réel. Cette propriété est parfaitement respectée lorsque H correspond à l'*altitude normale* du point P . Ainsi, l'anomalie à l'air libre mesure-t-elle une différence entre le champ réel et le champ normal entre deux points de même potentiel, qui sont nécessairement distincts puisque leurs surfaces de référence respectives – géoïde et ellipsoïde – le sont.

L'anomalie à l'air libre mesure donc l'écart de la pesanteur observée en surface par rapport à un modèle de la Terre au degré 2. Cette dernière apparaît généralement corrélée à la topographie, qui est le siège le plus superficiel de variations latérales de la densité.

Une première décorrélation s'opère en utilisant l'*anomalie de Bouguer simple* qui est obtenue en retranchant de l'anomalie à l'air libre, l'effet d'un plateau de matière infini, d'épaisseur H dont la densité ρ supposée constante, est choisie égale à la densité moyenne des roches superficielles, usuellement $2,67 \text{ g cm}^{-3}$. L'anomalie de Bouguer simple Δg_{BS} s'exprime donc par :

$$\Delta g_{\text{BS}}(\lambda, \varphi) = \Delta g_{\text{FA}}(\lambda, \varphi) - 2\pi G \rho H. \quad (4.5)$$

La quantité $2\pi G\rho$ est le gradient normal de l'effet gravitationnel au-dessus du plateau. Sa valeur constante égale à 0,1119 mGal/m est égale environ au tiers du gradient normal de la pesanteur normale $\partial_h \gamma$.

Le calcul de cette anomalie sur les océans doit tenir compte de ce que la matière comprise entre la surface moyenne des océans, c'est-à-dire le géoïde, et la surface topographique sous-marine, est de l'eau de densité ρ_w . L'effet de plateau peut alors être calculé en considérant qu'il résulte :

- du retrait de la matière rocheuse de densité ρ , depuis le géoïde jusqu'à la profondeur $(-H)$, puisque $H < 0$ sous les océans; d'où une contribution égale à $-2\pi G\rho(-H)$;
- de l'ajout d'eau entre le géoïde et la profondeur $(-H)$, d'où la contribution $2\pi G\rho_w(-H)$.

L'effet de plateau qui en résulte s'obtient en effectuant la somme des deux contributions, soit :

$$2\pi G\rho_w(-H) + (-2\pi G\rho(-H)) = 2\pi G(\rho - \rho_w)H.$$

L'anomalie de Bouguer simple sur les océans se calcule donc par :

$$\Delta g_{BS}(\lambda, \varphi) = \Delta g_{FA}(\lambda, \varphi) - 2\pi G(\rho - \rho_w)H. \quad (4.6)$$

De nombreuses relations supplémentaires permettent de calculer l'anomalie de Bouguer simple dans différents contextes de mesure selon la position du point de mesure – sous-terrain, sous-marin et en fond de mer, sur un glacier, à la surface et au fond d'un lac, aéroporté – (NGA, 2008).

Le calcul de l'effet gravitationnel de la matière située entre le géoïde et la surface topographique peut être largement amélioré par l'utilisation d'un Modèle Numérique de Terrain (M.N.T.) décrivant les structures topographiques. La démarche consiste à décomposer ce volume de matière en éléments de masse simples tels des parallélépipèdes ou des prismes, dont les dimensions horizontales coïncident avec le pas d'échantillonnage du M.N.T. L'effet gravitationnel en un point est alors obtenu en sommant les effets individuels des éléments de masse qui l'entourent, jusqu'à ce que les contributions des éléments de masse deviennent négligeables comparés à l'incertitude des mesures gravimétriques. L'effet *de terrain* g_{ET} qui résulte de ce calcul donne une image beaucoup plus fidèle de la réalité des effets gravitationnels causés par la topographie. Les éléments de masse utilisés pour le calcul de l'effet de terrain sont en général supposés de densité constante égale à ρ sur les terres émergées et $(\rho - \rho_w)$ sur les océans. Étant donné l'effet de terrain $g_{ET}(P)$ calculé au point P , l'anomalie de Bouguer dite *complète* (Fig. 4.2) s'exprime par :

$$\Delta g_{BC}(\lambda, \varphi) = \Delta g_{FA}(\lambda, \varphi) - g_{ET}(P). \quad (4.7)$$

De par la prise en compte de l'effet du terrain, les anomalies de Bouguer apparaissent plus faiblement corrélées à la topographie (Fig. 4.3, p. 69), notamment pour les courtes longueurs d'onde inférieures à quelques dizaines de kilomètres. En revanche, au-delà de 100 km de longueur d'onde, une surprenante anti-corrélation s'établit entre les anomalies de Bouguer et la topographie, autrement dit, la corrélation de l'anomalie à l'air libre avec la topographie s'estompe pour les grandes longueurs d'onde de la topographie. Ce phénomène est dû aux effets gravitationnels des distributions de densité induites par les structures de l'écorce terrestre jusqu'à 350 - 400 km de profondeur, ce que nous allons expliquer à présent.

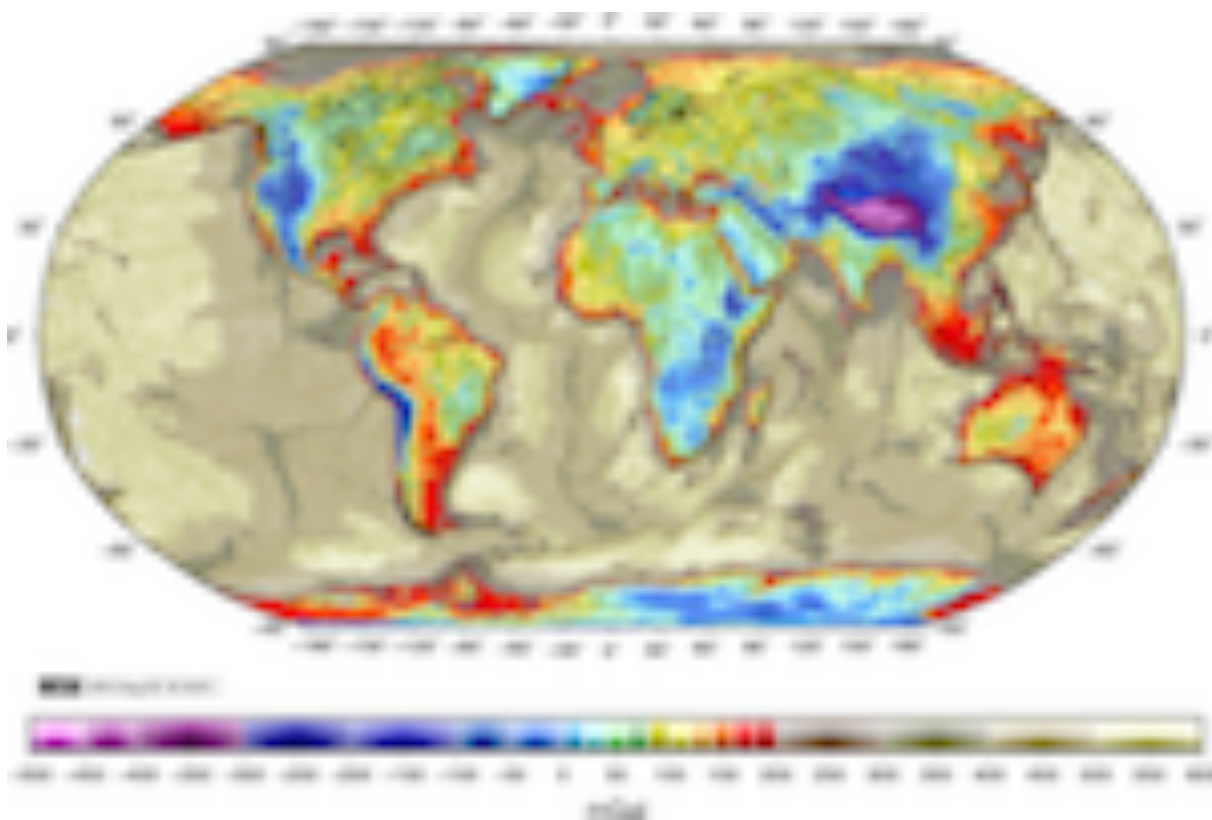


FIGURE 4.2 – Carte de l'anomalie de Bouguer complète publiée dans le cadre du projet WGM2012 (BONVALOT et al., 2012) par le BGI. Les anomalies positives les plus élevées sont localisées sur les océans de par la forte contribution positive de l'effet de plateau ($2\pi G(\rho - \rho_w)H$ avec $H < 0$). À l'inverse, les anomalies fortement négatives de cette carte se situent au niveau de la chaîne himalayenne de laquelle elles débordent très largement.

Carte produite à l'aide du logiciel GMT.

La méthodes de calcul des anomalies de gravité et leur interprétation font encore l'objet de nombreuses recherches relatées dans une abondante littérature scientifique (FEATHERSTONE et DENTITH, 1997, HACKNEY et FEATHERSTONE, 2003, HINZE et al., 2005, KUHN et al., 2009, LI et GÖTZE, 2001, NGA, 2008). Récemment, le BGI a publié des cartes mondiales des anomalies de gravité dans le cadre d'un projet baptisé « World Gravity Map » (BONVALOT et al., 2012). La méthode originale de calcul des effets de terrain a mis en jeu les tous derniers raffinements en matière de calcul numérique des décompositions en harmoniques sphériques (BALMINO et al., 2012). Pour l'occasion, des développements jusqu'au degré harmonique 10 800 ont été utilisés correspondant à une résolution spatiale (demi plus courte longueur d'onde) de 1,9 km. Ces travaux montrent tout le dynamisme des recherches encore menées aujourd'hui et suscitées par la puissance des calculateurs numériques actuels.

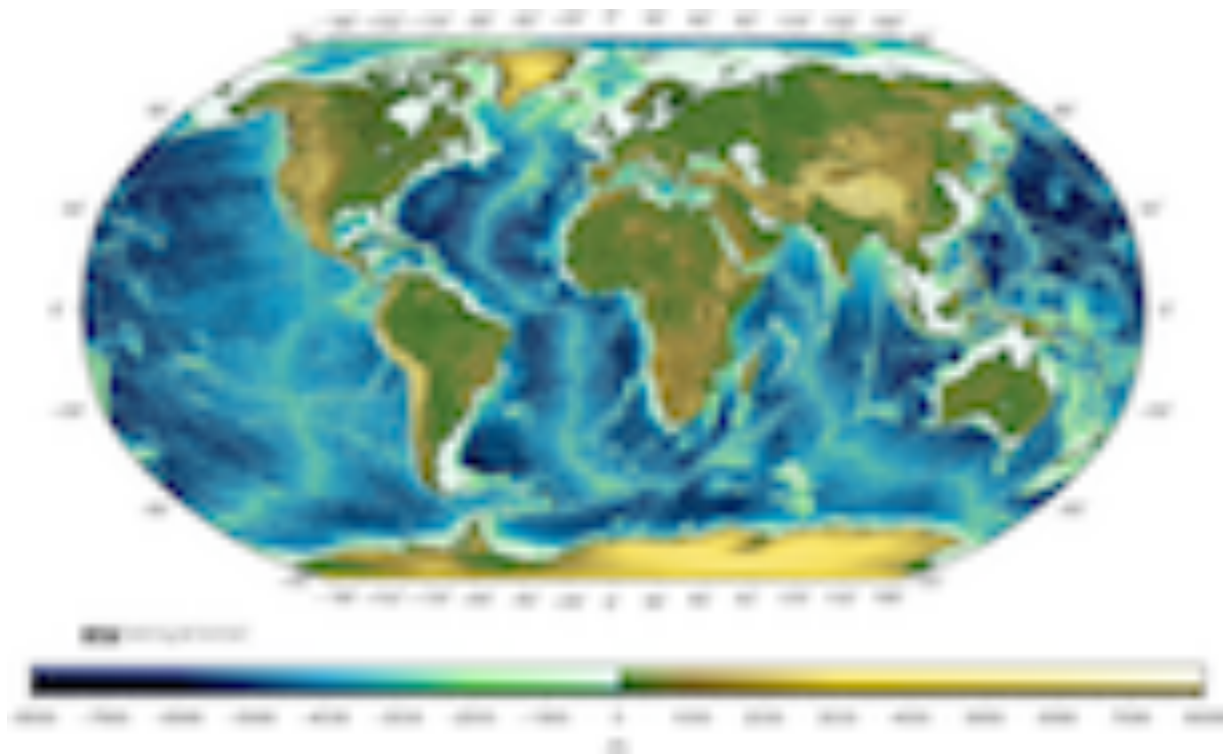


FIGURE 4.3 – Carte de la topographie mondiale 1'×1' d'après le modèle ETOPO1 (AMANTE et EAKINS, 2009). Ce modèle a été utilisé pour le calcul des effets de terrain en vue de la détermination de l'anomalie de Bouguer complète WGM2012 (BONVALOT et al., 2012) par le BGI (cf Fig. 4.2).

Carte produite à l'aide du logiciel GMT.

4.2 Géophysique de la lithosphère

L'essentiel de notre connaissance des grandes structures de l'écorce terrestre provient de la sismologie (cf Fig. 4.4). Les vitesses de propagation des ondes acoustiques dans l'écorce terrestre sont liées à la densité des roches, de sorte qu'il est possible de déduire des modèles de la distribution de densités à partir de la mesure des distributions de vitesses. Nous allons retenir seulement deux découpages classiques de la partie superficielle de l'écorce terrestre en *croûte/manteau* et *lithosphère/asthénosphère*, qui permettent d'interpréter les anomalies de Bouguer.

La *croûte* définie dans le premier découpage, s'étend depuis la surface topographique jusqu'à une zone de discontinuité de la vitesse de cisaillement, appelée *discontinuité de Mohorovičić* ou plus simplement *Moho*. Cette limite sépare la croûte du *manteau* qui comporte des roches de composition chimique différente de celles de la croûte, et également plus denses. En admettant que le comportement du manteau sur le long terme puisse être assimilé à celui d'un fluide, la structure de la croûte peut être décrite comme celle d'un solide reposant sur un liquide plus dense en équilibre hydrostatique. Toute augmentation de volume de la croûte depuis la surface, telle la présence d'un relief, doit alors être compensée par une augmentation de volume à sa base, telle une racine, dans le manteau. Ce constat est à l'origine de la *théorie de l'isostasie*. Ainsi, les effets gravitationnels de grandes longueurs d'onde (> 100 km) de la topographie seraient-ils amoindris par les contrastes négatifs de densité induits par l'épaississement de la croûte sous les reliefs. Nous examinons ci-après les *effets de l'isostasie* pour expliquer les anomalies de surface.

La séparation entre la *lithosphère* et l'*asthénosphère* tient plus au comportement rhéologique des matériaux. En effet, la lithosphère apparaît comme la couche limite des phénomènes de convection, refroidie par rayonnement dans l'atmosphère, dont le comportement rhéologique est devenu cassant sur de longues périodes de temps. L'épaisseur de la lithosphère varie sur la Terre où elle dépasse 50 km sous les continents et est inférieure à 50 km sous les océans. En comparaison, l'épaisseur de la croûte oscille seulement entre le quart et la moitié de celle de la lithosphère. Du point de vue de la densité, la lithosphère plus froide que l'asthénosphère est aussi légèrement plus dense. Elle est donc irrémédiablement amenée à disparaître dans l'asthénosphère du fait de l'attraction gravitationnelle, chose qui se produit dans les zones de subduction. Si le maintien de la topographie ne peut plus s'interpréter comme résultant d'un équilibre hydrostatique, c'est que la lithosphère doit pouvoir opposer aux charges constituées par les reliefs, des contraintes mécaniques d'une autre nature, telles des contraintes *élastiques*. Les *effets de la flexion élastique de la lithosphère*, considérée comme une plaque mince, sous la charge des reliefs, est envisagée du point de vue de ses effets gravitationnels ci-après.

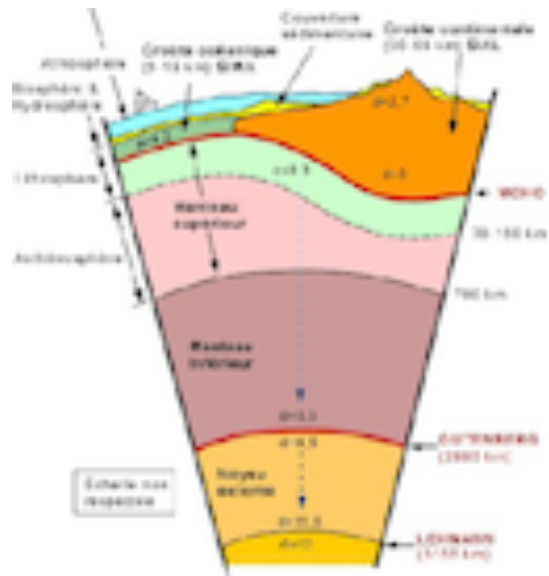


FIGURE 4.4 – Structure interne de la Terre vue par la sismologie. Droits réservés ©Pierre-André Bourque, université de Laval, Québec.

4.2.1 Effets de l'isostasie

4.2.1.1 Le modèle de compensation d'Airy

Un premier modèle d'isostasie est dû à l'astronome britannique Sir George Biddell Airy (1801 – 1892). Ce modèle repose sur deux hypothèses simplificatrices :

1. le manteau de la Terre se comporte comme un fluide à longue période de temps ;
2. la croûte est morcelée sous l'effet des charges de grande longueur d'onde exercées par la topographie ; ces « morceaux » de croûte sont maintenus en équilibre grâce à la poussée d'Archimède exercée par le manteau.

Considérons une colonne verticale de matière prélevée dans la croûte (Fig. 4.5). Soient ρ_c et ρ_m les densités respectives de la croûte et du manteau, et soient h_t la hauteur de la topographie au-dessus de la croûte, et p_r la profondeur de la racine mesurée depuis la base de la croûte. En supposant la gravité uniforme, l'équilibre hydrostatique de la colonne repose sur la compensation de la surcharge due à la topographie et la racine par la poussée d'Archimède exercée par le manteau. La relation d'équilibre s'écrit alors :

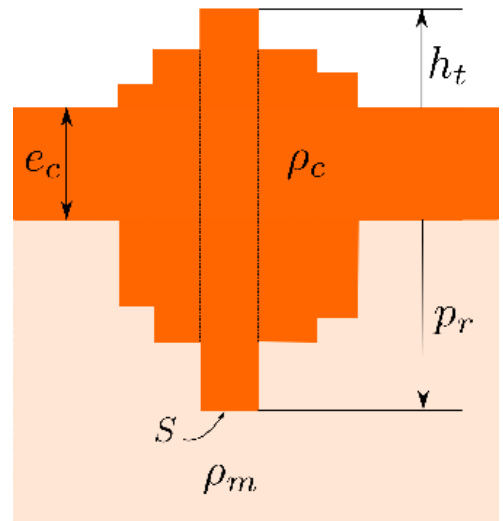


FIGURE 4.5 – Compensation isostatique selon le modèle d'Airy. La croûte est la couche d'épaisseur e_c .

$$\rho_c (h_t + p_r) S g = \rho_m p_r S g, \quad (4.8)$$

où S désigne l'aire de la base de la colonne et g l'accélération gravitationnelle.

Après simplification, l'équation 4.8 fournit une relation entre la profondeur de la racine p_r et la hauteur de la topographie h_t :

$$p_r = \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} h_t. \quad (4.9)$$

À partir des valeurs usuelles de la densité de la croûte et manteau - $\rho_c \sim 2000$ à 3000 kg m^{-3} - et du contraste de densité croûte/manteau - $\rho_m - \rho_c \sim 400$ à 700 kg m^{-3} -, la relation 4.8 permet d'estimer la profondeur p_r entre 3 et 8 fois la hauteur h_t .

La relation 4.9 possède une interprétation différente qui apparaît en multipliant chacun de ses membres par $2\pi G$, ce qui donne :

$$2\pi G \rho_c h_t = 2\pi G (\rho_m - \rho_c) p_r \Rightarrow 2\pi G \rho_c h_t + 2\pi G (\rho_c - \rho_m) p_r = 0.$$

Ainsi, l'effet de plateau dû à la topographie $2\pi G \rho_c h_t$ apparaît-il comme complètement compensé par celui dû à la racine $2\pi G (\rho_c - \rho_m) p_r$. Cette compensation résulte du contraste négatif de densité - $\rho_c - \rho_m < 0$ - causé par la racine de croûte prolongée dans le manteau. Ce modèle prévoit donc une décorrélation de l'anomalie à l'air libre avec les masses topographiques concernées par la compensation isostatique et à l'inverse, l'apparition de corrélations avec les racines de ces mêmes masses dans l'anomalie de Bouguer. L'assimilation de l'effet gravitationnel de la topographie et de ses racines à celui d'un plateau infini constitue une approximation du premier ordre, si bien que les (dé)corrélations des anomalies de gravité avec la topographie sont nécessairement partielles.

4.2.1.2 Le modèle de compensation de Pratt

En supposant une épaisseur de croûte en l'absence de topographie égale à e_c , la masse de la colonne de croûte considérée au §4.2.1.1 est donnée par : $\rho_c (h_t + e_c + p_r) S$. En utilisant la condition d'équilibre 4.8, il vient :

$$\rho_c (h_t + e_c + p_r) S = \rho_c e_c S + \rho_m p_r S. \quad (4.10)$$

Cette relation traduit l'égalité des masses de deux colonnes de matière comportant croûte et manteau et ayant même section et même profondeur dans le cas où la compensation d'Airy est réalisée. Un deuxième modèle de compensation proposé par John Henry Pratt (1809 – 1871), respecte cette propriété à la différence près qu'il suppose que ce sont des variations latérales de densité de colonnes de croûte d'égale profondeur qui permettent l'égalité de leur masse (Fig. 4.6). Dans ce modèle, les masses topographiques seraient supportées par une croûte de moindre densité et non pas par une croûte épaissie.

Soit ρ_h la densité d'une colonne de croûte supportant une masse topographique de hauteur h_t (Fig. 4.6). La condition de compensation de Pratt s'écrit alors :

$$\rho_c e_c S = \rho_h (e_c + h_t) S, \quad (4.11)$$

d'où il résulte

$$\rho_h = \frac{e_c}{e_c + h_t} \rho_c. \quad (4.12)$$

La densité sous la topographie est donc plus faible. En supposant une épaisseur de la croûte égale à 30 km et une topographie de hauteur maximale égale à 8 km, le facteur multiplicatif $\frac{e_c}{e_c + h}$ varie entre 79 et 100 %. La diminution de densité peut donc atteindre 21 % ce qui situerait les densités sous les plus hautes montagnes entre 1 600 et 2 400 kgm^{-3} .

En outre, les effets de plateau ne varient pas entre deux colonnes successives puisque, d'après la relation 4.12 :

$$2\pi G \rho_h (e_c + h_t) = 2\pi G \rho_c e_c.$$

Ainsi, comme dans le cas de la compensation d'Airy, le modèle de Pratt prédit-il une décorrélation entre l'anomalie à l'air libre et la topographie avec le même ordre d'approximation. Plus précisément, la relation précédente traduit l'uniformité de la masse par unité de surface de la croûte en cas d'équilibre isostatique, qui se répercute directement sur l'anomalie à l'air libre. Au premier ordre, les modèles d'Airy et de Pratt prédisent donc les mêmes effets sur les anomalies de gravité. Le premier est plus adapté aux régions dans lesquelles la topographie apparaît comme une charge sur la croûte, le second rend compte des reliefs issus de la dilatation ou la contraction thermiques de la croûte ou du manteau, qui entraînent des variations latérales de densité.

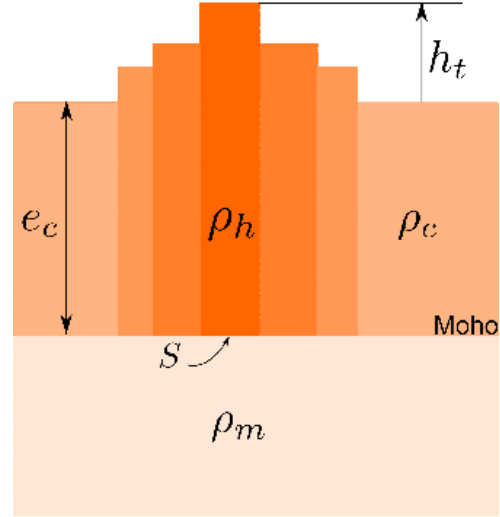


FIGURE 4.6 – Compensation isostatique selon le modèle de Pratt.

Il convient de noter également que le modèle de Pratt n'implique pas nécessairement l'uniformité de la densité dans chaque colonne de croûte, de sorte que la relation 4.11 est encore valable avec les densités moyennes de chaque colonne. De ce point de vue, le modèle de Pratt est plus raffiné.

Un troisième modèle de compensation développé par le géodésien finlandais Heiskanen¹, constitue un compromis entre les modèles d'Airy et de Pratt. Ce modèle suppose que les deux tiers environ de la topographie est compensée par la formation de racines et un tiers par la croûte terrestre au-dessus de la limite croûte/manteau. Dans tous les cas, le respect de l'équilibre isostatique de la croûte entraîne l'apparition de contrastes latéraux de densité dont l'effet gravitationnel s'apparente à celui de l'effet de terrain. En retranchant cet effet de l'anomalie à l'air libre, il résulte une nouvelle anomalie de gravité dite isostatique (Fig. 4.7), qui rend compte de l'écart entre la pesanteur réelle et celle obtenue en supposant une compensation isostatique parfaite de la croûte.

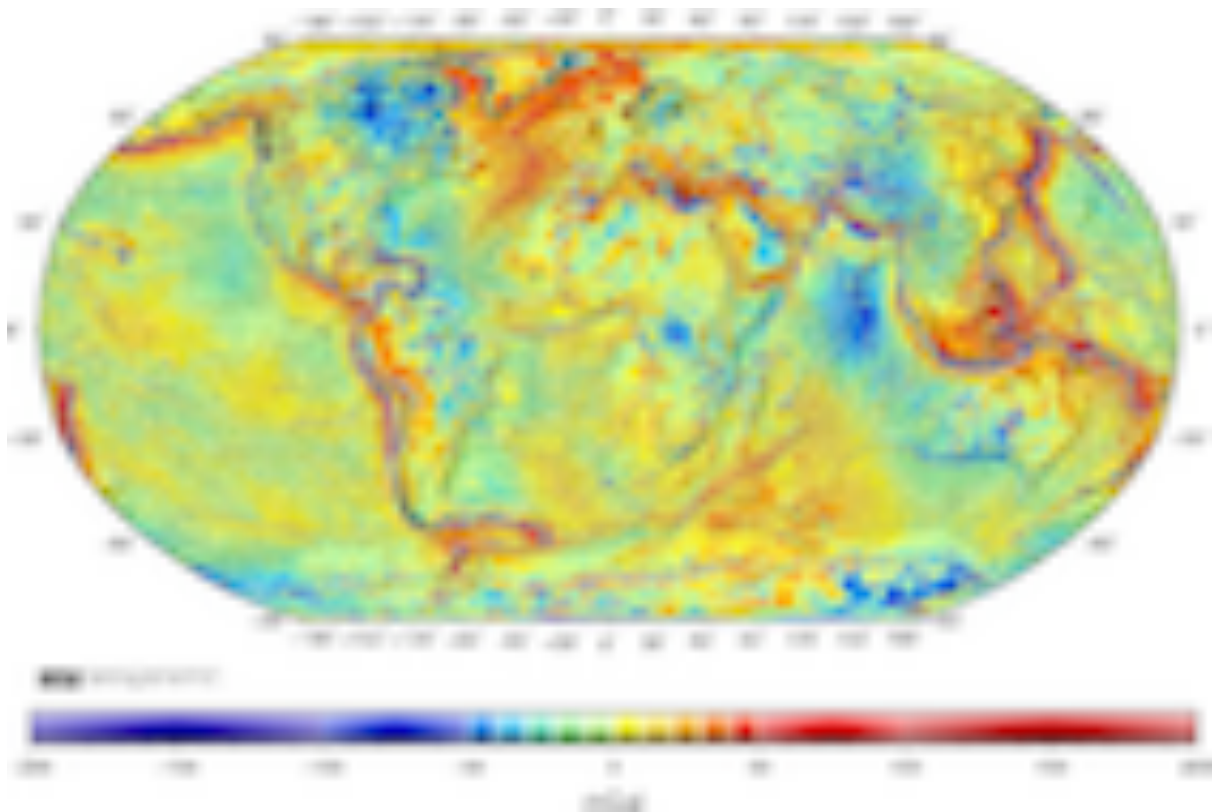


FIGURE 4.7 – Carte de l'anomalie isostatique publiée dans le cadre du projet WGM2012 (BONVALOT et al., 2012) par le BGI.

Carte produite à l'aide du logiciel GMT.

1. Weikko Aleksanteri Heiskanen, géodésien finnois, 1895 – 1971.

L'étude des corrélations entre l'anomalie à l'air libre et l'anomalie isostatique avec la topographie a permis d'estimer la profondeur de la limite croûte/manteau à 10 km sous les océans et 50 km sous les continents. Ces estimations sont tout à fait compatibles avec celles données par la sismologie – 5 à 15 km sous les océans et 30 à 60 km sous les continents –. Les modèles de compensation isostatique semblent donc pertinents pour expliquer la structure de la croûte; il faut cependant les raffiner quelque peu pour expliquer pourquoi la compensation n'opère pas pour les courtes longueurs d'onde.

4.2.1.3 Modèles raffinés de compensation isostatique

Nous nous proposons de calculer l'effet gravitationnel d'une topographie à variations sinusoïdales dans le cas où cette dernière est parfaitement compensée (Fig. 4.8). Pour simplifier le problème, nous supposerons en outre les variations de la topographie unidimensionnelles. Plus précisément, dans le repère cartésien $(O, \hat{e}_X, \hat{e}_Y, \hat{e}_Z)$, la hauteur h_t de la topographie est supposée suivre la loi :

$$h_t(X) = h_1 e^{ikX}, \quad (4.13)$$

où h_1 est une constante réelle et k la fréquence spatiale liée à la longueur d'onde spatiale λ de la topographie par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.14)$$

Ce modèle stipule que toute section de la topographie par un plan orthogonal à $\hat{e}_Y$ a un profil sinusoïdal dans la direction de $\hat{e}_X$, de longueur d'onde λ et d'amplitude h_1 . La topographie apparaît aussi de hauteur constante et infiniment étendue dans la direction de $\hat{e}_Y$.

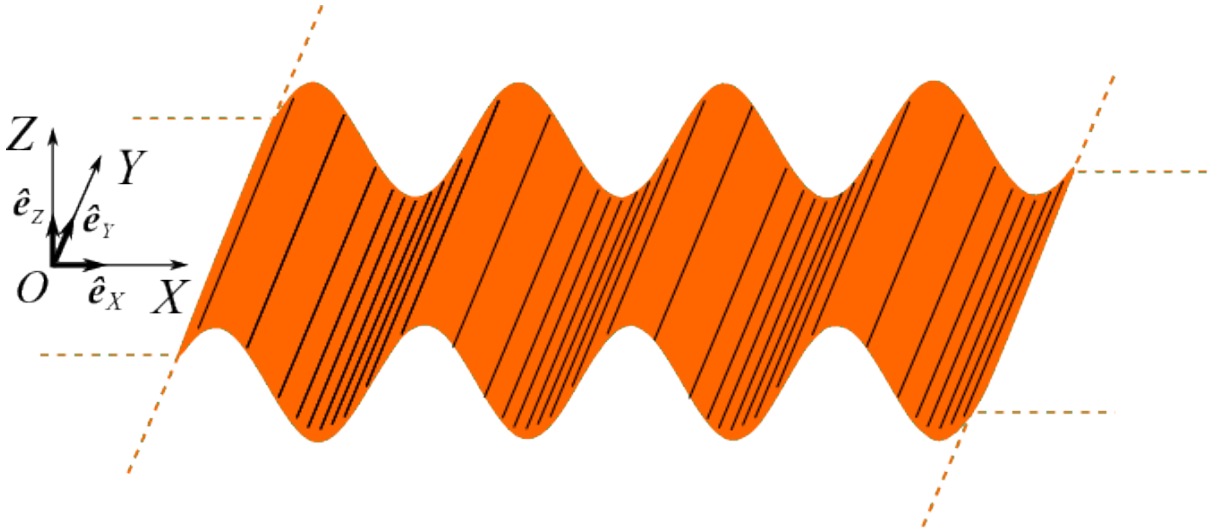


FIGURE 4.8 – Vue du modèle de topographie unidimensionnelle, à variation sinusoïdale, utilisée pour étudier l'effet gravitationnel d'une compensation isostatique des reliefs. La topographie est supposée infiniment étendue et invariante dans la direction de $\hat{e}_Y$. Elle est également infiniment étendue et périodique dans la direction de $\hat{e}_X$. L'étude porte sur la composante suivant $\hat{e}_Z$ de l'attraction gravitationnelle due à la topographie en un point situé au-dessus d'elle.

L'utilisation d'une expression complexe pour h_t est délibérée bien que n'ayant pas de sens physique. En effet, le calcul réalisé ici nous donnera la réponse gravitationnelle à une excitation « monochromatique » e^{ikX} d'amplitude h_1 de la topographie, également appelée *réponse harmonique*.

De par la linéarité de la loi de Newton par rapport aux sources gravitationnelles, il suffirait d'ajouter les réponses harmoniques aux excitations de la forme $e^{in k X}$, $k \in \mathbb{Z}$, pour obtenir l'effet gravitationnel d'une topographie décomposée en série de Fourier sous la forme :

$$h_t(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n e^{in k X}.$$

4.2.1.3.1 Cas de la compensation d'Airy

Si p_r désigne la profondeur de la croûte (Fig. 4.9), la relation de compensation isostatique selon Airy s'écrit alors :

$$p_r(X) = \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} h_t(X) = \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} h_1 e^{i k X}, \quad (4.15)$$

où ρ_c et ρ_m désignent respectivement les densités de la croûte et du manteau.

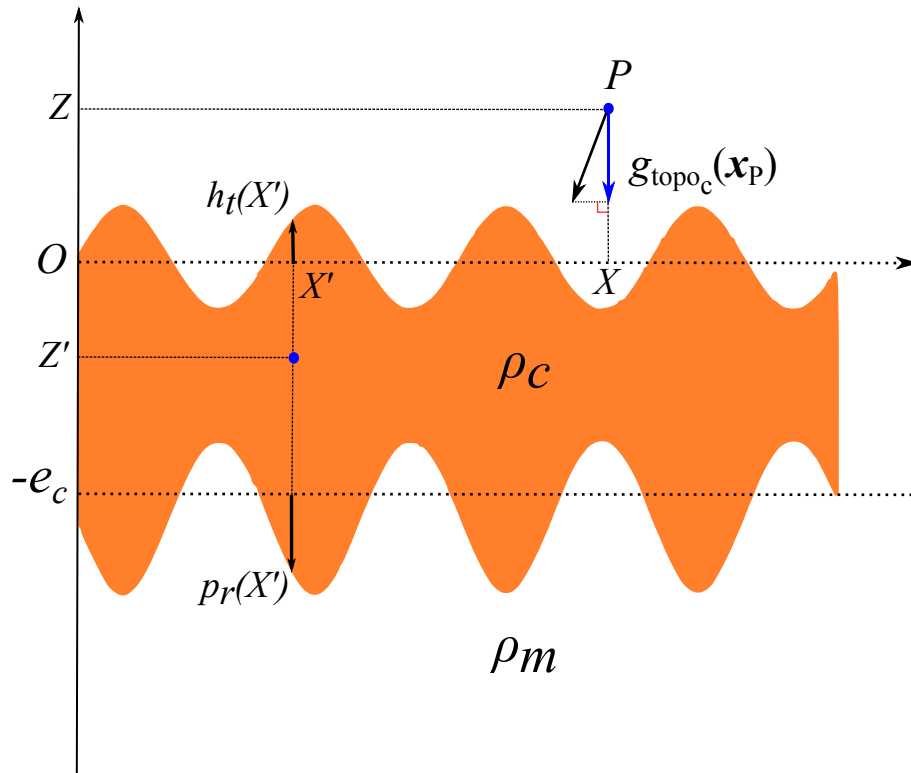


FIGURE 4.9 – Mise en équation du problème du calcul de l'effet gravitationnel de la topographie compensée. Le point $P(X, 0, Z)$ du plan (OXZ) correspond au point de calcul. Le point courant à l'intérieur de la croûte a pour coordonnées (X', Y', Z') . Le calcul consiste à déterminer la composante verticale, c.-à-d. suivant $\hat{e}_Z$ de l'attraction gravitationnelle de la topographie compensée dont l'intensité est notée g_{topoc} . La distribution de masse étant symétrique par rapport au plan (OXZ) , l'attraction gravitationnelle de la topographie est contenue dans ce plan.

Nous allons en outre supposer que la hauteur de la topographie et la profondeur de la croûte restent très inférieures à l'épaisseur moyenne de la croûte e_c , c'est-à-dire que : $|h_t(X)| \ll e_c$ et $|p_r(X)| \ll e_c$ pour tout X . Dans ces conditions, la distribution de masse correspondant à la topographie compensée comprend trois contributions qui correspondent respectivement à :

1. un plateau infini d'épaisseur e_c et de densité ρ_c ;
2. une première couche superficielle plane, de hauteur $Z = 0$, de masse par unité de surface $\sigma(X) = \rho_c h_t(X)$;
3. une deuxième couche superficielle plane, de hauteur $Z = -e_c$, de masse par unité de surface $\sigma'(X) = (\rho_c - \rho_m) p_r(X) = -\rho_c h_t(X)$.

Le plateau infini ajoute une simple constante, égale à $2\pi G e_c$, à l'effet gravitationnel de la topographie compensée. Il est donc inutile d'en tenir compte pour l'étude de la corrélation entre l'effet gravitationnel et la topographie. Considérons tout d'abord la couche plane située dans le plan $Z = 0$ (Fig. 4.10). Soient $(X', Y', 0)$ les coordonnées d'un point courant de cette couche. Cette dernière peut être décomposée en une infinité de rubans de matière parallèles, infiniment étendus dans la direction $\hat{e}_Y$, dont la masse par unité de longueur égale $\sigma(X') dX'$.

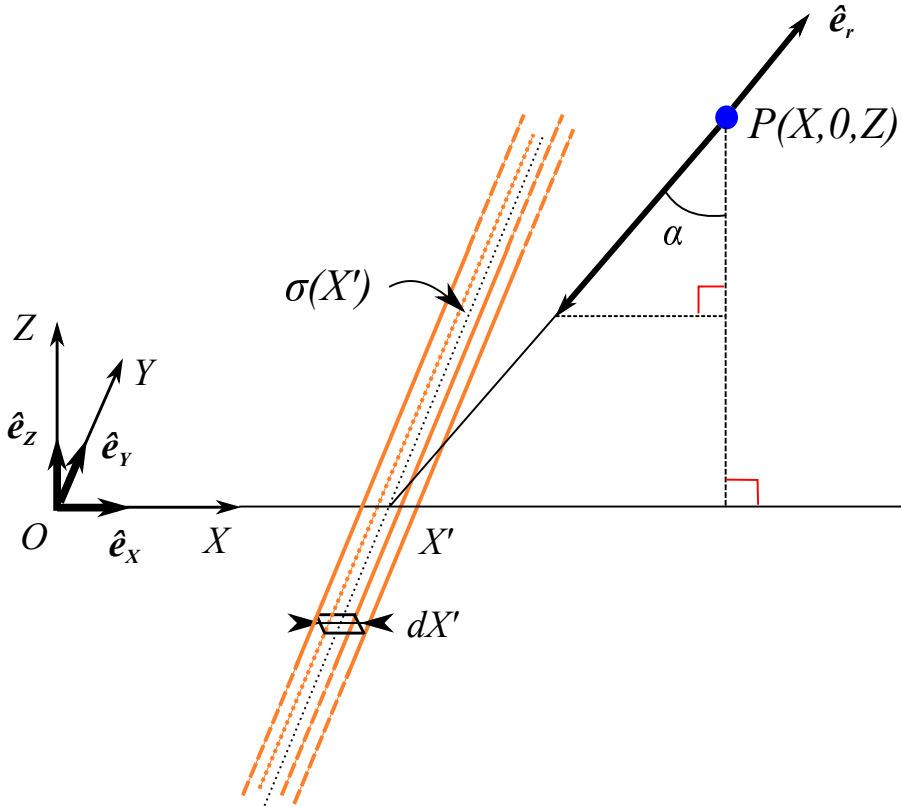


FIGURE 4.10 – La couche superficielle de matière située à la cote $Z' = 0$ est décomposée en rubans infiniment fins, de largeur dX' , infiniment étendus dans la direction $\hat{e}_Y$. L'attraction gravitationnelle produite équivaut à celle d'un fil infini de masse linéique constante égale à $\sigma(X') dX'$. Le calcul s'intéresse à la composante verticale de cette attraction c'est-à-dire celle orientée dans la direction de $\hat{e}_Z$. Au point P , l'attraction gravitationnelle du fil forme un angle α avec la verticale.

Le ruban d'abscisse X' produit au point P de coordonnées $(X, 0, Z)$, une attraction gravitationnelle dont l'intensité est donnée par la relation 2.12 :

$$\frac{2 G \sigma(X') dX'}{\sqrt{(X - X')^2 + Z^2}}.$$

Cette attraction gravitationnelle contribue à la composante verticale de l'attraction totale par sa projection sur l'axe dirigé par $\hat{e}_Z$ qui s'exprime par (Fig. 4.10) :

$$\frac{2 G \sigma(X') dX'}{\sqrt{(X - X')^2 + Z^2}} \cos \alpha = \frac{2 G \sigma(X') Z dX'}{(X - X')^2 + Z^2}.$$

Si $g_{\text{topo}}(\mathbf{x}_P)$ désigne l'intensité de la composante verticale de l'attraction gravitationnelle due à la topographie, alors il vient :

$$g_{\text{topo}}(\mathbf{x}_P) = g_{\text{topo}}(X, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dX' \frac{2 G \sigma(X') Z}{(X - X')^2 + Z^2}.$$

Puisque le terme $\sigma(X')$ est de la forme $\sigma(X') = \sigma_1 e^{ikX'}$ où σ_1 est un réel positif, l'expression intégrale de $g_{\text{topo}}(X, Z)$ correspond à une transformée de Fourier classique ; il en résulte :

$$g_{\text{topo}}(X, Z) = 2\pi G \sigma_1 e^{-kZ} e^{ikX} \quad \text{pour } Z > 0. \quad (4.16)$$

La relation 4.16 peut à présent être utilisée pour calculer l'effet gravitationnel² de la topographie sinusoïdale compensée en considérant :

- l'effet de la topographie de densité surfacique $\sigma_1 = \rho_c h_1$, soit : $2\pi G \rho_c h_1 e^{-kZ} e^{ikX}$;
- l'effet de la racine de densité surfacique $\sigma'_1 = -\rho_c h_1$, décalée vers le bas d'une longueur égale à l'épaisseur e_c de la croûte, ce qui donne : $-2\pi G \rho_c h_1 e^{-k(Z+e_c)} e^{ikX}$.

Il vient finalement pour l'effet complet g_{topo_c} :

$$g_{\text{topo}_c}(X, Z) = 2\pi G \rho_c h_1 e^{ikX} (1 - e^{-ke_c}) e^{-kZ}. \quad (4.17)$$

La relation 4.17 indique que pour une hauteur fixée, les variations de g_{topo_c} dans la direction de $\hat{e}_X$ sont sinusoïdales, de même fréquence spatiale k que la topographie, d'amplitude égale à $2\pi G \rho_c h_1 (1 - e^{-ke_c}) e^{-kZ}$. Cette amplitude diminue exponentiellement avec la hauteur de par la présence du terme e^{-kZ} . Elle dépend également du facteur $(1 - e^{-ke_c})$ qui dépend implicitement du rapport entre l'épaisseur de la croûte e_c et la longueur d'onde λ de la topographie puisque, d'après 4.14 :

$$ke_c = 2\pi \frac{e_c}{\lambda}.$$

2. Plus précisément, cet effet gravitationnel correspond à la composante verticale selon $\hat{e}_Z$ de l'attraction gravitationnelle.

Envisageons tout d'abord le cas limite où $k e_c \ll 1$, autrement dit, $e_c \ll \lambda$; il vient alors :

$$1 - e^{-k e_c} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad g_{\text{topo}_c}(X, Z) \rightarrow 0.$$

Dans ce cas, l'effet gravitationnel de la topographie est exactement compensé par celui de la racine pour donner un effet résultant nul. L'anomalie à l'air libre mesurée sur une telle topographie serait complètement décorrélée de la topographie.

Dans le cas limite inverse où $k e_c \gg 1$, autrement dit, $\lambda \ll e_c$; il vient :

$$1 - e^{-k e_c} \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad g_{\text{topo}_c}(X, Z) \rightarrow 2\pi G \rho_c h_1 e^{i k X} e^{-k Z}.$$

Ainsi, au point d'abscisse X et de hauteur $Z = 0$, l'effet de la topographie compensée apparaît-il comme celui d'un plateau infini, de densité ρ_c et d'épaisseur $h_1 e^{i k X}$ égale à celle de la topographie $h_t(X)$ en X . C'est cet effet qui est précisément retranché de l'anomalie à l'air libre pour calculer l'anomalie de Bouguer simple (cf Éq. 4.5). Une telle anomalie serait donc entièrement décorrélée de la topographie.

En bref, le calcul précédent indique que lorsque les longueurs d'onde de la topographie sont grandes devant l'épaisseur de la croûte ($e_c \ll \lambda$), les effets gravitationnels de la topographie et de la racine se compensent mutuellement. Par conséquent, les grandes longueurs d'onde d'une topographie compensée marquent peu l'anomalie à l'air libre. Lorsqu'à l'inverse, les longueurs d'onde de la topographie sont courtes devant l'épaisseur de la croûte ($\lambda \ll e_c$), l'effet gravitationnel de la topographie compensée est proportionnel à la hauteur de cette dernière selon la relation du plateau infini. C'est pourquoi les courtes longueurs d'onde d'une topographie compensée marquent peu l'anomalie de Bouguer simple.

En outre, considérons un modèle de Terre comportant une topographie compensée. Dans ce cas, l'effet gravitationnel de cette topographie compensée est assimilable à une anomalie de gravité à l'air libre. D'après la relation 4.17, l'anomalie à l'air libre $\Delta g_{FA}(X)$ mesurable en surface est de la forme :

$$\Delta g_{FA}(X) = g_{\text{topo}_c}(X, Z)|_{Z=0} = F_{\text{Airy}}(k) h_1 e^{i k X}$$

avec

$$F_{\text{Airy}}(k) = 2\pi G \rho_c \left(1 - e^{-k e_c}\right). \quad (4.18)$$

La fonction $F(k)$ ainsi définie n'est autre que la *fonction de transfert* entre la topographie et l'anomalie à l'air libre de surface. En ajustant cette dernière sur des anomalies mesurées connaissant la topographie grâce aux modèles numériques, il est possible d'estimer la densité ρ_c et l'épaisseur moyenne e_c de la croûte. Cet exemple illustre une méthode d'exploitation de données gravimétriques pour l'estimation de paramètres géophysiques de la croûte.

Examinons à présent l'effet de la topographie compensée sur les ondulations du géoïde. L'anomalie de potentiel $\Delta V_T(X, Z)$ correspondante à l'anomalie de gravité causée par la topographie compensée est liée à cette dernière par la relation intégrale suivante :

$$\Delta V_T(X, Z) = - \int g_{\text{topo}_c}(X, Z') dZ'. \quad (4.19)$$

L'ondulation du géoïde $N_{\text{Airy}}(X)$ liée à cette anomalie de potentiel se déduit de la relation de Bruns (Éq. 3.43) par :

$$N_{\text{Airy}}(X) = \frac{\Delta V_T(X, Z)|_{Z=0}}{g_a},$$

où g_a est la partie constante de l'accélération gravitationnelle totale de la Terre.

En utilisant la relation 4.17, il vient :

$$N_{\text{Airy}}(X) = 2\pi G \rho_c h_1 e^{ikX} \left(1 - e^{-ke_c}\right) \left[\frac{e^{-kZ}}{g_a k} \right]_{Z=0}$$

d'où, tous calculs faits,

$$N_{\text{Airy}}(X) = 2\pi G \rho_c h_t(X) \frac{1 - e^{-ke_c}}{g_a k}. \quad (4.20)$$

En ne considérant légitimement que l'effet des grandes longueurs d'onde de la topographie ($ke_c \ll 1 \Rightarrow 1 - e^{-ke_c} \approx ke_c$), l'expression de l'ondulation devient :

$$N_{\text{Airy}}(X) \approx \frac{2\pi G \rho_c e_c}{g_a} h_t(X). \quad (4.21)$$

Dans ce cas, l'ondulation du géoïde apparaît comme proportionnelle à la topographie « monochromatique » considérée dans notre modèle. Dans le cas d'une topographie réelle, décomposée en série de Fourier, il faudrait calculer l'ondulation du géoïde en ajoutant toutes les contributions de la topographie dues aux termes $h_n e^{inkX}$. La constante de proportionnalité liant $h_t(X)$ et $N(X)$ étant indépendante de la fréquence spatiale k , la relation de proportionnalité entre $N(X)$ et $h_t(X)$ resterait valable. Par conséquent, les ondulations du géoïde générées par une topographie compensée s'avèrent fortement corrélées avec les grandes longueurs d'onde de la topographie. L'étude des corrélations des ondulations du géoïde avec les grandes longueurs d'onde de la topographie nous renseigne donc sur la possible compensation à l'échelle régionale de la topographie. Cette dernière serait plus difficile à mener à partir de l'anomalie à l'air libre dont la fonction de transfert avec la topographie dépend explicitement de la fréquence spatiale (cf Éq. 4.18).

4.2.1.3.2 Cas de la compensation de Pratt

Nous nous proposons à présent de déterminer l'effet gravitationnel g_{topo_c} dans le cas d'une topographie compensée selon le modèle de Pratt. La distribution de densité qui permet la compensation isostatique de Pratt, est supposée suivre une loi de la forme :

$$\rho(X', Z') = \rho_c + \Delta \rho(X', Z'), \quad (4.22)$$

où ρ_c est une constante correspondant à la densité moyenne de la croûte et $\Delta \rho(X', Z')$ l'écart de densité mesuré au point courant (X', Z') de la croûte (Fig. 4.11) pour assurer la compensation isostatique.

Comme dans le cas du modèle d'Airy, la hauteur de la topographie h_t est supposée très inférieure à l'épaisseur de la croûte e_c , c'est-à-dire : $|h_t(X')| \ll e_c$ pour tout $X' \in \mathbb{R}$. Par conséquent, les variations de densité $\Delta \rho$ sont également du premier ordre par rapport à la densité moyenne, autrement dit $|\Delta \rho(X', Z')| \ll \rho_c$ pour tout $(X', Z') \in \mathbb{R}^2$.

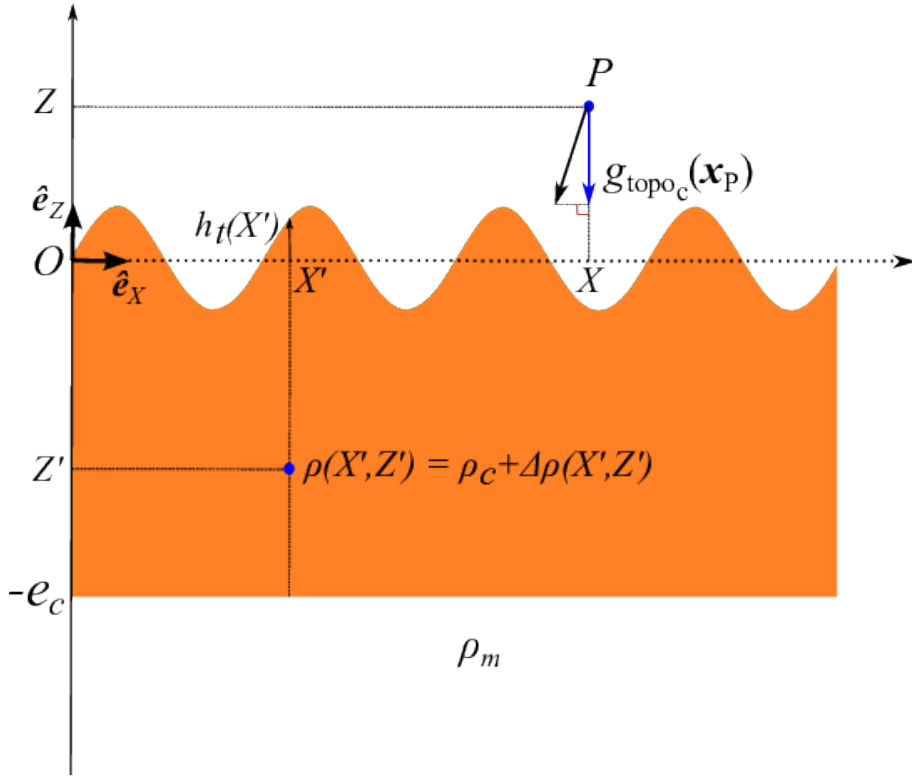


FIGURE 4.11 – Modèle de topographie sinusoïdale compensée selon le modèle de Pratt. L'épaisseur moyenne de la croûte est ici constante, égale à e_c . La compensation isostatique de la topographie résulte de variations latérales de la densité représentée par la fonction $\Delta\rho(X', Z')$ au point courant (X', Y', Z') de la croûte terrestre.

L'effet de la topographie seule, sans prise en compte des variations de densité $\Delta\rho$ nécessaires pour la compensation, peut donc être calculé à partir de la relation 4.16 en posant $\sigma_1 = \rho_c h_1$; sa contribution à l'effet gravitationnel g_{topo_c} au point P s'exprime donc par :

$$2\pi G\rho_c h_1 e^{-kZ} e^{ikX} \quad \text{pour } Z > 0.$$

Pour déterminer l'effet gravitationnel induit par les variations de densité, il convient de préciser la forme mathématique de la fonction $\Delta\rho$. La condition d'équilibre isostatique de Pratt implique l'égalité des masses de colonnes de matière étendue jusqu'à la base de la croûte. En l'absence de topographie, la masse par unité de surface de la croûte égale $\rho_c e_c$. La condition d'équilibre de Pratt pour une colonne supportant une topographie s'exprime alors par :

$$\int_{-e_c}^{h_t(X')} dZ' (\rho_c + \Delta\rho(X', Z')) = \rho_c e_c. \quad (4.23)$$

Après simplification, il vient :

$$\int_{-e_c}^{h_t(X')} dZ' \Delta\rho(X', Z') = -\rho_c h_t(X') = -\rho_c h_1 e^{ikX'}.$$

Le terme $\int_0^{h_t(X')} dZ' \Delta\rho(X', Z')$ est du second ordre comparé à $\rho_c h_t(X')$, de sorte que :

$$\int_{-e_c}^0 dZ' \Delta\rho(X', Z') \approx -\rho_c h_t(X') = -\rho_c h_1 e^{ikX'}.$$

En outre, l'égalité ci-dessus étant valable pour tout $X' \in \mathbb{R}$, la dépendance de $\Delta \rho$ en fonction de X' est nécessairement de la forme $e^{ikX'}$. En posant alors :

$$\Delta \rho(X', Z') = \Delta \rho_1(Z') e^{ikX'}, \quad (4.24)$$

la condition d'équilibre de Pratt peut finalement s'écrire :

$$\int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') = -\rho_c h_1. \quad (4.25)$$

Considérons la couche de matière de cote Z' et d'épaisseur dZ' (Fig. 4.12). Cette dernière a pour densité surfacique $d\sigma(X', Z') = \Delta \rho(X', Z') dZ'$, ce qui, d'après la relation 4.24, s'exprime par $d\sigma(X', Z') = \Delta \rho_1(Z') dZ' e^{ikX'}$. L'effet gravitationnel d'une telle couche au point P peut être calculé à l'aide de la relation 4.16, en remarquant que le point P est au-dessus de cette dernière, à la hauteur $Z - Z'$, ce qui donne :

$$2\pi G \Delta \rho_1(Z') dZ' e^{-k(Z-Z')} e^{ikX'}.$$

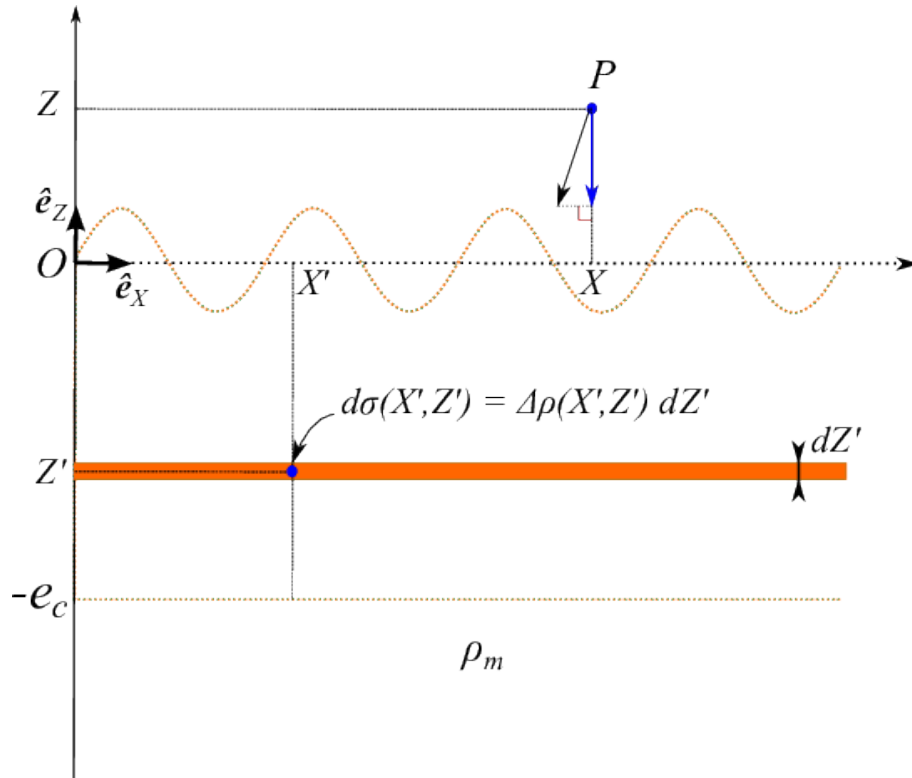


FIGURE 4.12 – La croûte est ici décomposée en une succession de couches planes infiniment fines, de densité surfacique $d\sigma(X', Y')$. Il s'agit à nouveau de déterminer la composante verticale de l'attraction gravitationnelle résultante en utilisant la relation 4.16 déjà établie lors de l'étude de la compensation isostatique selon de modèle d'Airy.

Pour obtenir l'effet gravitationnel total, il suffit d'intégrer la relation précédente sur l'épaisseur de la croûte en négligeant la topographie dont la contribution est du second ordre. Tous calculs faits, l'effet gravitationnel de la topographie compensée s'écrit donc :

$$g_{\text{topoc}}(X, Z) = 2\pi G \left(\rho_c h_1 + \int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') e^{kZ'} \right) e^{-kZ} e^{ikX} \quad \text{pour } Z > 0. \quad (4.26)$$

La relation 4.26 est analogue à celle obtenue dans le cas de la compensation d'Airy (cf Éq. 4.15) excepté pour l'amplitude. Il s'agit à nouveau d'un effet gravitationnel sinusoïdal, de même fréquence spatiale que la topographie dont l'amplitude dépend à présent de l'intégrale le long de la verticale de variation de densité $\Delta \rho_1$.

Examinons à présent les situations limites déjà étudiées dans la cas d'Airy. Si $k e_c \ll 1$, c'est-à-dire $e_c \ll \lambda$, alors, pour tout $Z' \in [-e_c, 0]$, $|k Z'| \ll 1 \Rightarrow e^{-k Z'} \rightarrow 1$. Il en résulte :

$$\int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') e^{k Z'} \rightarrow \int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') = -\rho_c h_1$$

Dans ce cas, d'après la relation 4.26 : $g_{\text{topoc}}(X, Z) \rightarrow 0$.

Ce résultat est analogue à celui obtenu pour la compensation d'Airy : à grande longueur d'onde, l'effet gravitationnel de la topographie compensée est nul et l'anomalie à l'air libre non corrélée à la topographie.

Dans le cas inverse où $k e_c \gg 1$, autrement dit, $\lambda \ll e_c$, il vient alors pour tout $Z' \in [-e_c, 0]$, $|k Z'| \gg 1$ et $k Z' < 0$, donc $e^{k Z'} \rightarrow 0$. Il en résulte :

$$\int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') e^{k Z'} \rightarrow 0 \Rightarrow g_{\text{topoc}}(X, Z) \rightarrow 2\pi G \rho_c h_1 e^{i k X} e^{-k Z}.$$

À nouveau, ce cas limite donne un résultat identique à celui de la compensation d'Airy : à courte longueur d'onde, l'effet gravitationnel de la topographie compensée au point $P(X, Z = 0)$ est celui d'un plateau infini de densité constante égale à ρ_c et d'épaisseur égale à $h_t(X)$. Par conséquent, l'anomalie de Bouguer simple ne sera pas corrélée à la topographie.

Envisageons à présent le cas où la variation de densité $\Delta \rho$ ne dépend pas de la cote Z' , mais seulement de la position horizontale X' . La variation de densité est alors uniforme le long des colonnes de matière d'abscisse X' fixée. La condition d'équilibre isostatique 4.23 s'écrit alors :

$$(\rho_c + \Delta \rho(X')) (h_t(X') + e_c) = \rho_c e_c,$$

d'où il résulte, au premier ordre :

$$\Delta \rho(X') = -\rho_c \frac{h_t(X')}{e_c} \Rightarrow \Delta \rho_1 = -\rho_c \frac{h_1}{e_c}.$$

L'effet de la topographie compensée sur le plan $Z = 0$ s'exprime alors, en utilisant 4.26, par :

$$g_{\text{topoc}}(X, Z)|_{Z=0} = 2\pi G \rho_c \left(1 - \frac{1 - e^{-k e_c}}{k e_c}\right) h_1 e^{i k X}. \quad (4.27)$$

Cette dernière relation nous donne également la fonction de transfert et l'anomalie à l'air libre dans le cas de la compensation de Pratt qui s'exprime par :

$$F_{\text{Pratt}}(k) = 2\pi G \rho_c \left(1 - \frac{1 - e^{-k e_c}}{k e_c}\right). \quad (4.28)$$

À grande longueur d'onde ($k e_c \ll 1$) $\Rightarrow 1 - e^{-k e_c} = k e_c - (1/2)(k e_c)^2$, cette fonction de transfert devient :

$$F_{\text{Pratt}}(k) \approx 2\pi G \rho_c \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} k e_c\right)\right),$$

d'où, après simplification :

$$F_{\text{Pratt}}(k) \approx 2\pi G \rho_c k \frac{e_c}{2}.$$

Dans ce cas précis, la fonction de transfert d'Airy (cf Éq. 4.18) donnerait :

$$F_{\text{Airy}}(k) \approx 2\pi G \rho_c k e_c = 2 F_{\text{Pratt}}(k).$$

Ainsi, pour une grande longueur d'onde et une amplitude de la topographie fixées, l'effet gravitationnel de la topographie compensée selon Airy est-il deux fois plus grand que celui obtenu selon Pratt. Cette particularité mathématique indique clairement que le comportement des deux modèles diffère suffisamment à grande longueur d'onde pour qu'ils ne puissent pas être confondus.

L'ondulation du géoïde $N_{\text{Pratt}}(X)$ mesurable en surface dans le cas d'une topographie compensée, se détermine par la même méthode que celle utilisée précédemment pour la compensation d'Airy, qui a permis d'aboutir à la relation 4.20. Il vient, tous calculs faits :

$$N_{\text{Pratt}}(X) = 2\pi G \left(\rho_c h_1 + \int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') e^{kZ'} \right) \frac{e^{ikX}}{g_a k}. \quad (4.29)$$

À grande longueur d'onde ($k e_c \ll 1$) et pour tout $Z' \in [-e_c, 0]$, il vient au premier ordre :

$$e^{kZ'} \approx 1 + kZ'.$$

L'équation 4.29 peut alors s'écrire :

$$N_{\text{Pratt}}(X) \approx \frac{2\pi G}{g_a k} \left(\rho_c \underbrace{h_1 e^{ikX}}_{h_t(X)} + \int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') e^{ikX} + \int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') k Z' e^{ikX} \right).$$

En cas d'équilibre isostatique, il vient :

$$\rho_c h_t(X) + \int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') e^{ikX} = 0.$$

L'ondulation du géoïde aux grandes longueurs d'onde qui satisfait la compensation de Pratt s'écrit alors, tous calculs faits :

$$N_{\text{Pratt}}(X) \approx \frac{2\pi G}{g_a} \int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') Z' e^{ikX}. \quad (4.30)$$

En reprenant l'équation 4.29 avec une variation de densité ne dépendant pas de la cote Z' , il vient :

$$N_{\text{Pratt}}(X) = 2\pi G \rho_c \left(1 - \frac{1 - e^{-ke_c}}{ke_c} \right) \frac{h_1 e^{ikX}}{g_a k}. \quad (4.31)$$

Enfin, la relation précédente se simplifie encore pour aboutir à une relation de proportionnalité entre l'ondulation du géoïde et la topographie :

$$N_{\text{Pratt}}(X) \approx \frac{\pi G \rho_c e_c}{g_a} h_t(X). \quad (4.32)$$

Cette dernière relation est analogue à celle obtenue pour l'ondulation du géoïde dans le cas d'Airy (cf Éq. 4.21) à un facteur 2 près.

Compensation	Grandeur	
	Air libre $\Delta g_{FA}(X)$	Géoïde $N(X)$
Airy	$2\pi G \rho_c (1 - e^{-k e_c}) h_t(X)$	$\frac{2\pi G \rho_c e_c}{g_a} h_t(X)$
Pratt généralisée	$2\pi G \rho_c h_t(X) + \dots$	$\frac{2\pi G h_t(X)}{g_a h_1} \times \dots$
	$2\pi G \rho_c \left(\frac{1}{\rho_c} \int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') e^{kZ'} \right) e^{ikX}$	$\int_{-e_c}^0 dZ' \Delta \rho_1(Z') Z' e^{ikX}$
Pratt uniforme	$2\pi G \rho_c \left[1 - \frac{1 - e^{-k e_c}}{k e_c} \right] h_t(X)$	$\frac{\pi G \rho_c e_c}{g_a} h_t(X)$

TABLEAU 4.1 – Tableau récapitulatif des expressions de l'anomalie à l'air libre $\Delta g_{FA}(X)$ et des onduations du géoïde $N(X)$ mesurables sur une Terre à topographie sinusoïdale, monochromatique, unidimensionnelle $h_t(X) = h_1 e^{ikX}$ suivant le type de compensation isostatique considérée. L'ondulation du géoïde correspond seulement à celle engendrée par une topographie de grande longueur d'onde ($\lambda \gg e_c$).

4.2.2 Effets de la flexion élastique de la lithosphère

Les modèles de compensation isostatique envisagés précédemment supposent implicitement que la croûte se brise sous l'effet de la charge constituée par la topographie. L'équilibre isostatique s'établit alors entre les différents « morceaux » de croûte qui reposent sur le manteau. Or il s'avère que le comportement rhéologique de l'écorce terrestre jusqu'à la lithosphère permet d'envisager des déformations élastiques. Dans ce cas, la flexion élastique de la lithosphère induit des variations du champ gravitationnel qui doivent être visibles dans les anomalies de gravité. Pour rendre compte de ce phénomène, nous allons étudier un modèle physique simple de flexion élastique de la lithosphère dans lequel cette dernière est supposée se comporter comme une plaque mince.

4.2.2.1 Mise en équation

Considérons une plaque lithosphérique d'épaisseur e_l , infiniment étendue dans la direction de $\hat{e}_y$ (Fig. 4.13). Le plan horizontal (OXY) est tel qu'en l'absence de déformation, les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sont planes, parallèles au plan (OXY), et de cotes respectives $Z = +e_l/2$ et $Z = -e_l/2$. La croûte d'épaisseur e_c et de densité homogène ρ_c forme la partie supérieure de la lithosphère; la quantité e_c est donc la profondeur du Moho lorsque la plaque n'est pas déformée.

Le manteau lithosphérique est également supposé de densité homogène égale à ρ_m et le contraste de densité entre le manteau lithosphérique et l'asthénosphère est supposé négligeable. La présence d'une topographie constitue une charge pour la lithosphère que nous supposons unidimensionnelle. Soit $L_s(X)$ la charge par unité de surface qui s'applique alors sur la lithosphère, exerçant ainsi une contrainte gravitaire. La réponse de l'asthénosphère à la charge transmise par la lithosphère correspond à la poussée d'Archimède.

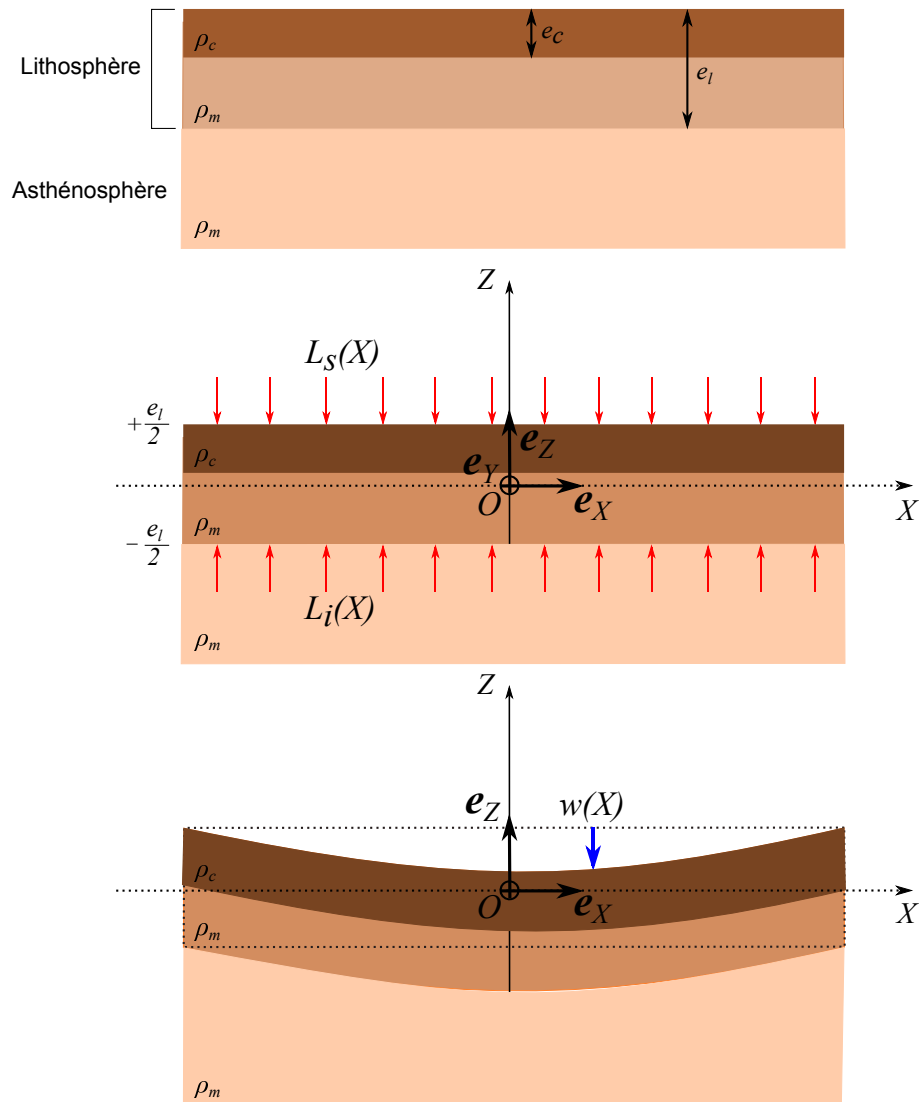


FIGURE 4.13 – Déflexion de la lithosphère élastique sous l'effet de charge dû à la lithosphère. Cette dernière est assimilée ici à une plaque mince élastique, d'épaisseur e_l , placée au-dessus de l'asthénosphère, de densité ρ_m . La partie supérieure de la lithosphère est constituée de la croûte d'épaisseur e_c et de densité ρ_c . En dessous de la croûte, le reste de la lithosphère est supposé de densité ρ_m .

Soit $L_i(X)$ la charge par unité de surface exercée sur la base de la lithosphère par l'asthénosphère; cette dernière correspond ici à une contrainte hydrostatique. Le problème consiste à déterminer la forme prise par la plaque à l'équilibre et d'en déduire les effets sur le champ de gravité.

À ce stade, deux hypothèses de travail sont nécessaires pour la validité du modèle de plaque mince :

1. les déformations induites doivent être de faible amplitude, c'est-à-dire très inférieures à l'épaisseur e_l de la plaque;
2. les longueurs d'onde des effets de charge doivent également être très inférieures à l'épaisseur e_l .

Compte tenu des hypothèses sur lesquelles le modèle repose, il est clair que les contraintes sont essentiellement verticales. Le déplacement de la plaque va donc s'effectuer dans la direction de $\hat{e}_Z$, de façon uniforme pour tous les points de la plaque situés dans un même plan vertical. En conséquence, si $\mathbf{w}$ désigne le vecteur déplacement alors il peut s'exprimer par :

$$\mathbf{w}(X) = -w(X) \hat{e}_Z, \quad (4.33)$$

avec $w(X) > 0$ (resp. < 0) lorsque le déplacement a lieu dans la direction des $Z < 0$ (resp. > 0). La quantité w correspond ici à la *déflexion* de la section de la lithosphère dans un plan vertical.

La théorie de la déformation des plaques minces stipule que l'équation différentielle satisfaite par la déflexion w dans le cas considéré, est donnée par :

$$D \frac{d^4 w}{dX^4} = L_s(X) - L_i(X), \quad (4.34)$$

où D est un paramètre physique de la plaque, appelé *rigidité flexurale*.

La rigidité flexurale est liée à deux paramètres élastiques de la plaque, à savoir le *module d'Young* E mesuré en $N m^{-2}$, et le coefficient de Poisson ν sans dimension par :

$$D = \frac{E e_l^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (4.35)$$

Ainsi définie, la rigidité flexurale est un paramètre physique homogène à une énergie ($N m$) qui constitue une sorte « d'inertie » de la flexion de la plaque vis-à-vis de la charge.

4.2.2.2 Réponse harmonique de la lithosphère

Considérons à nouveau une topographie sinusoïdale, monochromatique, dont la hauteur h_t est supposée mesurée depuis la surface supérieure de la lithosphère, et donnée en un point d'abscisse X par la relation :

$$h_t(X) = h_1 e^{ikX}.$$

L'hypothèse de plaque mince implique que la longueur d'onde λ de la topographie soit grande devant l'épaisseur e_l ($\lambda \gg e_l$). La charge supérieure est constituée par le poids par unité de surface de la topographie, ce qui se traduit par :

$$L_s(X) = \rho_c g_a h_t(X) = \rho_c g_a h_1 e^{ikX}. \quad (4.36)$$

La poussée d'Archimède qui apparaît pour compenser cet excès de charge résulte de la déflexion du Moho dans le manteau lithosphérique qui rompt l'équilibre hydrostatique dans l'asthénosphère. Afin d'obtenir l'expression de la contrainte hydrostatique $L_i(X)$, il suffit d'écrire une équation d'équilibre hydrostatique à la base de la lithosphère en un point défléchi et loin de la zone de déflexion, ce qui se traduit par :

$$L_i(X) + (\rho_c (e_c + w(X)) + \rho_m (e_l - e_c)) g_a = (\rho_c e_c + \rho_m (e_l - e_c) + \rho_m w(X)) g_a.$$

Cette relation suppose implicitement la lithosphère incompressible et le champ gravitationnel uniforme sur l'épaisseur de la lithosphère. Il en découle :

$$L_i(X) = (\rho_m - \rho_c) g_a w(X). \quad (4.37)$$

La combinaison des relations 4.36 et 4.37 avec l'équation différentielle 4.34, permet d'établir que le déplacement w est sinusoïdal, monochromatique, de la forme $w_1 e^{ikX}$ avec une amplitude $w_1(k)$ donnée par :

$$w_1(k) = \frac{\rho_c g_a h_1}{D k^4 + (\rho_m - \rho_c) g_a}. \quad (4.38)$$

La connaissance de la déflexion de l'interface lithosphère/asthénosphère qui est aussi celle du Moho, va nous permettre de calculer l'effet gravitationnel g_{defl} correspondant. En effet, les effets de charge et de déflexion sont équivalents à ceux produits par deux couches superficielles de matière :

1. une couche de densité surfacique $\sigma_s(X) = \rho_c h_1 e^{ikX}$, de cote $Z = +e_l/2$ qui représente la charge gravitaire de la topographie au sommet de la croûte ;
2. une couche de densité surfacique $\sigma_i(X) = (\rho_c - \rho_m) w_1 e^{ikX}$, de cote $Z = -e_c + (e_l/2)$ qui représente le contraste négatif de densité induit par la déflexion du Moho.

La relation 4.16 permet de déterminer l'effet gravitationnel correspondant qui s'exprime par :

$$g_{\text{defl}}(X, Z) = 2\pi G \left[\rho_c h_1 e^{-k\left(Z - \frac{e_l}{2}\right)} + (\rho_c - \rho_m) w_1 e^{-k\left(Z + e_c - \frac{e_l}{2}\right)} \right] e^{ikX}.$$

En calculant cet effet à la surface de la lithosphère de cote $Z = +e_l/2$ avec la relation 4.38, il vient :

$$g_{\text{defl}}(X, Z = +e_l/2) = 2\pi G \rho_c \left[1 - \frac{(\rho_m - \rho_c) g_a}{D k^4 + (\rho_m - \rho_c) g_a} e^{-ke_c} \right] h_t(X). \quad (4.39)$$

Le raisonnement précédent peut être mené de façon complètement similaire pour la lithosphère océanique en remplaçant la croûte par une couche d'eau. La relation correspondante s'obtient simplement en remplaçant la densité de la croûte par celle de l'eau et l'épaisseur de la croûte par la profondeur de l'océan.

La relation 4.39 présente également une certaine analogie formelle avec l'effet gravitationnel d'une topographie compensée selon le modèle d'Airy (cf Tab. 4.1). La différence vient du facteur :

$$\alpha(k) = \frac{(\rho_m - \rho_c) g_a}{D k^4 + (\rho_m - \rho_c) g_a}, \quad (4.40)$$

qu'il est possible d'écrire en fonction d'une longueur d'onde caractéristique λ_{defl} définie par :

$$\lambda_{\text{defl}} = 2\pi \left(\frac{D}{(\rho_m - \rho_c) g_a} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.41)$$

sous la forme suivante :

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda_{\text{defl}}}{\lambda} \right)^4}. \quad (4.42)$$

Muni de cette longueur d'onde caractéristique, les expressions de l'amplitude de la déflexion et de l'effet gravitationnel de surface deviennent :

$$w(X) = \alpha(\lambda) \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} h_t(X), \quad (4.43)$$

$$g_{\text{defl}}(X, Z = +e_l/2) = 2\pi G \rho_c \left[1 - \alpha(\lambda) e^{-ke_c} \right] h_t(X).$$

Le facteur α est d'autant plus proche de 1 que l'effet gravitationnel correspondant s'apparente à celui obtenu dans le cas d'une compensation isostatique d'Airy. Il est donc souvent appelé *degré de compensation isostatique* (TURCOTTE et SCHUBERT, 2014). Remarquons que ce degré vaut exactement 1/2 c'est-à-dire 50 % lorsque $\lambda = \lambda_{\text{defl}}$.

Envisageons à présent les deux cas limites $\lambda \gg \lambda_{\text{defl}}$ et $\lambda \ll \lambda_{\text{defl}}$.

Dans le premier cas : $\frac{\lambda_{\text{defl}}}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \alpha(\lambda) \rightarrow 1$. Rappelons, de plus, que l'hypothèse de plaque mince requiert la condition $\lambda \gg e_l > e_c$ donc $k e_c \ll 1 \Rightarrow e^{-k e_c} \rightarrow 1$. Ce cas limite correspond à une compensation isostatique d'Airy puisque la déflection du Moho vérifie précisément :

$$w(X) \rightarrow \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} h_t(X),$$

et l'effet gravitationnel correspondant est nul.

Dans le deuxième cas : $\frac{\lambda_{\text{defl}}}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow \alpha(\lambda) \rightarrow 0$. La déflection est alors nulle et l'effet gravitationnel correspond à celui d'un plateau infini de densité ρ_c et d'épaisseur $h_t(X)$ puisque $g_{\text{defl}}(X, Z = +e_l/2) \rightarrow 2\pi G \rho_c h_t(X)$.

Ce modèle indique que la déflection de la lithosphère reste faible dans les courtes longueurs d'onde de la topographie. Cette constatation reste encore valable dans le cas où la condition $\lambda \gg e_l$ n'est plus respectée, si bien que les effets de courte longueur d'onde ne sont pas visibles dans l'anomalie de Bouguer. À plus grande longueur d'onde, la situation s'inverse et le maintien de la topographie repose sur l'effet combiné des contraintes hydrostatiques et des contraintes élastiques de cisaillement dans la lithosphère. Une décorrélation apparaît entre l'anomalie à l'air libre et les grandes longueurs d'onde de la topographie. Dans le cas limite des très grandes longueurs d'onde, la déflection et l'effet gravitationnel correspondant s'identifient à ceux rencontrés dans la compensation d'Airy; seules les contraintes hydrostatiques entrent en jeu dans ce cas.

La gravimétrie permet ici la détermination expérimentale de la rigidité flexurale D à partir de la fonction de transfert entre l'anomalie à l'air libre et le topographie (cf §4.2.1.3), identifiée à la fonction $F_{\text{defl}}(k)$ définie par :

$$F_{\text{defl}}(k) = 2\pi G \rho_c \left[1 - \alpha(k) e^{-k e_c} \right]. \quad (4.44)$$

Étant donné les paramètres élastiques de la lithosphère (module d'Young E et coefficient de Poisson ν), il est possible d'estimer l'épaisseur élastique e_l de la lithosphère. Prenons des valeurs typiques de la lithosphère océanique, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} D &= 2 \times 10^{23} \text{ Nm}; \\ E &= 70 \text{ GPa}; \\ \nu &= 0,25 \\ \rho_m &= 3400 \text{ kgm}^{-3}; \\ \rho_c &= 2700 \text{ kgm}^{-3}; \end{aligned}$$

il vient alors numériquement : $e_l = 30 \text{ km}$ et $\lambda_{\text{defl}} = 460 \text{ km}$.

La compensation isostatique d'Airy opère donc pour les très grandes longueurs d'onde de la topographie ($\lambda \gg 460$ km). À courte longueur d'onde ($30 \text{ km} \ll \lambda \ll 460 \text{ km}$), la déflexion est négligeable et la compensation inopérante. La transition progressive entre ces deux situations de maintien de la topographie est illustrée sur la figure 4.14 qui représente le graphe de l'évolution du degré de compensation isostatique en fonction de la longueur d'onde. Ce dernier passe de 20 % à 80 % pour des longueurs d'onde comprises entre 300 et 700 km.

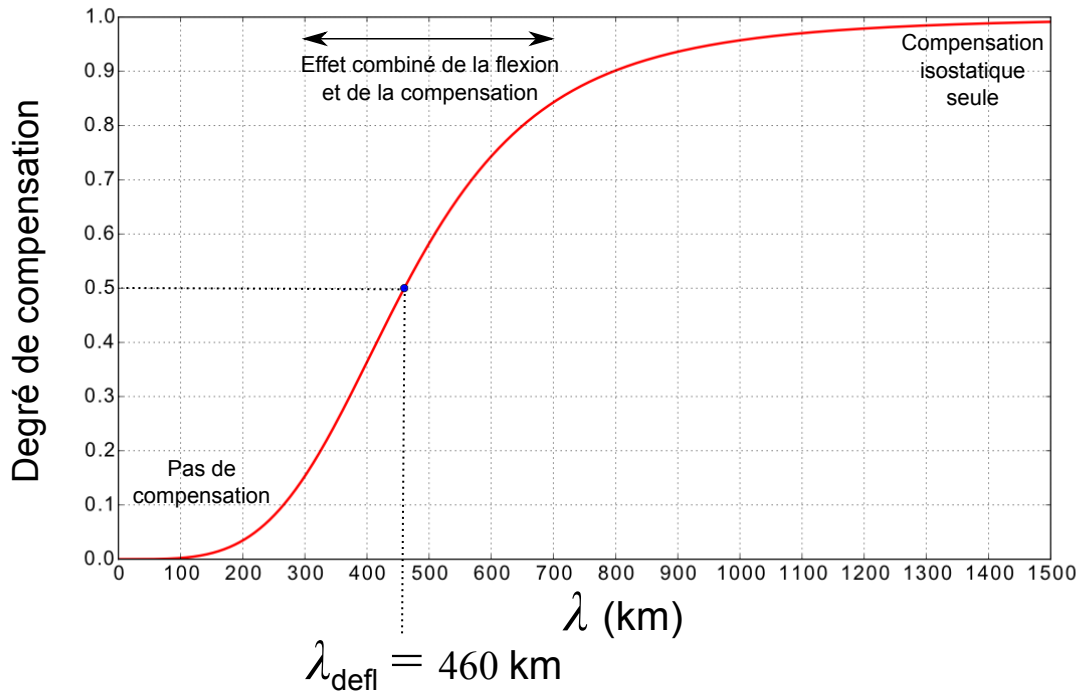


FIGURE 4.14 – Degré de compensation isostatique en fonction de la longueur d'onde de la topographie. La variation monotone croissante de ce degré indique que la topographie est d'autant plus compensée que sa longueur d'onde est grande. La longueur d'onde λ_{defl} , égale ici à 460 km, correspond au seuil au-delà duquel le degré de compensation dépasse 50 %, c'est-à-dire lorsque plus de 50 % du maintien de la topographie vient de la compensation isostatique.

L'ondulation du géoïde $N_{\text{defl}}(X)$ qui découle de ce modèle s'obtient par à un raisonnement analogue à celui mené au §4.2.1.3 pour la compensation isostatique d'Airy. Pour une topographie monochromatique $h_t(X)$, il vient tous calculs faits :

$$N_{\text{defl}}(X) = \frac{2\pi\rho_c}{g_a k} \left(1 - \alpha(k) e^{-k e_c}\right) h_t(X). \quad (4.45)$$

Pour les longueurs d'onde grandes devant l'épaisseur de la croûte, l'expression précédente se simplifie en :

$$N_{\text{defl}}(X) \approx \frac{2\pi\rho_c}{g_a k} (1 - \alpha(k) + k \alpha(k) e_c) h_t(X). \quad (4.46)$$

Remarquons que pour les longueurs d'onde très supérieures à λ_{defl} , le facteur de compensation α tend vers 1 d'où une expression de l'ondulation identique à celle d'Airy (cf Tab. 4.1) :

$$N_{\text{defl}}(X) \rightarrow \frac{2\pi\rho_c}{g_a k} \times k e_c h_t(X) = \frac{2\pi\rho_c e_c}{g_a} h_t(X).$$

Autrement, et de façon générale, le facteur multiplicatif de la topographie dépend de la longueur d'onde; il n'y a donc plus proportionnalité entre l'ondulation du géoïde et la topographie.

4.2.3 Isostasie thermique

L'un des succès les plus éclatants de la théorie de l'isostasie, consiste en l'explication du fonctionnement des dorsales océaniques. Ces dernières séparent au moins deux plaques lithosphériques qui s'éloignent l'une de l'autre sous l'effet de la remontée par convection de matériaux en provenance de l'asthénosphère. Durant leur parcours, ces matériaux se refroidissent et contribuent à épaissir la lithosphère qui s'enfonce alors progressivement. Les données bathymétriques montrent que la profondeur de l'océan varie proportionnellement à la racine carré de la distance à l'axe de la dorsale. Pour une vitesse d'éloignement des plaques constante, cette distance est elle-même proportionnelle à l'âge de la lithosphère. Par conséquent, la profondeur de l'océan s'avère proportionnelle à la racine carré de l'âge de la lithosphère. Nous allons voir, ci-après, que cette dépendance s'explique parfaitement à partir d'un modèle mêlant conduction de la chaleur et compensation isostatique, appelé *isostasie thermique*.

4.2.3.1 Description du modèle

Pour simplifier le problème, nous envisageons ici une dorsale infiniment étendue dans la direction $\hat{e}_Y$ (Fig. 4.15). Chaque section transversale de la lithosphère peut être considérée comme une succession de colonnes, soumises à un fort gradient vertical de température.

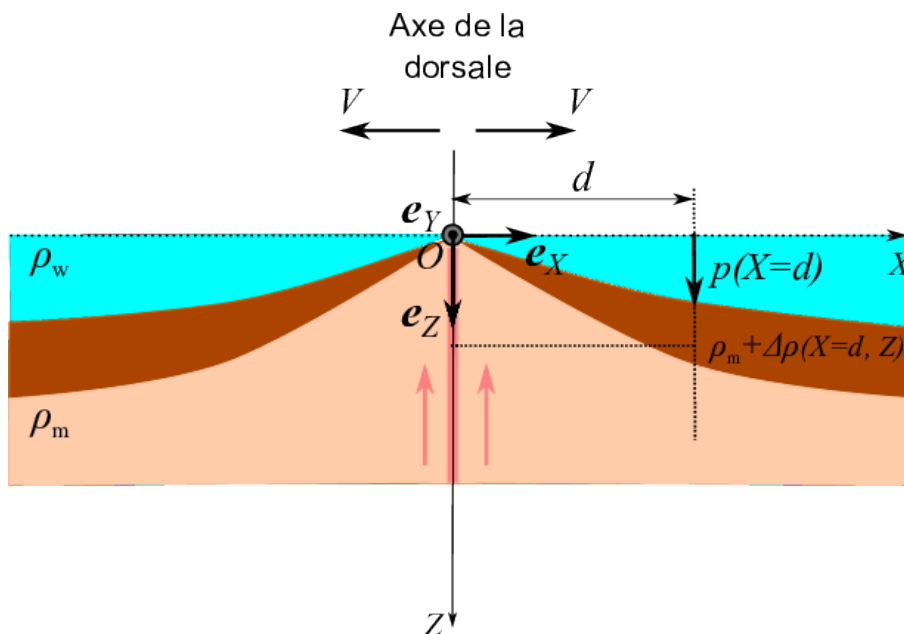


FIGURE 4.15 – Coupe schématique d'une dorsale océanique qui montre le flux de chaleur ascendant. En s'éloignant de l'axe de la dorsale, la lithosphère se refroidit et subit une subsidence pour rétablir l'équilibre hydrostatique. Le modèle permet de déterminer l'évolution de la profondeur de l'océan $p(X)$ le long de l'axe $\hat{e}_Y$ en supposant la vitesse V d'expansion de la dorsale constante.

Nous supposerons en outre que la conduction de la chaleur s'effectue exclusivement dans la direction verticale ($\hat{e}_Z$) et qu'il n'y a aucun échange thermique dans la direction latérale ($\hat{e}_X$). Le vecteur $\hat{e}_Z$ est ici orienté vers la bas. Le sommet de chaque colonne de matière se situe à la cote $Z = 0$. Les colonnes sont également supposées infiniment étendues vers le bas ($Z \rightarrow +\infty$).

Déterminons tout d'abord la distribution de température $T(Z, t)$ le long d'une colonne de matière. L'équation de diffusion de la chaleur le long de la colonne s'écrit alors :

$$\partial_t T = \kappa \partial_Z^2 T, \quad (4.47)$$

où κ est la diffusivité thermique du matériau (unité : $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$).

La résolution d'une telle équation nécessite de fixer les conditions initiales et aux limites. Nous supposerons la température initiale uniforme dans la colonne, égale à celle de l'asthénosphère T_m , exceptée en surface. Les conditions initiales s'expriment donc par :

$$\forall Z > 0, \quad T(Z, t = 0) = T_m, \quad (4.48)$$

$$T(Z = 0, t = 0) = T_s, \quad (4.49)$$

où T_s est la température de surface.

Cette hypothèse se justifie pleinement de par la lenteur de la conduction de la chaleur comparée à la convection. La remontée des matériaux en provenance de l'asthénosphère est donc beaucoup plus rapide que la perte de chaleur par conduction en surface.

Les conditions aux limites s'expriment par :

$$\forall t > 0, \quad T(Z = 0, t) = T_s, \quad (4.50)$$

$$T(Z \rightarrow +\infty, t) = T_m. \quad (4.51)$$

La solution de l'équation 4.47 compte tenu des conditions initiales 4.48, 4.49 et des conditions aux limites 4.50, 4.51, s'écrit alors :

$$T(Z, t) = T_m + (T_s - T_m) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right], \quad (4.52)$$

où « erf » désigne la fonction « erreur » définie pour tout $x \geq 0$ par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (4.53)$$

La connaissance de la distribution des températures permet de déterminer celle des densités. Si la variation de température reste modérée, l'accroissement de la densité dû au refroidissement, est proportionnel à la différence de températures. Plus précisément, si ρ et ρ_m désignent les densités obtenues respectivement aux températures T_m et T , alors il vient au premier ordre :

$$\rho \approx \rho_m [1 + \alpha (T_m - T)], \quad (4.54)$$

où α désigne le coefficient de dilatation thermique des matériaux de l'écorce terrestre.

L'accroissement de densité $\Delta\rho(Z, t)$ suite au refroidissement de la température T_m à la température T s'exprime donc par :

$$\Delta\rho(Z, t) = \rho(Z, t) - \rho_m = \rho_m \alpha (T_m - T),$$

d'où il vient avec la relation 4.52,

$$\Delta\rho(Z, t) = \rho_m \alpha (T_m - T_s) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right] \quad (4.55)$$

Cette dernière équation implique effectivement l'accroissement de la densité avec le temps en un point donné, puisque le facteur $\rho_m \alpha (T_m - T_s)$ est positif et la fonction $x \mapsto \operatorname{erf}(x)$, croissante et inférieure à un.

L'accroissement de la densité de la colonne de matière entraîne nécessairement sa subsidence pour garantir le maintien de l'équilibre hydrostatique. Soit $p(t)$ la profondeur atteinte par le sommet de la colonne de matière à l'instant t , suite à l'accroissement de sa densité de ρ_m à $\rho_m + \Delta\rho$. Si S désigne la section de la colonne, la variation de masse due à la subsidence à l'issue de laquelle l'eau a remplacé les matériaux terrestres jusqu'à la profondeur p , s'exprime par :

$$(\rho_w - \rho_m) S p(t),$$

où ρ_w désigne la densité de l'eau de mer.

Cette variation de masse doit être entièrement compensée par l'accroissement global de la masse de la colonne, lequel est supposé réparti depuis son sommet ($Z = 0$) jusqu'à sa base ($Z \rightarrow +\infty$); cet accroissement s'exprime par :

$$\int_0^{+\infty} dZ \Delta\rho(Z, t) S.$$

L'équation qui traduit l'équilibre hydrostatique de la colonne s'écrit donc :

$$\int_0^{+\infty} \Delta\rho(Z, t) S dZ + (\rho_w - \rho_m) S p(t) = 0.$$

En isolant la profondeur $p(t)$, il vient :

$$\begin{aligned} (\rho_m - \rho_w) p(t) &= \int_0^{+\infty} dZ \rho_m \alpha (T_m - T_s) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right] \\ &= \int_0^{+\infty} du 2\sqrt{\kappa t} \rho_m \alpha (T_m - T_s) [1 - \operatorname{erf}(u)]. \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\int_0^{+\infty} du [1 - \operatorname{erf}(u)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

il vient finalement l'équation d'évolution temporelle de la profondeur de l'océan :

$$p(t) = 2\alpha (T_m - T_s) \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \frac{\rho_m}{\rho_m - \rho_w}. \quad (4.56)$$

4.2.3.2 Bathymétrie et ondulation du géoïde sur les dorsales

L'équation 4.56 confirme la dépendance de la profondeur avec la racine carré du temps. Si V désigne la vitesse d'éloignement des plaques lithosphériques, supposée constante, alors la distance d parcourue par une colonne de matière à l'instant t , est simplement égale à $V t$. La relation 4.56 traduit donc également la proportionnalité de la bathymétrie avec la racine carré de la distance d :

$$p(t) \sim \sqrt{d(t)}.$$

Le graphe donnant l'évolution de la profondeur de l'océan en fonction de la distance à l'axe de la dorsale (resp. en fonction de l'âge de la lithosphère) est donné sur la figure 4.16. Il a été tracé pour les valeurs des paramètres géophysiques suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_m &= 3,3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}; \\ \rho_w &= 1,02 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}; \\ \alpha &= 3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}; \\ T_m - T_s &= 1,3 \times 10^3 \text{ K}; \\ \kappa &= 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}; \\ V &= 50 \text{ mm/an.} \end{aligned}$$

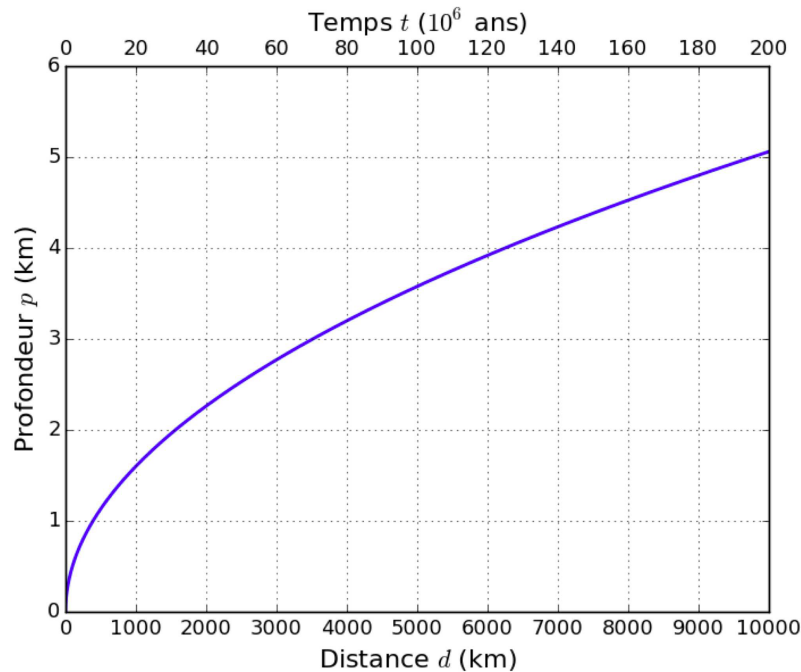


FIGURE 4.16 – Graphe de l'évolution de la profondeur de l'océan en fonction de la distance à l'axe d'une dorsale océanique et, de façon équivalente, en fonction de l'âge de la lithosphère.

Ce graphe montre typiquement une profondeur océanique comprise entre 3 et 4 km à 5 000 km de l'axe de la dorsale pour une lithosphère âgée de 100 millions d'années. En réalité, la dépendance de la bathymétrie avec l'âge de la lithosphère océanique – ou, de façon équivalente, avec la distance à l'axe de la dorsale – disparaît après seulement quelques milliers de kilomètres au – delà de l'axe de la dorsale. La profondeur tend alors à rester constante. Ce phénomène résulte vraisemblablement du flux permanent de chaleur sous la lithosphère océanique qui limite le refroidissement de cette dernière.

Déterminons à présent l'ondulation du géoïde N_{rid} le long d'un profil orthogonal à l'axe de la dorsale. La modélisation qui consiste à considérer la lithosphère océanique comme une succession de colonnes de matière de densités croissantes, surmontées d'eau de mer, et en équilibre hydrostatique, s'apparente à celle de la compensation de Pratt généralisée (cf §4.2.1.3). Nous avons d'ores et déjà, établi l'expression de l'ondulation du géoïde dans le cas d'une topographie sinusoïdale parfaitement compensée selon le modèle de Pratt (cf Tab. 4.1), et de longueur d'onde λ très grande comparée à la profondeur de compensation e_c ($\lambda \gg e_c$). Autrement dit, si $\Delta\rho_1(Z)$ désigne la variation de densité nécessaire pour la compensation de la topographie de hauteur $h_t(X) = h_1 e^{ikX}$ alors, l'ondulation du géoïde $N(X)$ s'exprime par :

$$N(X) = \frac{2\pi G}{g_a} \left(\int_{-e_c}^0 dZ' \Delta\rho_1(Z') Z' \right) e^{ikX}.$$

En remarquant que l'amplitude de cette ondulation est indépendante de k , il est possible de généraliser l'expression précédente au cas d'une topographie quelconque en ajoutant toutes les contributions de ses composantes spectrales. Il vient alors :

$$N(X) = \frac{2\pi G}{g_a} \left(\int_{-e_c}^0 dZ' \Delta\rho_1(X, Z') Z' \right).$$

Dans le cas d'une colonne de matière de lithosphère océanique, les variations latérales de densité proviennent :

- du contraste de densités causé par le remplacement des roches par l'eau de mer jusqu'à la profondeur p , suite à la subsidence;
- de l'accroissement de densité $\Delta\rho$ suite au refroidissement.

En tenant compte de ces deux phénomènes et sachant que chaque colonne est supposée infiniment étendue vers le bas ($Z > 0$), l'expression de l'ondulation du géoïde N_{rid} au point d'abscisse $X = Vt$ s'écrit :

$$N_{\text{rid}}(X) = \frac{2\pi G}{g_a} \left[\int_{p(X)}^0 dZ (\rho_w - \rho_m) Z + \int_{+\infty}^0 dZ \Delta\rho(Z, X) Z \right].$$

En toute rigueur, la borne inférieure de la seconde intégrale impliquée dans cette relation, devrait être limitée à une profondeur p_{max} très inférieure à la plus petite longueur d'onde λ_{min} observable pour les variations latérales de densité $\Delta\rho(Z, X)$. En fait, la décroissance très rapide de la fonction $Z \mapsto \Delta\rho(Z, X)$ avec la profondeur Z permet de confondre avec une très bonne approximation les intégrales :

$$\int_{p_{\text{max}}}^0 dZ \Delta\rho(Z, X) Z \approx \int_{+\infty}^0 dZ \Delta\rho(Z, X) Z.$$

Il vient ensuite, en passant, à une expression en fonction du temps t :

$$N_{\text{rid}}(t) = \frac{2\pi G}{g_a} \left[-\frac{(\rho_w - \rho_m) p^2(t)}{2} + \rho_m \alpha (T_m - T_s) \int_{+\infty}^0 dZ \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right) Z \right].$$

Sachant que :

$$\int_0^{+\infty} du u [1 - \operatorname{erf}(u)] = \frac{1}{4},$$

et compte tenu de la relation 4.56, il vient, tous calculs faits :

$$N_{\text{rid}}(t) = -\frac{2\pi G}{g_a} \rho_m \alpha (T_m - T_s) \kappa \left(1 - \frac{2\alpha (T_m - T_s) \rho_m}{\rho_m - \rho_s} \right) t. \quad (4.57)$$

L'ondulation du géoïde varie donc linéairement avec l'âge de la lithosphère, en supposant une ondulation nulle à l'axe de la dorsale. Une évaluation numérique du coefficient de proportionnalité, à partir des paramètres géophysiques définis précédemment, conduit une valeur négative égale à $-1,6 \times 10^{-1} \text{ m}/10^6 \text{ ans}$. C'est donc un creusement du géoïde qui est observé qui peut atteindre 32 m au bout de 200 millions d'années, c'est-à-dire à 10 000 km de l'axe de la dorsale (cf Fig. 4.16).

Le modèle de refroidissement de la lithosphère utilisé ici, confirme donc de façon éclatante la dépendance en $\sqrt{t}$ (ou $\sqrt{a}$) de la profondeur océanique depuis l'axe de la dorsale. L'observation du creusement du géoïde, à l'échelle régionale, fournit alors un indicateur du mécanisme de contraintes mis en jeu pour soutenir la lithosphère océanique depuis sa génération au niveau de la dorsale. Il est clair que le mécanisme réel résulte de la contribution d'effets combinés de flexion élastique et de compensation isostatique, qui marquent de façon différente la carte des ondulations du géoïde. La réalisation de modèles de géoïde de qualité, à une échelle régionale, constitue ici un enjeu crucial pour la compréhension des phénomènes géophysiques, qui se manifestent au niveau des dorsales océaniques.

4.2.4 Retour sur les grandes longueurs d'onde du géoïde

À ce stade, nous avons étudié les ondulations du géoïde engendrées par des phénomènes – tels la compensation isostatique et la flexion –, qui affectent la lithosphère. Les grandes longueurs d'onde des ondulations du géoïde ($\gg e_c, \lambda_{\text{defl}}$) apparaissent alors proportionnelles à celles de la topographie. La question qui se pose ensuite est de savoir si cette relation se maintient pour les très grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire de l'ordre du rayon terrestre de la Terre. Puisque l'atténuation des grandes longueurs d'onde avec la distance à la source est faible, il est envisageable que même des phénomènes profonds influencent de manière tangible les ondulations du géoïde.

Le développement des modèles sismologiques globaux au milieu des années 80 a permis d'apporter des éléments de réponse. Ces modèles ont révélé des variations latérales des vitesses de propagation des ondes sismiques dans le manteau, ou anomalies de vitesse, associées à des anomalies thermiques. Ces dernières sont supposées à l'origine des mouvements de convection de matière dans le manteau. Ces anomalies de vitesse signalent également des anomalies de densité, qui leur sont proportionnelles en première approximation. Si un excès local de masse cause théoriquement une déflexion de la surface du géoïde, l'amplitude

de cette dernière peut être atténuée par les défauts de masse successifs engendrés par le fléchissement des couches de matière dans l'écorce terrestre, déformées justement par l'excès de masse. Cet effet dépend non seulement de l'extension et de la localisation de l'excès de masse, mais aussi de la viscosité des matériaux qui composent les couches successives.

En considérant une distribution de densité déduite des modèles sismologiques, le problème direct du calcul du déplacement vertical des couches de matière peut être formulé complètement étant donné les profils internes de viscosité. Les ondulations du géoïde s'en déduisent alors aisément. À l'inverse, il est possible d'ajuster les valeurs des profils de densité pour qu'ils coïncident avec les observations des ondulations du géoïde. Les résultats de ce problème inverse indiquent que les degrés harmoniques de degré inférieur à 8 – c'est-à-dire de longueur d'onde supérieur à 5 000 km – s'ajustent convenablement avec une réduction de variance de 70 à 80 %. Un tel ajustement s'effectue au prix d'une augmentation du contraste de viscosité entre le manteau supérieur et inférieur de 1 à 2 ordres de grandeur. Le modèle Preliminary Reference Earth Model (PREM) (DZIEWONSKI et ANDERSON, 1981) situe la limite entre le manteau inférieur et supérieur vers 670 km de profondeur. Cet exemple illustre comment l'interprétation des très grandes longueurs d'onde du géoïde permet d'affiner nos connaissances des paramètres physiques de l'intérieur de la Terre à l'échelle du manteau, d'où l'importance de mesurer ces dernières plus précisément possible.

4.3 Variations temporelles de la gravité

Tout instrument de mesure de la pesanteur immobile à la surface de la Terre, enregistre des variations dans le temps de la pesanteur, qui résultent de phénomènes géophysiques et astronomiques, périodiques, non périodiques voire subits tel un séisme ou une éruption volcanique. Deux approches sont alors possibles : la première consiste à modéliser ces variations des mesures gravimétriques afin de ne conserver que la partie statique exploitable dans les applications en géodésie et géophysique ; la seconde étudie systématiquement ces variations en vue d'en tirer des informations sur les transferts de masse à la surface et à l'intérieur de la Terre. Le terme de pesanteur peut donc être entendu suivant deux acceptions différentes – pesanteur « statique » ou « dynamique » – selon que les parties variables sont intégrées ou non à la définition de cette dernière.

Nous allons examiner ci-après, à l'aide de modèles physiques simples, les effets dynamiques induits sur la pesanteur par les marées terrestres, le rebond post-glaciaire et les variations des paramètres de la rotation de la Terre, sans oublier d'évoquer les marées océaniques, atmosphériques et les phénomènes de surcharge, plus largement détaillés dans BOY (2007). Il s'agit de montrer ici l'intérêt de la mesure des variations temporelles de la pesanteur et leur utilisation en géophysique.

4.3.1 Marées terrestres

Le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil résulte, pour l'essentiel, de la compensation qui s'opère entre l'attraction gravitationnelle luni-solaire et la force d'inertie centrifuge. Il s'agit ici d'un mouvement d'ensemble correspondant à celui du centre de masse de la Terre. En revanche, l'attraction gravitationnelle luni-solaire ne s'exerce pas de façon uniforme de sorte que les éléments de matière terrestre subissent une force résiduelle dite « de marée », qui dépend de la position relative de la Terre, du Soleil et de la Lune.

Ce mouvement relatif, couplé à la rotation de la Terre sur elle-même, font que la force de marée en un point donné résulte d'une combinaison de contributions périodiques dont les fréquences se répartissent, par ordre d'importance décroissante, autour de 2 cycles/jour, 1 cycle/jour et 0 cycle/jour. Ces contributions correspondent respectivement à des périodes semi-diurne, diurne et de longue période. Les gammes de fréquences qui correspondent aux périodes semi-diurne et diurne sont respectivement :

1. $\left[2 - \frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10}\right]$ cycles/jour;
2. $\left[1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right]$ cycles/jour.

La gamme « longue période » s'étend de 1 cycle/18,6 ans à 1 cycle/10 jours avec des fréquences dominantes qui valent, respectivement, 1 et 2 cycles/an, 1 et 2 cycles/mois, et enfin, 1 cycle/18,6 ans.

Les forces de marée constituent donc des excitations périodiques qui vont entraîner des déformations de la Terre et des océans. Le calcul des déformations nécessite, en particulier, l'expression de la force de marée qui peut être déduite de celle d'un potentiel gravitationnel que nous allons à présent étudier.

4.3.1.1 Potentiel de marée

Considérons, en première approche, le potentiel gravitationnel $V(\mathbf{x}_P)$ créé en un point P de la Terre par la Lune seule, supposée ponctuelle. Soient M_L la masse de la Lune et $\mathbf{x}_L$ le rayon vecteur de la Lune. L'expression de $V(\mathbf{x}_P)$ s'écrit d'après la loi de Newton 2.2 :

$$V(\mathbf{x}_P) = \frac{G M_L}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_L\|}. \quad (4.58)$$

Soient $(\lambda_P, \theta_P, r_P)$ et $(\lambda_L, \theta_L, r_L)$ les coordonnées sphériques respectives des points P et L . D'après la relation 2.32, il est possible de donner une expression du potentiel 4.58 sous la forme d'une décomposition en harmoniques sphériques :

$$V(\mathbf{x}_P) = \frac{4\pi G M_L}{r_L} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2l+1} \right) \sum_{m=-l}^{+l} \left(\frac{r_P}{r_L} \right)^l Y_l^{m*}(\lambda_L, \theta_L) Y_l^m(\lambda_P, \theta_P). \quad (4.59)$$

L'accélération gravitationnelle de la Lune dérive directement de ce potentiel. Tous les termes du développement qui dépendent de la position du point P , c'est-à-dire de λ_P, θ_P et r_P vont donc contribuer à cette accélération gravitationnelle.

Interprétons physiquement les termes de plus bas degré du potentiel 4.59. Le terme de degré 0 étant constant, aucune action mécanique n'en dérive; sa prise en compte n'est donc pas nécessaire. Parmi les termes de degré 1, figure le terme $r Y_1^0$ proportionnel à $r \cos \theta_P$ donc à la cote Z_P du point P . La composante verticale de la force qui en dérive est donc constante. Les deux autres termes de degré 1, $r Y_1^{\pm 1}$, sont proportionnels respectivement aux termes $r \sin \theta_P e^{\pm i \lambda_P}$ c'est-à-dire à $X_P + i Y_P$ où X_P et Y_P sont les deux autres coordonnées cartésiennes du point P . Les composantes horizontales de la force qui dérivent de ces termes sont donc également constantes. Finalement, les termes de degré 1 engendrent une force constante en tout point de la Terre qui correspond exactement à la force d'inertie centrifuge, qui permet le mouvement relatif orbital de la Terre et de la Lune.

Un calcul plus poussé de la résultante des forces par unité de volume qui s'exerce sur la Terre, nécessite l'évaluation de l'intégrale de volume $\int_{\text{Terre}} \rho(\mathbf{x}_P) \vec{\nabla} V(\mathbf{x}_P) d^3\mathbf{x}_P$. Ce dernier montre que, dans le cas d'une Terre à symétrie sphérique, aucune contribution additionnelle à la résultante n'est créée par des termes de degré strictement supérieur à 1.

En outre, dans le cas du couple Terre/Lune, le rapport r_P/r_L est de l'ordre de $1/60$ en admettant $r_L \approx 3,84 \cdot 10^5$ km et $r_P \approx 6,371 \cdot 10^3$ km. L'erreur relative commise en négligeant les termes de degré strictement supérieur à 2 dans l'expression 4.59 est donc au plus de 1,7 %. Avec ces considérations, le potentiel qui résulte de la différence entre l'attraction gravitationnelle de la Lune et l'accélération centrifuge de la Terre, s'exprime par :

$$\frac{4\pi G M_L}{5} \left(\frac{r_P}{r_L}\right)^2 \sum_{m=-2}^{+2} Y_2^{m*}(\lambda_L, \theta_L) Y_2^m(\lambda_P, \theta_P).$$

Ce dernier constitue le *potentiel de marée* de la Lune à la surface de la Terre. Mis sous une forme plus classique, le potentiel de marée V_{ma} peut s'écrire :

$$V_t(P) = \text{Re} \left[\left(\frac{r_P}{a}\right)^2 \sum_{m=0}^2 C_m Y_2^{m*}(\lambda_L, \theta_L) Y_2^m(\lambda_P, \theta_P) \right], \quad (4.60)$$

où la relation de définition des *coefficients du potentiel de marée* s'écrit :

$$C_m = \frac{4\pi G M_L a^2}{5 r_L^2} \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m = 1, 2, \end{cases} \quad (4.61)$$

et a désigne le rayon moyen de la Terre.

La troncature du développement au degré 2 est encore plus pertinente dans le cas du couple Terre/Soleil. De plus, le rapport M/r^3 dans le cas du Soleil vaut environ 0,46 fois celui de la Lune, si bien que les coefficients des marées solaires sont deux fois moins grands que ceux des marées lunaires.

La dépendance temporelle du potentiel de marée vient du mouvement de la Lune par rapport au repère terrestre dans lequel les coordonnées du point P et de la Lune sont exprimées. Plus précisément, les quantités r_L – donc C_m – et θ_L varient selon le mouvement orbital de la Lune et la longitude λ_P est, en plus, influencée par la rotation de la Terre. Si $\alpha_L(t)$ désigne l'ascension droite de la Lune à un instant t alors la longitude λ_L s'exprime, à une constante additive près, par :

$$\lambda_L(t) = \alpha_L(t) - \Omega t,$$

où Ω désigne la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

La dépendance en temps se porte donc sur le terme Y_2^{m*} qui peut s'écrire :

$$Y_2^{m*}(\lambda_L, \theta_L) = Y_2^{m*}(\alpha_L, \theta_L) e^{i m \Omega t}.$$

Le potentiel de marée avec une dépendance temporelle explicite s'exprime donc par :

$$V_t(P) = \text{Re} \left[\left(\frac{r_P}{a}\right)^2 \sum_{m=0}^2 C_m Y_2^{m*}(\alpha_L, \theta_L) e^{i m \Omega t} Y_2^m(\lambda_P, \theta_P) \right].$$

Le développement ci-dessus fait apparaître explicitement trois fréquences angulaires dominantes Ω/π ($m = 2$), $\Omega/(2\pi)$ ($m = 1$) et 0 ($m = 0$) qui correspondent respectivement aux termes semi-diurne, diurne et longue période. Ces termes sont modulés par des facteurs variables dans le temps, périodiques, de la forme $C_m Y_2^{m*}(\alpha_L, \theta_L)$. Les fréquences qui entrent en jeu dans ces facteurs de modulation sont liées aux mouvements orbitaux de la Terre et de la Lune; ils correspondent donc aux termes de « longues périodes » dont les fréquences sont comprises entre 1 cycle/18,6 ans et 1 cycle/10 jours. Le spectre temporel du potentiel de marée dans ce modèle, est donc constitué de trois bandes de fréquences centrées respectivement sur les fréquences 0 , Ω et 2Ω . Pour préciser encore les variations temporelles du potentiel de marée, considérons la décomposition en série de Fourier du terme périodique $C_m Y_2^{m*}(\alpha_L, \theta_L)$ sous la forme :

$$C_m Y_2^{m*}(\alpha_L, \theta_L) = \sum_{\omega'} G_m(\omega') e^{i(\omega' t + \Phi_{\omega'})},$$

où ω' est une basse fréquence de la gamme des « longues périodes » ($\omega' \ll \Omega$) et $G_m(\omega')$, $\Phi_{\omega'}$, respectivement l'amplitude et la phase à l'origine du terme de fréquence ω' .

Le potentiel de marée s'exprime alors par :

$$V_t(P) = \text{Re} \left[\left(\frac{r_P}{a} \right)^2 \sum_{m=0}^2 \sum_{\omega'} G_m(\omega') e^{i((\omega' + m\Omega)t + \Phi_{\omega'})} Y_2^m(\lambda_P, \theta_P) \right], \quad (4.62)$$

avec $\omega' \ll \Omega$.

Le potentiel de marée au point P et à l'instant t résulte donc de la contribution de termes périodiques $V'_t(\mathbf{x}_P, t)$, de fréquences $\omega = \omega' + m\Omega \approx m\Omega$, $m = 0, 1, 2$, de la forme :

$$V'_t(\mathbf{x}_P, t) = k \left(\frac{r_P}{a} \right)^2 Y_2^m(\lambda_P, \theta_P) e^{i\omega t}, \quad (4.63)$$

où k désigne une constante de proportionnalité.

Ces derniers se répartissent selon trois bandes de fréquences disjointes et une dépendance spatiale proportionnelle à $r_P^2 Y_2^m(\lambda_P, \theta_P)$.

4.3.1.2 Réponse mécanique de la Terre aux marées

D'un point de vue mécanique, les marées engendrent des forces d'excitation périodiques sur le corps terrestre. La réponse de ce corps peut être étudiée en se donnant des paramètres rhéologiques et en résolvant l'équation du mouvement de chaque volume élémentaire qui constitue le solide. Plus précisément, soit $\mathbf{s}(\mathbf{x}_P, t)$ le vecteur mesurant le déplacement du point P à l'instant t sous l'effet des marées modélisées par le potentiel de marée $V'_t(\mathbf{x}_P, t)$ (cf Éq. 4.63). Ce déplacement obéit à une équation aux dérivées partielles qui découlent de la seconde loi de Newton, et s'écrit :

$$\rho \partial_t \mathbf{s} = \mathbf{f}_i + \rho \vec{\nabla} V'_t, \quad (4.64)$$

où ρ désigne la densité au point P , et $\mathbf{f}_i$ la résultante des contraintes internes à la Terre au point P et dépend donc de sa rhéologie. L'utilisation d'un modèle de Terre permet d'exprimer mathématiquement la résultante $\mathbf{f}_i$ sous la forme d'une loi de force de la forme :

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_P, t) = \mathcal{L}(\mathbf{s}(\mathbf{x}_P, t), t),$$

où $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel qui traduit le comportement rhéologique de la Terre.

La résolution de cette équation requiert également des conditions aux limites qui consistent, en général, à annuler les contraintes normales à la surface de la Terre.

La recherche des solutions périodiques en temps de l'équation sans second membre $\rho \partial_t \mathbf{s} = \mathcal{L}(\mathbf{s}(\mathbf{x}_P, t), t)$, revient à déterminer les *modes propres* d'oscillation de la Terre, dont la mesure expérimentale est plutôt du ressort de la sismologie. Le problème mathématique de la résolution de l'équation complète peut devenir complexe suivant le type d'excitation. Aussi, allons-nous seulement l'envisager dans le cas simple d'une Terre immobile, à symétrie sphérique. Cette simplification permet de comprendre le principe de calcul sans obscurcir le propos par un formalisme excessif. Remarquons, tout d'abord, que la force d'excitation $\rho \vec{\nabla} V'_t$ est proportionnelle au gradient de $r_P^2 Y_2^m(\lambda_P, \theta_P)$, c'est-à-dire à la somme :

$$\frac{2}{r_P} \hat{\mathbf{e}}_r Y_2^m + r_P^2 \vec{\nabla} Y_2^m.$$

Avec nos hypothèses, la solution de l'équation 4.64 doit nécessairement comporter une combinaison linéaire des vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_r Y_2^m$ et $\partial_\theta Y_2^m$, c'est-à-dire une partie radiale dans la direction de $\hat{\mathbf{e}}_r$, proportionnelle à V'_t et une partie horizontale dans le plan $(\hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\lambda)$, combinaison linéaire des vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_\theta \partial_\theta V'_t$ et $\hat{\mathbf{e}}_\lambda \partial_\lambda V'_t$. Le déplacement mesuré à partir de la sphère $r_P = a$ s'exprime alors en fonction de deux nombres sans dimension h et l , appelés *nombres de Love*, par :

$$\mathbf{s}(\lambda_P, \theta_P, r_P = a, t) = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{h}{g_a} V'_t|_{r_P=a} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{l}{g_a} \partial_\theta V'_t|_{r_P=a} + \hat{\mathbf{e}}_\lambda \frac{l}{g_a \sin \theta_P} \partial_\lambda V'_t|_{r_P=a}, \quad (4.65)$$

où g_a est la pesanteur moyenne à la surface de la Terre.

La déformation de la Terre induit une modification de la distribution de densité d'où une perturbation du potentiel gravitationnel $\tilde{V}_T$. Dans le cas présent, la perturbation est déterminée grâce au troisième nombre de Love k par la relation :

$$\tilde{V}_T(\lambda_P, \theta_P, r_P = a, t) = k V'_t|_{r_P=a}. \quad (4.66)$$

De façon générale, les effets de marée sur le déplacement et le potentiel sont déterminés à l'aide de combinaisons linéaires des nombres de Love h , l et k . Pour une Terre immobile, à symétrie sphérique, les trois nombres de Love sont indépendants de l'ordre m et quasiment constants à toutes les fréquences. Une fois mesurés par des observations, ils peuvent être comparés à leurs expressions théoriques pour estimer, entre autres, les densités et paramètres élastiques de la Terre. Il est clair que l'utilisation des nombres de Love apporte en définitive peu de contraintes à l'inverse de la sismologie, qui peut compter sur pas moins de 1 000 modes propres pour réaliser les mêmes estimations. Néanmoins, l'étude des marées permet l'exploration des basses fréquences temporelles, ce que la sismologie ne permet pas. Or, ce domaine fréquentiel concerne très précisément les comportements anélastiques des matériaux terrestres qui ne sont pas observables autrement. La connaissance des marées s'avère encore plus cruciale lorsqu'il s'agit de corriger des mesures gravimétriques, chose que nous allons étudier à présent.

4.3.1.3 Perturbation des mesures gravimétriques par les marées

Les phénomènes de marée perturbent les mesures du champ de gravité de par :

1. les variations du potentiel gravitationnel dues à l'attraction luni-solaire ;
2. le déplacement de la surface sur laquelle repose le gravimètre dans le champ gravitationnel d'origine.

Envisageons ces deux effets séparément pour ce qui concerne la composante radiale du champ de gravité à partir d'un point P tel que $r_P = a$.

Tout d'abord, le potentiel de marée (cf Éq. 4.61) induit une attraction gravitationnelle dont l'intensité T_1 peut s'exprimer par :

$$T_1 = -\partial_r V'_t|_{r_P=a},$$

d'où il résulte :

$$T_1 = -\frac{2}{a} V'_t|_{r_P=a}. \quad (4.67)$$

En outre, une perturbation du potentiel gravitationnel provient de la redistribution de masse due au déplacement de la surface terrestre. La perturbation de potentiel est donnée par l'équation 4.66 sur la sphère $r_P = a$. En dehors de cette sphère ($r_P > a$), cette perturbation reste harmonique ; le problème se ramène donc à la résolution de l'équation de Laplace $\nabla^2 \tilde{V}_T = 0$ avec $\tilde{V}_T(r_P = a, t) = k V'_t|_{r_P=a}$ donné. Une solution convenable doit être proportionnelle au terme :

$$k \left(\frac{a}{r}\right)^3 Y_2^m(\lambda_P, \theta_P) e^{i\omega t}.$$

Dans ce cas, nécessairement : $\partial_r \tilde{V}_T = -\frac{3}{r} \tilde{V}_T$. L'effet sur l'accélération gravitationnelle s'exprime alors par $T_2 = -\partial_r \tilde{V}_T|_{r=a}$, d'où :

$$T_2 = \frac{3}{a} \tilde{V}_T|_{r=a} = \frac{3}{a} k V'_t|_{r_P=a}. \quad (4.68)$$

Pour évaluer, à présent, la variation de gravité consécutive au déplacement de l'instrument de mesure, il suffit de déterminer la variation de l'accélération gravitationnelle de la Terre GM_T/r_P suite au déplacement radial donné par $(h/g_a) V'_t|_{r_P=a}$, soit :

$$\partial_r \left(\frac{GM_T}{r_P^2} \right)_{r_P=a} \frac{h}{g_a} V'_t|_{r_P=a} = -\frac{2GM_T}{a^3} \frac{h}{g_a} V'_t|_{r_P=a},$$

d'où avec $g_a = GM_T/a^2$, l'expression du terme gravitationnel correspondant :

$$T_3 = -\frac{2h}{a} V'_t|_{r_P=a}. \quad (4.69)$$

En appelant g'_t l'accélération de marée résultante des effets de marée, il vient à partir des équations 4.67, 4.68 et 4.69 :

$$g'_t = T_1 + T_2 + T_3 = -\frac{2}{a} \left(1 - \frac{3}{2}k + h \right) V'_t|_{r_P=a}.$$

Cet effet est directement proportionnel au potentiel de marée $V_t'|_{r_p=a}$. En appelant δ le *facteur gravimétrique* défini par :

$$\delta = 1 - \frac{3}{2}k + h, \quad (4.70)$$

il vient :

$$g_t' = -\frac{2}{a} \delta V_t'|_{r_p=a}. \quad (4.71)$$

Les nombres de Love et le facteur gravimétrique prennent les valeurs typiques suivantes :

$$\begin{aligned} h &\approx 0,6; \\ l &\approx 0,085; \\ k &\approx 0,3; \\ \delta &\approx 1,16. \end{aligned}$$

Puisque $h > l$, les mouvements verticaux induits par les marées sont d'amplitude plus grande que les mouvements horizontaux. Remarquons également que le facteur gravimétrique est proche de 1, qui correspond à la valeur obtenue pour une Terre rigide. Une compensation partielle s'opère donc entre les effets gravitationnels induits par le déplacement vertical et la perturbation du potentiel $\tilde{V}_T$. Outre des variations de la gravité, les marées induisent la déformation de la Terre, ainsi que le basculement et le déplacement de sa surface avec les valeurs typiques ci-après :

$$\begin{aligned} \text{Accélération} &\approx 60 \mu\text{Gal}; \\ \text{Déformation} &\approx 10^{-8}; \\ \text{Basculement} &\approx 0,04'' \text{ d'arc}; \\ \text{Déplacement} &< 1 \text{ m}. \end{aligned}$$

Ces effets sont globalement de faible amplitude dans le cadre du modèle simple de marées terrestres envisagé ici. En réalité, une étude plus raffinée des marées requiert la prise en compte d'effets locaux telles la topographie, la rotation et l'ellipticité de la Terre et enfin la forte contribution des marées océaniques.

Les marées océaniques se manifestent aux mêmes fréquences que les marées terrestres et engendrent deux phénomènes principaux :

- une pression sur la surface terrestre, correspondant à une surpression à marée haute et une dépression à marée basse; cette pression s'appelle *surcharge océanique*;
- un transfert de masse qui entraîne une modification de la gravité.

La modélisation des surcharges océaniques suppose la connaissance préalable d'un modèle de marée, puis le calcul des effets de charge à partir d'une équation analogue à 4.64. Les surcharges océaniques augmentent le déplacement de la surface terrestre d'environ 5 %. Ces effets accroissent cependant le basculement et la déformation de façon plus sensible en zone côtière – jusqu'à 100 % –. La rotation et l'ellipticité influencent plutôt faiblement les amplitudes des effets de marée – à $(1/300)^e$ près en relatif –; l'influence la plus marquante reste l'apparition de variations des nombres de Love avec la fréquence. Enfin, les marées et surcharges dues à l'atmosphère participent également aux contraintes appliquées sur la surface de la Terre à hauteur de 1 %.

4.3.2 Rebond post-glaciaire

Durant la dernière période glaciaire, d'énormes quantités de glace se sont accumulées sur le Canada et l'actuelle Scandinavie atteignant des épaisseurs de 3 à 4 km. Les calottes de glace ont constitué des charges qui ont alors déformé l'écorce terrestre, depuis la lithosphère élastique jusqu'à l'asthénosphère. Elles ont ensuite commencé à fondre il y a 22 000 ans pour disparaître complètement en 13 000 ans. Après le retrait des glaciers, l'écorce terrestre a progressivement repris sa forme initiale par un rebond élastique suivi de la relaxation visqueuse des contraintes de cisaillement, accumulées dans l'asthénosphère lors du retrait des glaces. Le phénomène de *rebond post-glaciaire* débuté il y a plus de 9 000 ans, continue encore aujourd'hui. La comparaison des vitesses de surrection avec celles prédites par les modèles de rebond, ont permis notamment l'estimation de la viscosité du manteau. Nous nous proposons de donner le principe de cette estimation à partir d'un modèle physique très simple.

4.3.2.1 Modèle simple de rebond

Nous supposons la Terre constituée par un matériau homogène, incompressible, dont la rhéologie correspond à celle d'un solide visco-élastique de Maxwell, défini par la viscosité η (unité : Pas ou $\text{N m}^{-2} \text{s}$) et le paramètre de Lamé μ (unité : N m^{-2}). Dans un repère $(OXYZ)$, ce matériau remplit initialement le demi-espace $Z < 0$ (Fig. 4.17).

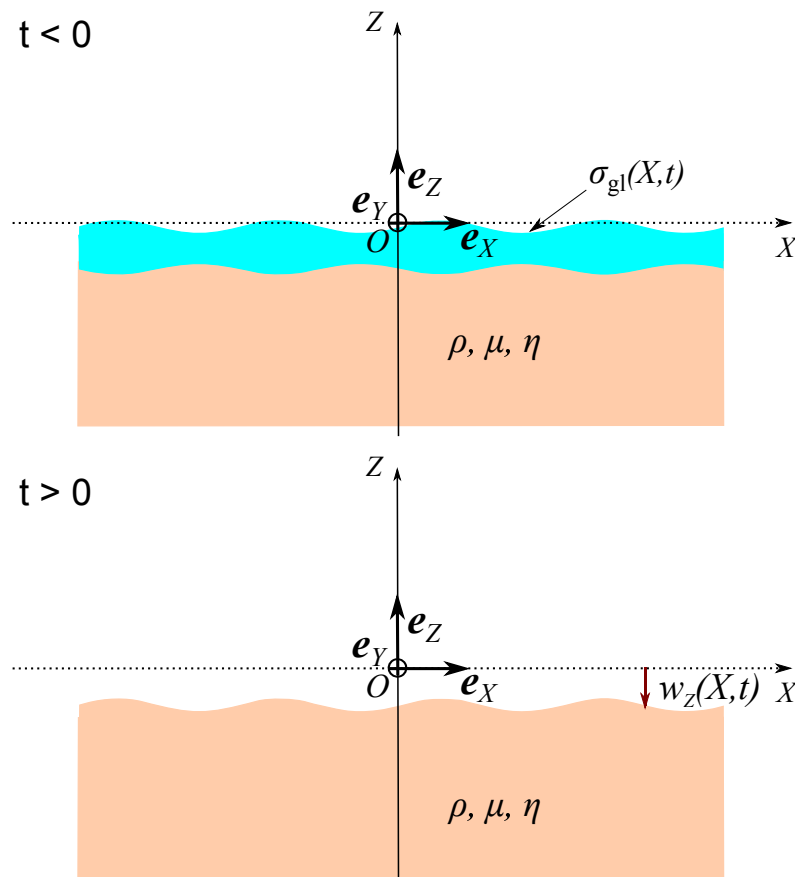


FIGURE 4.17 – Modélisation du rebond post-glaciaire et mise en équation. Avant le rebond ($t < 0$), la calotte glaciaire surmonte un matériau incompressible infiniment étendu, de densité ρ , de viscosité η et dont le premier paramètre de Lamé est noté μ . Cette dernière est supposée disparaître instantanément à $t = 0$. Le problème consiste à déterminer le déplacement vertical de la surface de la Terre $w_Z(X, t)$ après le retrait des glaces ($t > 0$).

Pour simplifier, nous envisageons une déformation de la surface de la Terre invariante par translation suivant la direction de $\hat{e}_Y$. Le vecteur-déplacement de la surface de la Terre $\mathbf{w}$ est supposé de la forme :

$$\mathbf{w} = w_X(X, Z, t) \hat{e}_X + w_Z(X, Z, t) \hat{e}_Z.$$

Le vecteur $\mathbf{w}$ n'a donc pas de composante suivant $\hat{e}_Y$. En outre, toutes les dérivées partielles par rapport à Y des grandeurs physiques impliquées dans ce problème seront nulles.

Le problème revient ici à la détermination de la composante verticale du vecteur $\mathbf{w}$, soit $w_Z(X, Z, t)$ suite au retrait des glaces modélisées par la topographie sinusoïdale $h_{\text{gl}}(X) = h_1 e^{ikX}$ avec $k > 0$. La distribution de masse σ_{gl} correspondante est supposée surfacique et donnée à l'instant t par :

$$\sigma_{\text{gl}}(X, t) = \begin{cases} \rho_{\text{gl}} h_1 e^{ikX} & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases}, \quad (4.72)$$

où ρ_{gl} désigne la densité de la glace.

Le vecteur-déplacement $\mathbf{w}$ est impliqué dans deux équations fondamentales : la relation contrainte/déformation et la seconde loi de Newton. Nous commencerons la recherche de l'équation d'évolution de $\mathbf{w}$ en supposant le matériau seulement élastique. Le passage au cas d'un matériau visco-élastique pourra s'effectuer à l'aide d'un principe de correspondance.

Soit $\mathbf{t}$ le tenseur d'ordre 2 des contraintes, désigné par son élément générique t_{ij} . La relation entre contrainte et déformation permet de lier les éléments du tenseur $\mathbf{t}$ aux composantes (w_X, w_Y, w_Z) du déplacement par :

$$t_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu (\partial_i w_j + \partial_j w_i), \quad (4.73)$$

où P désigne la pression locale, $i, j = X, Y, Z$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

La seconde loi de Newton appliquée à un élément de matière appartenant au matériau, supposé de densité ρ s'écrit :

$$\rho \partial_t \mathbf{w} = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{t}, \quad (4.74)$$

où $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{t}$ désigne le vecteur dont la composante i est définie par :

$$(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{t})_i = \sum_{k=1}^3 \partial_k t_{ki}. \quad (4.75)$$

Le matériau étant supposé incompressible, le vecteur-déplacement satisfait la relation de « conservation » :

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{w} = \partial_X w_X + \partial_Y w_Y + \partial_Z w_Z = 0. \quad (4.76)$$

Le rebond étant un phénomène lent, il est raisonnable de considérer le matériau dans un état quasi-stationnaire, ce qui entraîne :

$$\partial_t \mathbf{w} \approx 0.$$

La relation 4.74 s'écrit alors comme une relation d'équilibre :

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (4.77)$$

Exprimons le deuxième terme de cette équation à partir de la relation 4.73 ; il vient alors étant donné la relation $\partial_k \partial_i (\dots) = \partial_i \partial_k (\dots)$:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{t})_i &= \sum_{k=1}^3 (-\partial_k P \delta_{ki} + \partial_k (\partial_k w_i + \partial_i w_k)) \\ &= -\partial_i P + \mu \left(\sum_k \partial_{kk}^2 w_i + \partial_i \sum_k \partial_k w_k \right) \\ &= -\partial_i P + \mu \left(\nabla^2 w_i + \partial_i \vec{\nabla} \cdot \mathbf{w} \right). \end{aligned}$$

Le seconde loi de Newton 4.77, compte-tenu de la relation précédente, s'écrit alors :

$$-\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \mathbf{w} + \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{w}) = 0. \quad (4.78)$$

Après simplification étant donné l'incompressibilité du matériau (cf Éq. 4.76), l'équation précédente établit entre la pression P et le vecteur-déplacement $\mathbf{w}$ la relation suivante :

$$\vec{\nabla} P = \mu \nabla^2 \mathbf{w}. \quad (4.79)$$

Les équations 4.76 et 4.79 constituent un jeu d'équations aux dérivées partielles couplées desquelles il faut tirer l'expression du vecteur-déplacement $\mathbf{w}$.

Tout problème de résolution d'équations aux dérivées partielles nécessite la connaissance de conditions aux limites, en particulier sur le plan $Z = 0$. La pression extérieure $P_0(X, t)$ qui s'applique sur ce plan fixe tout d'abord la contrainte verticale, ce qui se traduit par :

$$t_{ZZ} = -P_0(X, t),$$

d'où, à partir de la relation 4.73, la condition aux limites sur la pression :

$$P(X, Z = 0, t) - 2\mu \partial_Z w_X(X, Z = 0, t) = P_0(X, t). \quad (4.80)$$

En outre, aucune contrainte de cisaillement ne s'applique sur le plan $Z = 0$; il vient donc :

$$t_{XZ} = 0,$$

d'où une seconde condition aux limites déduit de la relation 4.73 :

$$\partial_X w_Z(X, Z = 0, t) + \partial_Z w_X(X, Z = 0, t) = 0. \quad (4.81)$$

Enfin, aucune divergence ne doit affecter des grandeurs lorsque Z tend vers $-\infty$, ce qui constitue une ultime condition aux limites.

La pression extérieure P_0 exercée verticalement sur la surface de la Terre comprend la force par unité de surface engendrée par le poids des glaces, soit littéralement, $\sigma_{gl}(X, t) g$, et celle provenant du poids des matériaux terrestres situés au-dessus de la cote $Z = 0$, qui s'exprime par $\rho g w_Z(X, Z = 0, t)$, où ρ désigne la densité des matériaux terrestres. La pression P_0 s'exprime finalement par :

$$P_0(X, t) = \sigma_{gl}(X, t) g + \rho g w_Z(X, Z = 0, t). \quad (4.82)$$

Remarquons que si $w_Z < 0$, le terme $\rho g w_Z(X, Z = 0, t)$ correspond à une dépression, causée par l'absence de matière.

Exploitions à présent les relations 4.76 et 4.79 en vue de déterminer la pression P et le déplacement $\mathbf{w}$. En premier lieu, la relation d'incompressibilité 4.76 implique l'existence d'un vecteur Φ dont $\mathbf{w}$ constitue le rotationnel, c'est-à-dire tel que :

$$\mathbf{w} = \vec{\nabla} \times \Phi.$$

Sachant que $w_Y = 0$ et $\partial_Y(\dots) = 0$, il vient en développant la relation précédente :

$$\begin{cases} w_X &= -\partial_Z \Phi_Y; \\ w_Z &= +\partial_X \Phi_Y. \end{cases}$$

où Φ_Y est la composante suivant $\hat{\mathbf{e}}_Y$ du vecteur Φ .

Autrement dit, il existe une fonction scalaire $\phi(X, Z, t)$ définie par $\phi = -\Phi_Y$, liée aux composantes w_X et w_Z du vecteur $\mathbf{w}$ par :

$$w_X = +\partial_Z \phi; \quad (4.83)$$

$$w_Z = -\partial_X \phi. \quad (4.84)$$

En calculant, en second lieu, le rotationnel de chaque membre de l'équation 4.79, il vient pour le premier membre :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} P = 0,$$

et pour le second membre, sachant que μ est supposé constant,

$$\vec{\nabla} \times (\mu \nabla^2 \mathbf{w}) = \mu \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \mathbf{w}),$$

d'où il résulte :

$$\nabla^2 (\vec{\nabla} \times \mathbf{w}) = 0. \quad (4.85)$$

Seule la composante de $\vec{\nabla} \times \mathbf{w}$ suivant $\hat{\mathbf{e}}_Y$ est non nulle, égale à $\partial_Z w_X - \partial_X w_Z$. D'après la relation 4.85 précédente :

$$\nabla^2 (\partial_Z w_X - \partial_X w_Z) = 0.$$

En explicitant cette dernière relation compte tenu de 4.83 et 4.84, il vient une équation dite *biharmonique*, qui n'est autre que l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction ϕ :

$$(\partial_{ZZZZ}^4 + 2\partial_{XX}^2 \partial_{ZZ}^2 + \partial_{XXXX}^4) \phi = 0. \quad (4.86)$$

Il est clair que la détermination de la fonction ϕ entraîne immédiatement celle des composantes du vecteur-déplacement $\mathbf{w}$ grâce aux relations 4.83 et 4.84.

Il nous faut à présent une équation plus simple donnant la pression, ce qui peut être obtenu en prenant la divergence de chaque membre de l'équation 4.79 :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} P = \vec{\nabla} (\mu \nabla^2 \mathbf{w}) = \mu \nabla^2 \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{w})}_{=0} = 0.$$

Il en résulte l'équation de Laplace pour la pression :

$$\nabla^2 P = 0. \quad (4.87)$$

Les conditions aux limites 4.80 et 4.81 s'expriment à présent en fonction de ϕ par les deux relations :

$$P(X, Z = 0, t) + 2\mu \partial_{XZ}^2 \phi(X, Z = 0, t) = P_0(X, t); \quad (4.88)$$

$$\partial_{ZZ}^2 \phi(X, Z = 0, t) = \partial_{XX}^2 \phi(X, Z = 0, t). \quad (4.89)$$

La dépendance de la topographie glaciaire étant en e^{ikX} (cf Éq. 4.72), nous cherchons des solutions qui préservent cette dépendance, autrement dit, de la forme :

$$P(X, Z, t) = \bar{P}(Z, t) e^{ikX}; \quad (4.90)$$

$$\phi(X, Z, t) = \bar{\phi}(X, t) e^{ikX}. \quad (4.91)$$

où $\bar{P}(Z, t)$ et $\bar{\phi}(X, t)$ sont des amplitudes complexes à déterminer.

Il sera toujours possible ensuite d'étudier une topographie plus complexe à partir de sa transformée de Fourier en considérant les solutions précédentes comme des réponses harmoniques.

Les équations aux amplitudes $\bar{P}(Z, t)$ et $\bar{\phi}(X, t)$ s'obtiennent alors très simplement à partir des relations 4.87 et 4.86 en remplaçant l'opérateur « ∂_X » par « $\times ik$ » ; il vient alors :

$$\partial_Z \bar{P} = k^2 \bar{P}; \quad (4.92)$$

$$(\partial_{ZZZZ}^4 - 2k^2 \partial_{ZZ}^2 + k^4) \bar{\phi} = 0. \quad (4.93)$$

Les conditions aux limites 4.88 et 4.89 concernent à présent les amplitudes complexes $\bar{P}$ et $\bar{\phi}$; elles s'écrivent :

$$\bar{P}(Z=0, t) + 2\mu i k \partial_Z \phi(Z=0, t) = k^2 \bar{P}_0(t); \quad (4.94)$$

$$\partial_{ZZ}^2(Z=0, t) = -k^2 \phi(Z=0, t), \quad (4.95)$$

où $\bar{P}_0$ désigne l'amplitude de la pression P_0 telle que $P_0(X, t) = \bar{P}_0(t) e^{ikX}$.

Les solutions générales des équations 4.92 et 4.93, compte tenu des conditions aux limites 4.88 et 4.89, s'expriment par :

$$\bar{P}(Z, t) = k^2 \bar{P}_0(t) e^{kZ}, \quad (4.96)$$

$$\phi(Z, t) = \bar{\phi}_0(t) (1 - kZ) e^{kZ}, \quad (4.97)$$

où $\bar{\phi}_0(t)$ est une amplitude complexe à déterminer.

La solution en e^{-kZ} a délibérément été écartée de par sa divergence lorsque Z tend vers $-\infty$.

À ce stade, nous pouvons d'ores et déjà exprimer la forme générale des solutions en pression et déplacement qui s'écrivent, d'après les relations 4.83 et 4.84 :

$$P(X, Z, t) = \bar{P}_0(t) e^{kZ} e^{ikX}; \quad (4.98)$$

$$w_X(X, Z, t) = -\bar{\phi}_0(t) k^2 Z e^{kZ} e^{ikX}; \quad (4.99)$$

$$w_Z(X, Z, t) = -\bar{\phi}_0(t) i k (1 - kZ) e^{kZ} e^{ikX}. \quad (4.100)$$

En exprimant la projection suivant $\hat{e}_X$ de l'équation 4.79, et étant donné les relations 4.98 – 4.100 précédentes, il vient :

$$i k \bar{P}_0(t) e^{kZ} e^{ikX} = -2\mu \bar{\phi}_0(t) k^3 e^{kZ} e^{ikX},$$

d'où il résulte :

$$\bar{\phi}_0(t) = -\frac{i}{2\mu k^2} \bar{P}_0(t).$$

En utilisant la relation précédente dans 4.100, il vient :

$$w_Z(X, Z=0, t) = -\frac{\bar{P}_0(t)}{2\mu k} e^{ikX} = -\frac{1}{2\mu k} P_0(X, t).$$

Finalement, compte tenu de la relation 4.82, l'expression du déplacement vertical de la surface terrestre s'exprime par :

$$w_Z(X, Z=0, t) = -\frac{\sigma_{gl}(X, t) g}{2\mu k + \rho g}. \quad (4.101)$$

En supposant la fonte des calottes glaciaires terminée à $t = 0$ (cf Éq. 4.72), l'équation d'évolution de w_Z devient :

$$w_Z(X, Z = 0, t) = \begin{cases} -\frac{\rho_{gl} g h_1}{2\mu k + \rho g} e^{ikX} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (4.102)$$

Cette dernière relation indique que, sous l'effet de la charge des calottes glaciaires, la surface de la Terre défléchit ($w_Z < 0$) jusqu'à ce que les forces de pression verticales s'équilibrent. Dans le cas d'un milieu seulement élastique envisagé ici, la déflexion disparaît « brusquement » dès la disparition des glaces.

L'expression du déplacement vertical dans le cas d'un solide visco-élastique de Maxwell peut s'obtenir aisément à l'aide d'un principe de correspondance qui relie les paramètres de Lamé d'un milieu élastique et d'un milieu visco-élastique. La relation 4.101 qui lie le déplacement vertical w_Z et la densité surfacique de masse σ_{gl} reste encore valable lorsque la densité surfacique varie sinusoïdalement dans le temps.

Considérons donc des variations temporelles sinusoïdales, de pulsation ω , pour la densité surfacique σ_{gl} et étudions la réponse de la surface terrestre en terme de déplacement vertical (réponse harmonique). En appelant $\bar{\sigma}_{gl}(X)$ et $\bar{w}_Z(X)$ les amplitudes complexes de la densité surfacique σ_{gl} et du déplacement vertical w_Z , il vient :

$$\sigma_{gl}(X, t) = \bar{\sigma}_{gl}(X) e^{i\omega t}; \quad (4.103)$$

$$w_Z(X, Z = 0, t) = \bar{w}_Z(X) e^{i\omega t}. \quad (4.104)$$

Dans le cas d'un milieu purement élastique, la relation entre les deux amplitudes $\bar{\sigma}_{gl}(X)$ et $\bar{w}_Z(X)$ s'écrit d'après 4.101 :

$$\bar{w}_Z(X) = -\frac{g \bar{\sigma}_{gl}(X)}{2\mu k + \rho g}.$$

Le principe de correspondance stipule que la relation précédente reste valable dans le cas d'un milieu visco-élastique, à condition de remplacer le paramètre de Lamé μ par le paramètre complexe $\bar{\mu}$ défini par :

$$\bar{\mu}(\omega) = \mu \left(\frac{i\omega}{i\omega + \frac{\mu}{\eta}} \right), \quad (4.105)$$

où η représente la viscosité du milieu.

La connaissance de la réponse harmonique permet de revenir à une expression dans le domaine temporel de l'équation 4.101 en remplaçant la multiplication par le facteur « $i\omega$ » par l'opérateur « ∂_t ».

En partant de la relation :

$$\bar{w}_Z(X) = - \frac{g \bar{\sigma}_{\text{gl}}(X)}{2\mu \frac{i\omega}{i\omega + \frac{\mu}{\eta}} k + \rho g},$$

il vient, tous calculs faits, l'équation aux dérivées partielles en w_Z donnée par :

$$\left((2\mu k + \rho g) \partial_t + \rho g \frac{\mu}{\eta} \right) w_Z(X, Z=0, t) = -g \left(\partial_t + \frac{\mu}{\eta} \right) \sigma_{\text{gl}}(X, t). \quad (4.106)$$

Il suffit à présent de résoudre l'équation 4.106 avec la distribution surfacique de masse $\sigma_{\text{gl}}(X, t)$ décrite par l'équation 4.72. Envisageons le cas $t < 0$. En supposant les calottes glaciaires établies depuis suffisamment longtemps pour qu'il n'y ait plus de subsidence, il est légitime de poser $\partial_t w_Z = 0$ dans l'équation 4.106. Il en résulte :

$$w_Z(X, Z=0, t) = - \frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho} h_1 e^{ikX}, \quad t < 0. \quad (4.107)$$

Cette relation traduit simplement un équilibre isostatique entre la charge constituée par les calottes glaciaires ($\rho_{\text{gl}} h_1 g e^{ikX}$) et la poussée d'Archimède du milieu ($\rho w_Z g$).

À l'instant $t = 0$, la distribution surfacique σ_{gl} subit une discontinuité égale à :

$$-\rho_{\text{gl}} h_1 g e^{ikX}.$$

Pour évaluer la conséquence de cette discontinuité sur le déplacement vertical, il suffit d'évaluer l'intégrale membre à membre de l'équation 4.106 sur un intervalle temporel $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, centré en $t = 0$. Il vient, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} (2\mu k + \rho g) \frac{w_Z(X, Z=0, t=+\varepsilon) - w_Z(X, Z=0, t=-\varepsilon)}{2\varepsilon} + \frac{\rho g \mu}{\eta} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} w_Z(X, Z=0, t') dt' \\ = -g \frac{\sigma_{\text{gl}}(X, t=+\varepsilon) - \sigma_{\text{gl}}(X, t=-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\mu g}{\eta} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\text{gl}}(X, t') dt', \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} (2\mu k + \rho g) (w_Z(X, Z=0, t=+\varepsilon) - w_Z(X, Z=0, t=-\varepsilon)) + 2\varepsilon \frac{\rho g \mu}{\eta} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} w_Z(X, Z=0, t') dt' \\ = -g (\sigma_{\text{gl}}(X, t=+\varepsilon) - \sigma_{\text{gl}}(X, t=-\varepsilon)) - 2\varepsilon g \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\text{gl}}(X, t') dt'. \end{aligned}$$

Les discontinuités étant d'amplitude finie, l'équation précédente après passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ devient :

$$\begin{aligned} (2\mu k + \rho g) (w_Z(X, Z=0, t=0^+) - w_Z(X, Z=0, t=0^-)) &= -g (\sigma_{\text{gl}}(X, t=0^+) \\ &\quad - \sigma_{\text{gl}}(X, t=0^-)). \end{aligned}$$

Compte tenu des relations :

$$\sigma_{\text{gl}}(X, t=0^+) - \sigma_{\text{gl}}(X, t=0^-) = -\rho_{\text{gl}} h_1 g e^{ikX},$$

$$w_Z(X, Z=0, t=0^-) = - \frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho} h_1 e^{ikX},$$

il vient finalement l'expression du déplacement vertical juste après le retrait total des glaces :

$$w_Z(X, Z = 0, t = 0^+) = \left(\frac{\rho_{gl} g}{2\mu k + \rho g} - \frac{\rho_{gl}}{\rho} \right) h_1 e^{ikX}. \quad (4.108)$$

Cette relation indique que la surface de la Terre subit un sursaut vers le haut à l'instant $t = 0$ égal à :

$$\frac{\rho_{gl} g}{2\mu k + \rho g} h_1 e^{ikX}. \quad (4.109)$$

Envisageons enfin l'évolution ultérieure du profil de la surface de la Terre ($t > 0$) avec la condition initiale 4.108. La charge des calottes glaciaires étant nulle ($\sigma_{gl} = 0$), l'équation 4.106 se réduit à l'expression suivante :

$$\partial_t w_Z(X, Z = 0, t) = - \frac{\rho g \mu}{\eta (2\mu k + \rho g)} w_Z(X, Z = 0, t).$$

La fonction $y : t \mapsto w_Z(X, Z = 0, t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{1}{\tau_{reb}} y,$$

avec la condition initiale $y(0) = w_Z(X, Z = 0, t = 0^+)$ et la constante de temps τ_{reb} définie par :

$$\tau_{reb}(k) = \frac{\eta}{\mu} \frac{2\mu k + \rho g}{\rho g} \quad (4.110)$$

Le déplacement recherché s'exprime finalement par :

$$w_Z(X, Z = 0, t) = \left(\frac{\rho_{gl} g}{2\mu k + \rho g} - \frac{\rho_{gl}}{\rho} \right) h_1 e^{ikX} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{reb}}\right), \quad t > 0. \quad (4.111)$$

Pour interpréter le phénomène de rebond dans sa globalité, évaluons ce déplacement à partir des valeurs typiques suivantes :

$$\begin{aligned} \rho &\approx 5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}; \\ g &\approx 10 \text{ m s}^{-2}; \\ \mu &\approx 10^{11} \text{ N m}^{-2}; \end{aligned}$$

il vient tout d'abord :

$$\frac{\rho g}{\mu} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}.$$

En considérant que les longueurs d'onde typiques de la topographie glaciaire (λ) sont très courtes devant le rayon de la Terre (6400 km), il vient l'inégalité :

$$\lambda \ll 6,4 \times 10^6 \text{ m} \Rightarrow k \gg \frac{2\pi}{6,4 \times 10^6} \approx 10^{-6} \text{ m}^{-1}.$$

Ainsi, pour les longueurs d'onde réalistes de la topographie glaciaire, l'inégalité $\mu k \gg \rho g > \rho_{\text{gl}} g$ est-elle toujours vérifiée. Il en résulte une simplification de la constante de temps τ_{reb} et de l'expression du déplacement vertical qui deviennent respectivement :

$$\tau_{\text{reb}}(k) = \frac{\mu}{\eta} \frac{2\mu k}{\rho g}; \quad (4.112)$$

$$w_Z(X, Z = 0, t) = -\frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho} h_1 e^{ikX} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{reb}}}\right), \quad t > 0. \quad (4.113)$$

Avant le fonte des calottes glaciaires ($t < 0$), la surface terrestre subit une dépression égale à $\frac{\rho_{\text{gl}} h_1}{\rho} e^{ikX}$. Juste après la fonte ($t = 0^+$), le rebond élastique entraîne une surrection de la surface de la Terre inférieure à la profondeur de la dépression puisque d'amplitude (cf Éq. 4.109)

$$\frac{\rho_{\text{gl}} g}{2\mu k + \rho g} h_1 \approx \frac{\rho_{\text{gl}} g h_1}{2k\mu} \ll \frac{\rho_{\text{gl}} g h_1}{\rho}.$$

Ensuite ($t > 0$), la profondeur de la dépression diminue exponentiellement, jusqu'à ce que la surface terrestre redevienne horizontale, puisque :

$$w_Z \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad t \rightarrow +\infty.$$

La constante de temps τ_{reb} de cette diminution, est liée à la viscosité via le temps de relaxation τ_M du solide de Maxwell défini par :

$$\tau_M = \frac{\eta}{\mu}. \quad (4.114)$$

Il vient en effet :

$$\tau_{\text{reb}}(k) = \tau_M \frac{2\mu k}{\rho g} \gg \tau_M. \quad (4.115)$$

L'estimation expérimentale de la constante de temps du rebond post-glaciaire conduit donc naturellement à des estimations de la viscosité des matériaux de l'écorce terrestre. Cette constante dépend également de k et donc de la longueur d'onde de la topographie glaciaire en place avant la fonte. Pour une topographie plus réaliste, résultat de la contribution de plusieurs composantes spectrales, il s'avère que les composantes de plus grande longueur d'onde sont celles les plus rapidement atténuées (cf Éq. 4.115). Le phénomène de rebond s'accompagne donc d'une déformation du profil topographique de la surface en plus d'une diminution de son amplitude.

4.3.2.2 Effet sur l'anomalie à l'air libre

Une fois les calottes glaciaires disparues, l'anomalie à l'air libre observable résulte de la contribution gravitationnelle du défaut de masse liée à la déflexion de la surface terrestre. Cette dernière étant d'amplitude très inférieure au rayon de la Terre, il est possible de modéliser le défaut de masse au point $(X, Y, Z = 0)$, à l'instant t , par la densité surfacique de

masse, à variation sinusoïdale selon X , égale à $\sigma_{\text{dep}}(X, t) = \rho w_Z(X, Z = 0, t)$. D'après la relation 4.113, il vient :

$$\sigma_{\text{dep}}(X, t) \exp\left(\frac{t}{\tau_{\text{reb}}}\right) = -\rho \frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho} h_1 e^{ikX} = -\rho_{\text{gl}} h_1 e^{ikX},$$

ce qui indique que la distribution surfacique donnée par le membre de droite est sinusoïdale monochromatique. D'après la relation 4.16, l'effet gravitationnel d'une telle distribution en un point $P(X, Y, Z)$ au-dessus de la surface de la Terre est donné par :

$$-2\pi G \rho_{\text{gl}} h_1 e^{-kZ} e^{ikX}.$$

L'anomalie à l'air libre Δg_{FA} qui résulte de la distribution σ_{dep} s'exprime donc au point P par :

$$\Delta g_{\text{FA}}(X, Z, t) = -2\pi G \rho_{\text{gl}} h_1 e^{-kZ} e^{ikX} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{reb}}}\right). \quad (4.116)$$

L'ondulation du géoïde N_{dep} s'en déduit aisément à l'aide de la relation :

$$N_{\text{dep}}(X, t) = -\frac{1}{g} \int \Delta g_{\text{FA}}(X, Z', t) dZ' \Big|_{Z=0},$$

d'où il vient :

$$N_{\text{dep}}(X, t) = -\frac{2\pi G \rho_{\text{gl}}}{g k} h_1 e^{ikX} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{reb}}}\right). \quad (4.117)$$

Cette théorie prédit donc une décroissance exponentielle de l'amplitude initiale de l'anomalie à l'air libre et du géoïde avec la constante de temps τ_{dep} . Il est clair qu'une fraction de l'amplitude des anomalies à l'air libre négatives, provient vraisemblablement du rebond post-glaciaire (Fig. 4.18, p. 114). D'autres phénomènes géophysiques, telle la convection dans le manteau, ont vraisemblablement un impact similaire sur l'anomalie à l'air libre ou l'ondulation du géoïde. Des observations supplémentaires sont donc indispensables pour estimer plus précisément les paramètres physiques impliqués dans ce phénomène.

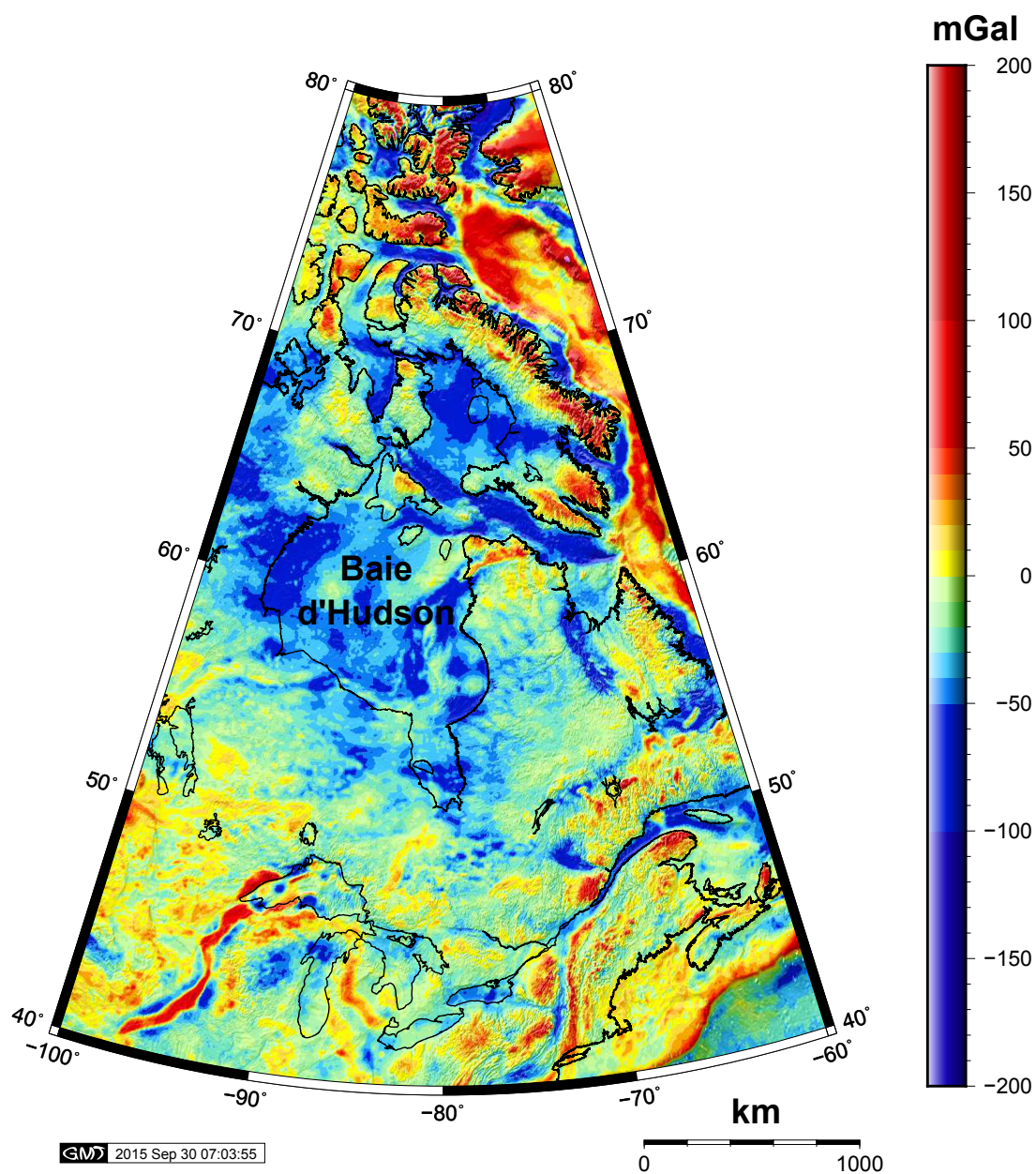


FIGURE 4.18 – Anomalie à l'air libre sur la baie d'Hudson au Canada, extraite du modèle WGM2012 (BONVALOT et al., 2012). Les fortes valeurs négatives de cette anomalie proviendraient en partie de la dépression laissée par le retrait des calottes glaciaires.

Carte produite à l'aide du logiciel GMT

Parmi ces observations, la cartographie des anciennes plages demeurent un moyen fiable pour évaluer le taux de surrection suite au rebond post-glaciaire et estimer les profils de viscosité jusqu'à 1000 km (cf Fig. 4.19, p. 116). En outre, les mesures du taux de variation du facteur J_2 (estimé entre $-2 \times 10^{-11} \text{ an}^{-1}$ et $-3 \times 10^{-11} \text{ an}^{-1}$), des variations séculaires de la vitesse de rotation de la Terre (cf §4.3.3) et, de façon générale, des déplacements verticaux et horizontaux de la surface de la Terre obtenus par géodésie spatiale et à partir de réseaux de gravimètres absolus (cf Chap. 5), fournissent des observations qui intègrent indirectement les effets du rebond post-glaciaire. Enfin, l'étude de l'évolution du niveau des mers à partir des observations des marégraphes doit absolument prendre en compte le phénomène de rebond. Pour s'en convaincre, évaluons la vitesse de surrection due au rebond post-glaciaire pour une valeur de viscosité de $\eta \approx 10^{21} \text{ Pas}$ communément admise pour le manteau supérieur (profondeur $> 670 \text{ km}$).

Le vitesse de surrection $\partial_t w_Z$ s'obtient en dérivant par rapport au temps l'équation 4.113. Il en résulte :

$$\partial_t w_Z(X, Z=0, t) = \frac{\rho_{\text{gl}} h_1}{\rho \tau_{\text{dep}}} e^{ikX} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{reb}}}\right). \quad (4.118)$$

Il s'agit donc d'une vitesse à variation sinusoïdale en X dont l'amplitude $V_{\text{reb}}(t)$ à l'instant t s'exprime par :

$$V_{\text{reb}}(t) = \frac{\rho_{\text{gl}} h_1}{\rho \tau_{\text{dep}}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{reb}}}\right). \quad (4.119)$$

À partir des valeurs numériques ci-après :

$$\begin{aligned} \rho &\approx 5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \\ \rho_{\text{gl}} &\approx 9,2 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}, \\ g &\approx 10 \text{ m s}^{-2}, \\ \mu &\approx 10^{11} \text{ N m}^{-2}, \\ \eta &\approx 10^{21} \text{ N m}^{-2} \text{ s}, \\ h_1 &\approx 3,5 \times 10^3 \text{ m}, \end{aligned}$$

les vitesses de surrection pour trois longueurs d'onde λ de la topographie glaciaire ont été calculées et rassemblées dans le tableau 4.2 (cf p. 116).

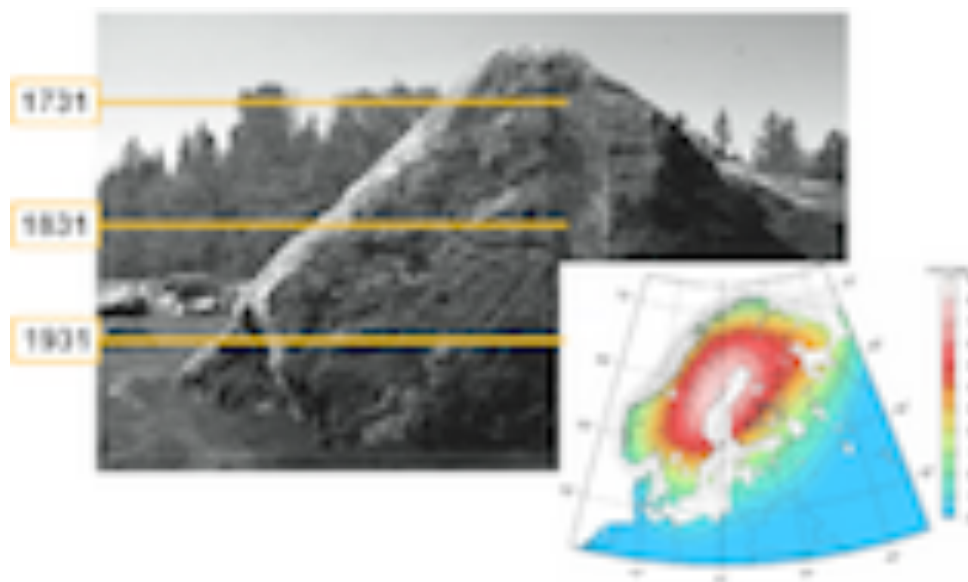


FIGURE 4.19 – Vue du rocher de Lövgrunde situé à 200 km au nord de Stockholm en Suède. Suite au rebond post-glaciaire, ce rocher est remontée de 2,3 m depuis son premier marquage réalisé par Celsius¹ en 1731, ce qui correspond à une vitesse de surrection de 8,3 mm/an (83 cm/siècle). La carte des iso-valeurs des vitesses de surrection dues au rebond post-glaciaire sur la Scandinavie, a été réalisée d'après le modèle « NKG2005LU ».

Droits réservés ©VAN CAMP *et al.* (2011), ©Lantmäteriet (Sweden), Steffen Holger, 2013.

¹ Anders Celsius, astronome suédois, 1701 – 1744.

λ (km)	1	10	100	1000
τ_M (siècle)	3			
τ_{reb} (siècle)	8×10^4	8×10^3	8×10^2	8×10^1
$V_{\text{reb}}(t = 0)$ (m/siècle)	8×10^{-3}	8×10^{-2}	8×10^{-1}	8
$V_{\text{reb}}(t_{\text{actuel}})$ (m/siècle)	8×10^{-3}	8×10^{-2}	7×10^{-1}	3

TABLEAU 4.2 – Amplitudes des vitesses de surrection suite au rebond post-glaciaire calculées pour différentes longueurs d'onde de la topographie glaciaire et une épaisseur de 3,5 km. Le calcul a été réalisé juste après la fonte des glaces ($t = 0$) et à l'époque actuelle ($t = 90$ siècles). Comme prévu, la vitesse de surrection augmente avec la longueur d'onde, passant de 8 mm/siècle à 8 m/siècle lorsque la longueur d'onde varie de 1 à 1 000 km. À 100 km de longueur d'onde, la vitesse atteint 70 cm/siècle, soit 0,7 mm/an à l'époque actuelle. Cette vitesse de surrection ne peut être négligée lors de la mesure de la variation du niveau des mers estimée entre 1,5 et 2 mm/an.

L'analyse des vitesses de surrection indique très clairement que pour des longueurs d'onde réalistes de la topographie glaciaire, le taux de surrection de la surface de la Terre suite au rebond post-glaciaire peut atteindre, voire dépasser, 1 mm/an, c'est-à-dire au moins 50 % de la vitesse estimée de l'élévation du niveau des mers (2 mm/an). Il s'agit donc là d'une erreur systématique à corriger sur les mesures des marégraphes.

L'étude menée précédemment sur les vitesses de surrection peut être réalisée de la même façon pour l'anomalie à l'air libre de surface et l'ondulation du géoïde. En dérivant par rapport au temps les relations 4.116 et 4.117, il vient :

$$\partial_t \Delta g_{\text{FA}}(X, Z = 0, t) = \frac{2\pi G \rho_{\text{gl}} h_1}{\tau_{\text{reb}}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{reb}}}\right) e^{ikX}; \quad (4.120)$$

$$\partial_t N_{\text{deb}}(X, t) = \frac{2\pi G \rho_{\text{gl}} h_1}{g k \tau_{\text{reb}}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{reb}}}\right) e^{ikX}. \quad (4.121)$$

Dans le cadre de ce modèle simplifié, les résultats numériques (cf Tab. 4.3) indiquent que les variations temporelles de l'anomalie à l'air libre due au rebond post-glaciaire restent inférieures à 1 mGal/siècle soit 10 $\mu\text{Gal}/\text{an}$. Les ondulations du géoïde varient également avec un taux très faible inférieur à 10 cm/siècle, soit 0,1 mm/an. Il s'agit donc là de variations de très petites amplitudes, détectables seulement dans les séries temporelles de la pesanteur, mesurées par des gravimètres de haute sensibilité (cf §5.1.4).

λ (km)	1	10	100	1000
$\partial_t \Delta g_{\text{FA}}(t = 0)$ ($\mu\text{Gal}/\text{siècle}$)	1,7	$1,7 \times 10^1$	$1,7 \times 10^2$	$1,7 \times 10^3$
$\partial_t \Delta g_{\text{FA}}(t_{\text{actuel}})$ ($\mu\text{Gal}/\text{siècle}$)	1,7	$1,7 \times 10^1$	$1,5 \times 10^2$	$5,5 \times 10^2$
$\partial_t N_{\text{deb}}(t = 0)$ (m/siècle)	$2,7 \times 10^{-7}$	$2,7 \times 10^{-5}$	$2,7 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-1}$
$\partial_t N_{\text{deb}}(t_{\text{actuel}})$ (m/siècle)	$2,7 \times 10^{-7}$	$2,7 \times 10^{-5}$	$2,4 \times 10^{-3}$	$8,7 \times 10^{-2}$

TABLEAU 4.3 – Variations temporelles de l'anomalie à l'air libre et de l'ondulation du géoïde suite au rebond post-glaciaire juste après la fonte des glaces ($t = 0$) et à l'époque actuelle ($t = 90$ siècles). Ces variations sont respectivement inférieures à 1 mGal/siècle pour l'anomalie à l'air libre et 10 cm/siècle pour l'ondulation du géoïde.

La modélisation plus raffinée du phénomène de rebond post-glaciaire, nécessite la prise en compte d'autres paramètres tels :

- la sphéricité de la Terre;
- la compressibilité des matériaux terrestres;
- la variation du champ gravitationnel avec la profondeur;
- la variation radiale des paramètres rhéologiques : paramètres de Lamé et viscosité;
- l'accroissement de la surcharge océanique due à la fonte des glaces;
- la distribution réelle des calottes glaciaires.

La plupart des modèles s'accordent sur la viscosité du manteau supérieur ($\approx 10^{21}$ Pa s). En revanche, les estimations du facteur d'accroissement de la viscosité lors du passage du manteau supérieur au manteau inférieur aux environs de 670 km de profondeur, sont beaucoup plus dispersées, variant de 4 – 5 à 10, voire 100.

4.3.3 Rotation de la Terre

La plupart des informations relatées dans ce qui suit, est tirée de l'ouvrage de synthèse remarquable sur la rotation de la Terre publié par BIZOUARD (2014). La rotation terrestre comporte des fluctuations qui impactent à la fois sa vitesse angulaire de rotation et la direction de son axe de rotation. En l'absence de toute perturbation, la Terre effectuerait un mouvement de rotation autour d'un axe fixe incliné de $23^\circ 26'$ par rapport à l'axe des pôles de l'écliptique, au rythme d'une rotation en 23 h 56 min 4,10 s. Des phénomènes d'origine externe – telle l'attraction luni-solaire – ou liés à des transferts de masse à l'intérieur de la Terre et au voisinage de sa surface, dérèglent ce mouvement de façon suffisamment sensible pour être décelable avec notre technologie actuelle. Le développement des horloges atomiques et des techniques de la géodésie spatiale – notamment l'interférométrie à très longue base (Very Long Baseline Interferometry (VLBI)), la détermination d'orbite et le radio – positionnement intégré par satellite (Doppler Orbitography Radio Integrated System (DORIS)), la télémétrie laser sur satellite (Satellite Laser Ranging (SLR)), ainsi que les systèmes de radio-positionnement par satellite (Global Navigation Satellite System (GNSS)) – a permis le raffinement de la mesure des fluctuations de la rotation terrestre et ouvert la voie de recherches sur les causes physiques de ces dernières.

Les deux phénomènes physiques liés à la rotation de la Terre qui entraînent des changements de la pesanteur observables sur l'accélération centrifuge, sont le mouvement du pôle – ou *polhodie* – et la variation de la vitesse de rotation de la Terre. Ces phénomènes sont mesurés lors de l'évaluation des paramètres d'orientation de la Terre qui comprennent notamment la position du pôle et la durée du jour. Des valeurs actualisées de ces paramètres sont fournies par le service international pour la rotation de la Terre et les systèmes de référence (International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS)) fondé à l'initiative de l'union astronomique internationale (International Astronomical Union (IAS)) et l'union internationale de géodésie et géophysique (IUGG). Nous proposons d'évaluer l'amplitude des variations de la pesanteur causées par ces deux phénomènes.

4.3.3.1 Mouvement du pôle

Vu depuis l'espace depuis un repère inertiel, l'axe de rotation de la Terre décrit un cône autour de l'axe des pôles de l'écliptique d'angle au sommet de $23^\circ 26'$, à une vitesse angulaire de l'ordre de 50 secondes d'arc par an; ce phénomène est la *précession des équinoxes*

dont la périodicité est de 25800 ans. Ce mouvement est modulé par des oscillations régulières de l'axe de rotation appelées *nutations*, dont l'amplitude reste inférieure à la minute d'arc. La mécanique newtonienne explique parfaitement la précession et le terme principal de la nutation – de période 18,6 ans et d'amplitude 10" – comme résultant de l'attraction gravitationnelle luni-solaire sur le bourrelet équatorial d'une Terre ellipsoïdale de révolution complètement rigide. La découverte de nombreux autres termes de nutation de faible amplitude – $< 0,05''$ – liés à la non-rigidité de la Terre, a été obtenue grâce aux techniques de géodésie spatiale. Elle a conduit à rechercher diverses causes géophysiques tels la présence du noyau externe liquide, l'élasticité du manteau et les transferts de masse d'origine hydrologique et atmosphérique qui influencent par ailleurs la gravité.

Cependant, le mouvement de l'axe des pôles dans l'espace ne modifie pas l'accélération centrifuge puisque la distance du point de mesure à l'axe de pôle reste inchangée. C'est une autre conséquence de l'action gravitationnelle luni-solaire sur le bourrelet équatorial qui affecte plus sensiblement la pesanteur. Sous l'effet de cette action, l'axe de rotation de la Terre rigide, s'il n'est pas confondu avec l'axe principal d'inertie polaire effectue une rotation uniforme de fréquence proportionnelle à l'ellipticité dynamique (cf Éq. 3.31) et évaluée à 1 cycle tous les 304 jours. Ce phénomène entraîne le pôle dans un mouvement oscillatoire d'amplitude indéterminée, qui affecte directement la latitude et donc l'accélération centrifuge. L'oscillation principale, identifiée par l'astronome américain Chandler³ en 1891, a une amplitude de 0,2" et une périodicité de 430 jours, allongée 126 jours par rapport à celle calculée pour une Terre rigide. L'oscillation de Chandler est accompagnée d'une oscillation annuelle de 0,1" attribuée à des transferts saisonniers de masses atmosphériques et hydrologiques. D'autres oscillations du pôle ont été observées depuis les travaux de Chandler, dont une vue d'ensemble est donnée dans le tableau 4.4, p. 121.

Le mouvement du pôle est entièrement déterminé par ses coordonnées x_p et y_p , qui correspondent respectivement aux cosinus – directeurs de l'axe de rotation de la Terre par rapport aux axes horizontaux (Ox) et (Oy) du repère terrestre (Fig. 4.20, p. 120). En un point de la Terre de longitude λ_0 et de colatitude θ_0 , le mouvement de pôle entraîne une variation de la colatitude qui prend alors la valeur θ donnée par :

$$\theta = \theta_0 + x_p \cos \lambda_0 + y_p \sin \lambda_0. \quad (4.122)$$

La variation du potentiel centrifuge δV_c (cf Éq. 3.1) engendrée par la variation de latitude $\theta - \theta_0$ au point $P(\lambda_0, \theta_0, r_0)$, est donnée par :

$$\delta V_c(\mathbf{x}_P) = r_0^2 \Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 (\theta - \theta_0) = r_0^2 \Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 (x_p \cos \lambda_0 + y_p \sin \lambda_0),$$

où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

L'effet sur la pesanteur peut être estimé en calculant la variation $\delta g_{\text{pôle}}$ d'accélération dans la direction radiale. Il vient alors :

$$\delta g_{\text{pôle}} \approx \partial_r (\delta V_c(\mathbf{x}_P)) = 2 r_0 \Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 (x_p \cos \lambda_0 + y_p \sin \lambda_0).$$

3. Seth Carlo Chandler, 1846 – 1913.

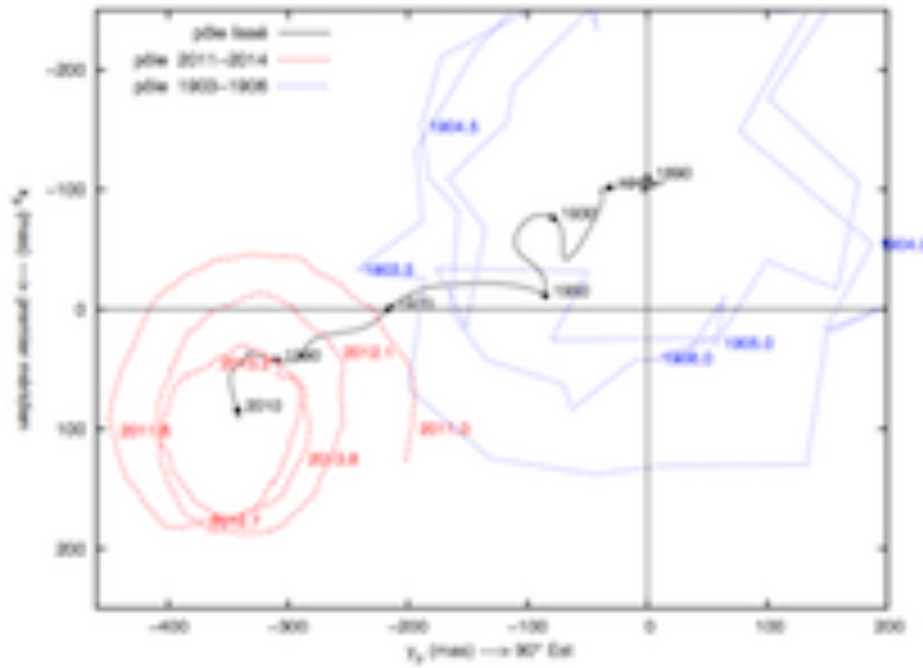


FIGURE 4.20 – Trajectoire du pôle de 1900 à nos jours obtenue par filtrage des coordonnées du pôle x_p et y_p . Le pôle géographique a pour coordonnées (0, 0) et correspond à la position moyenne du pôle vers 1900. Aujourd’hui, l’incertitude sur la position du pôle est de 0,1 mas. Elle n’était que de 50 mas au début du 20^e.

Droits réservés ©BIZOUARD (2014).

Tous calculs faits, la variation de la pesanteur $\delta g_{\text{pôle}}$ consécutive au mouvement du pôle s’exprime par :

$$\delta g_{\text{pôle}} \approx r_0 \Omega^2 \sin 2\theta_0 (x_p \cos \lambda_0 + y_p \sin \lambda_0). \quad (4.123)$$

L’amplitude maximale de cet effet δg_{max} peut donc être estimée par la relation suivante :

$$\delta g_{\text{max}} = a \Omega^2 \max(|x_p|, |y_p|), \quad (4.124)$$

où a désigne le rayon moyen de la Terre.

La relation 4.124 a été utilisée avec les amplitudes du mouvement du pôle répertoriées dans le tableau 4.4, p. 121, pour estimer l’effet maximal induit par le mouvement du pôle sur la pesanteur. Les valeurs obtenues indiquent très clairement que les effets induits par le mouvement du pôle ont une amplitude de l’ordre du microgal. Il est bien entendu que les phénomènes géophysiques impliqués dans le mouvement du pôle, engendrent également des transferts de masse internes et externes, qui modifient l’attraction gravitationnelle. À ce niveau d’amplitude, la séparation des sources des variations de la gravité devient plutôt difficile, tant les phénomènes géophysiques sont synchrones et liés.

Phénomène	Amplitude	Cause probable	Effet induit
Terme de Chandler; période = 430 jours	200 mas	Mode propre de la Terre modifié par la présence du bourrelet équatorial et l'excitation hydro-atmosphérique	3,3 μ Gal
Terme saisonnier	100 mas	Excitation hydro-atmosphérique	1,6 μ Gal
Dérive séculaire	4 mas/an	Rebond post-glaciaire	$6,6 \times 10^{-2}$ μ Gal/an
Terme de Markowitz; période = 30 ans	20 mas	Origine inconnue	$3,3 \times 10^{-1}$ μ Gal
Termes inter-annuels; période = 500 jours à 10 ans	10 mas	Excitation hydro-atmosphérique	$1,6 \times 10^{-1}$ μ Gal
Écart nutation réelle/nutation Terre rigide	50 mas	Élasticité du manteau & ellipticité du noyau fluide	$8,2 \times 10^{-1}$ μ Gal
Fluctuations rapides; période < 100 jours	2 mas	Excitation hydro-atmosphérique	$3,3 \times 10^{-2}$ μ Gal
Termes diurnes et semi-diurnes	1 mas	Marées océaniques	$1,6 \times 10^{-2}$ μ Gal

TABLEAU 4.4 – Tableau récapitulatif des effets observés dans le mouvement du pôle accompagnés de leurs amplitudes et de leurs causes probables (BIZOUARD, 2014). L'amplitude de ces effets varie entre 1 et 200 mas (1 mas = 1 milliseconde d'arc = 0,001"), ce qui correspond à une variation de la pesanteur comprise entre 0,016 et 3,3 μ Gal. Les calculs de l'effet induit ont été réalisés avec le rayon moyen $a = 6371 \times 10^3$ m et la vitesse angulaire de rotation $\Omega = 7,292115 \times 10^{-5}$ rad/s.

4.3.3.2 Variations de la vitesse de rotation terrestre

La vitesse angulaire de la rotation de la Terre subit également des fluctuations qui impactent directement l'accélération centrifuge (Fig. 4.21). De nos jours, ces irrégularités de la vitesse sont étudiées en comparant le temps *UT1* déterminé par l'IERS à partir de l'observation des quasars extra-galactiques et le temps *TAI*, ou Temps Atomique International déterminé par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) à partir de plus d'une centaine d'horloges atomiques répartie dans le monde entier. La rotation terrestre subit en premier lieu une décélération séculaire (≈ 2 ms/siècle) due à un couple de freinage qui résulte de phénomènes de dissipation dans la Terre solide et de friction dans les mers peu profondes. En second lieu, sont observées des variations décennales et saisonnières (cf Tab. 4.5) attribuées respectivement au noyau fluide et à l'action des vents. Enfin, les déformations dues à l'attraction luni-solaire modifient le moment cinétique axial de la Terre qui entraîne une modification de la durée du jour (0,5 ms) à la période lunaire de 13,66 jours. Cet effet étant parfaitement modélisé, il est corrigé au titre d'un effet systématique de la rotation terrestre.

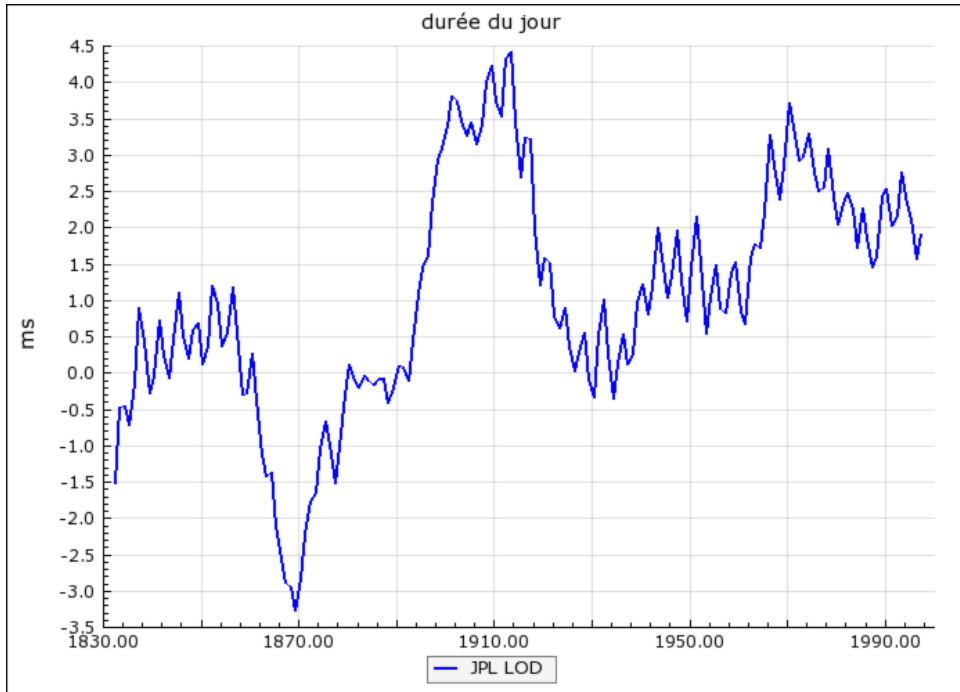


FIGURE 4.21 – Variation à long terme de la durée du jour déterminée à partir d'observations optiques. Cette série a été générée à partir du site <http://piers.obspm.fr/eop-pc> (Observatoire de Paris et laboratoire SYstèmes de Référence Temps – Espace (SYRTE)).

Droits réservés ©Jet Propulsion Laboratory (JPL).

L'étude des irrégularités de la rotation terrestre s'appuie sur la mesure de la durée du jour ou Length Of Day (LOD). Dans l'échelle de temps TAI, la durée du jour nominale est de $LOD_0 = 86400$ s pour une vitesse angulaire de rotation $\Omega_0 = 7,292115 \cdot 10^{-5}$ rad/s. Si la vitesse angulaire de rotation de la Terre varie de $\delta\Omega$, alors la variation de la durée du jour correspondante δLOD s'exprime par :

$$\frac{\delta LOD}{LOD_0} = - \frac{\delta \Omega}{\Omega_0}. \quad (4.125)$$

Toute variation $\delta\Omega$ de la vitesse de rotation terrestre engendre une variation δV_c du potentiel centrifuge, qui s'exprime au point $P(\lambda_0, \theta_0, r_0)$ par :

$$\delta V_c(\mathbf{x}_P) = r_0^2 \Omega_0 \sin^2 \theta_0 \delta \Omega_0.$$

Cette variation de potentiel entraîne une variation de la pesanteur estimée en calculant la composante radiale δg_{rot} donnée par :

$$\delta g_{\text{rot}} \approx \partial_r (V_c(\mathbf{x}_P)) = 2 r_0 \Omega_0 \sin^2 \theta_0 \delta \Omega.$$

Exprimée à partir de la variation relative de la durée du jour (cf Éq. 4.125), la relation précédente devient :

$$\delta g_{\text{rot}} = -2 r_0 \Omega_0^2 \sin^2 \theta_0 \frac{\delta LOD}{LOD_0}. \quad (4.126)$$

L'effet maximum δg_{max} induit par la rotation sur la pesanteur peut donc s'estimer par :

$$\delta g_{\text{max}} = 2 a \Omega_0^2 \frac{\delta LOD}{LOD_0}, \quad (4.127)$$

où a désigne le rayon terrestre moyen.

Cet effet a été calculé pour les différentes valeurs de fluctuation de la durée du jour rassemblées dans le tableau 4.5. Les résultats indiquent qu'il est inférieur d'un ordre de grandeur à l'amplitude des effets induits par le mouvement du pôle. Comme dans le cas du mouvement du pôle, l'étude de cet effet sur la pesanteur est quelque peu brouillée puisque certains phénomènes à l'origine des fluctuations de la rotation, tels les effets combinés de l'hydrologie et l'atmosphère, entraînent également des transferts de masse. L'interprétation des séries temporelles de la pesanteur se doit de tenir compte, dans la mesure du possible, de cette intrication des causes de fluctuation de la pesanteur.

Phénomène	δLOD	Cause probable	Effet induit
Allongement séculaire	2 ms par siècle	Friction hydrologique et dissipation interne	$1,6 \times 10^{-1} \mu\text{Gal/siècle}$
Variations décennales (> 10 ans)	2 ms	Couplage noyau fluide/manteau	$1,6 \times 10^{-1} \mu\text{Gal}$
Variations saisonnières	1 ms par an	Marées + effet hydro-atmosphérique	$7,8 \times 10^{-2} \mu\text{Gal/an}$
Variations mensuelles et bimensuelles	0,5 ms	Marées luni-solaires	$3,9 \times 10^{-2} \mu\text{Gal}$

TABLEAU 4.5 – Tableau récapitulatif des effets observés dans les fluctuations de la rotation terrestre. Ces fluctuations sont exprimés en terme de variations de la durée du jour δLOD , et accompagnées de leurs causes probables (BIZOUARD, 2014). L'amplitude de ces effets varie entre 0,5 et 2 ms ($1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} \approx 10^{-8} LOD_0$ soit 0,01 ppm), ce qui correspond à une variation de la pesanteur comprise entre 0,039 et 0,16 μGal . Les calculs de l'effet induit ont été réalisés avec le rayon moyen $a = 6371 \times 10^3 \text{ m}$ et la vitesse angulaire de rotation $\Omega = 7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$.

Chapitre 5

Vers la cartographie « haute résolution » du champ de gravité

*« Le beaucoup savoir apporte l'occasion
de plus douter »*

Montaigne
Essais

LA gravimétrie actuelle dispose de tout un arsenal de techniques d'acquisition pour mesurer la gravité depuis les terres, les mers, les airs et l'espace extra-terrestre. Les données acquises servent à l'élaboration de modèles globaux de la gravité; elles enrichissent également des bases de données de plus en plus étoffées, qui contiennent à la fois des données ponctuelles et des séries temporelles gravimétriques.

La grande diversité des techniques d'acquisition pourrait suggérer que la couverture gravimétrique deviendra sous peu globale et exhaustive, à la fois dans l'espace et le temps. S'il est vrai que la gravimétrie spatiale fournit des données globales et répétées dans le temps, leur résolution spatiale reste néanmoins limitée par l'altitude du lever. Les données acquises par ailleurs sur la surface terrestre, n'assurent pas une couverture homogène, notamment sur les zones littorales et en région montagneuse. Enfin, les mesures en fond de mer, pourtant capitales pour la connaissance du champ de gravité global, sont clairsemées de par les difficultés posées par leur acquisition.

Ce bilan suggère qu'il existe des niches pour une nouvelle gravimétrie mobile « rapprochée », capable de pallier les insuffisances des méthodes actuelles. Ce sont ces niches dont il est question dans ce chapitre, après un inventaire détaillé des données gravimétriques et des techniques d'acquisition disponibles à l'heure actuelle.

5.1 Inventaire des données gravimétriques actuelles

5.1.1 Types de données

Les données gravimétriques disponibles à l'heure actuelle peuvent être classées suivant plusieurs critères :

- leur généalogie : valeurs mesurées ou résultats de calculs ;
- leur nature : hauteur du géoïde, valeurs du potentiel, valeur de l'accélération ou valeurs des éléments du tenseur des gradients de gravité ;
- leur type : vectoriel – uniquement pour les données d'accélération – ou scalaire ;
- leur couverture : cartes ou données « ponctuelles » ;
- leurs caractéristiques spectrales : longueurs d'onde du champ de gravité couvertes par les mesures ;
- leur mode d'acquisition : statique ou depuis un porteur mobile ;
- leur mode de représentation : carte ou représentation fonctionnelle.

Les cartes gravimétriques disponibles sont généralement toutes issues de calculs qui exploitent des données de natures diverses. Elles ne couvrent jamais l'intégralité du spectre qui est limité par une fréquence de coupure haute, elle-même inférieure à la fréquence de Nyquist correspondant au pas d'échantillonnage de la carte. Enfin, elles représentent toujours une grandeur scalaire : potentiel, hauteur du géoïde au-dessus d'un ellipsoïde de référence, ou l'une des anomalies de gravité.

Les grandeurs mesurées en gravimétrie peuvent être scalaires ou vectorielles. Sauf rares exceptions, elles ne correspondent pas à des résultats bruts de mesure ; en effet, la majorité des systèmes de mesures utilise des appareils qui :

1. ne mesurent pas directement l'accélération de la pesanteur, mais seulement son effet sur un système physique ;
2. présentent des dérives corrigées a posteriori ;
3. sont soumis à des accélérations autres que la pesanteur lorsqu'ils sont utilisés depuis un porteur mobile : satellite, avion, bateau, ou drone.

À ce stade, notre objectif consiste à décrire les données gravimétriques disponibles, c'est-à-dire la donnée post-traitée exploitable, tout en exposant brièvement sa généalogie et l'incidence de cette dernière sur la qualité des données et leur résolution spatiale. Nous aborderons dans un premier temps les données de couverture globale issues de la gravimétrie satellitaire, puis les données issues de campagne de mesure in situ qui peuvent être terrestres, marines, ou aériennes.

5.1.2 Modèles globaux du champ de pesanteur

Les modèles globaux du champ de pesanteur, encore appelés *modèles de géopotentiel*, sont entièrement définis par les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques (cf Chap. 2, section 2.2) de la différence du champ de pesanteur réel et du champ normal. Ces représentations fonctionnelles donnent accès aux valeurs du potentiel de pesanteur et de toutes ses dérivées dans toute la région de l'espace où le champ de gravitation peut être considéré comme harmonique à l'incertitude des données près, c'est-à-dire

en particulier dans l'atmosphère. L'exactitude de ces modèles est caractérisée, d'une part, à partir du degré maximum du développement en harmoniques sphériques qui fixe sa résolution spatiale (cf Éq. 2.27), et d'autre part, grâce aux variances formelles des coefficients de la décomposition.

5.1.2.1 Généalogie

Il existe deux types de modèles de géopotential : les premiers purement satellitaires issus de l'exploitation de données spatiales, dits *modèles spatiaux*, et les seconds dits *combinés*, qui exploitent également des données gravimétriques terrestres (cf §5.1.4) et des données issues de l'altimétrie satellitaire (cf §5.1.3). Le tableau 5.1 rend compte du foisonnement des modèles de géopotential – pas moins de 75 modèles en 15 ans –, dont les meilleures résolutions spatiales atteignent 71 km ($l_{\max} = 280$) pour les modèles spatiaux et 9 km ($l_{\max} = 2190$) pour les modèles combinés. Jusqu'au début des années 2000, les modèles spatiaux étaient calculés à partir de l'analyse des perturbations des orbites d'une quarantaine de satellites, tels ceux de la constellation « LAsER GEODynamics Satellites (LAGEOS) ». Durant la première décennie du XXI^e siècle, les modèles géopotential ont vu leur qualité s'améliorer de façon significative de par l'essor de la gravimétrie spatiale, suscité notamment par la programmation de trois missions spatiales successives dédiées à la gravité terrestre, décrites en détail sur les sites du Centre National d'Études Spatiales (CNES) ¹ et du GeoForschungsZentrum ou German Research Center for Geosciences (GFZ) ².

La première mission dénommée CHAMP (Fig. 5.1), a été lancée le 15 juillet 2000 depuis la base russe de Plesetsk par l'Agence Spatiale Allemande (Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt (DLR)) sur proposition du centre de recherches spatiales de Potsdam (GFZ). C'est la première fois qu'un satellite placé sur une orbite basse – altitude initiale 454 km – est équipé d'un accéléromètre à 3 axes pour l'estimation des accélérations non gravitationnelles (en l'occurrence, le micro-accéléromètre STAR conçu par l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA) et le CNES) et d'un récepteur GNSS bifréquence pour un positionnement de type « Satellite – to – Satellite Tracking in high – low mode (SST-hl) » à partir des satellites de la constellation du « Global Positioning System (GPS) ». Jusqu'en 2003, les modèles spatiaux étaient essentiellement calculés à partir de l'analyse des perturbations d'orbite, suivies par télémétrie laser de type « SST-hl ». Le lancement de la mission satellitaire CHAMP a constitué un tournant décisif pour l'amélioration des modèles spatiaux avec la publication, dès 2002, des premiers modèles européens dénommés « European Improved Gravity model of the Earth by New techniques (EIGEN) » (cf Tab. 5.1). Le satellite CHAMP a fonctionné pendant 10 ans, sa destruction contrôlée ayant eu lieu le 19 septembre 2010.

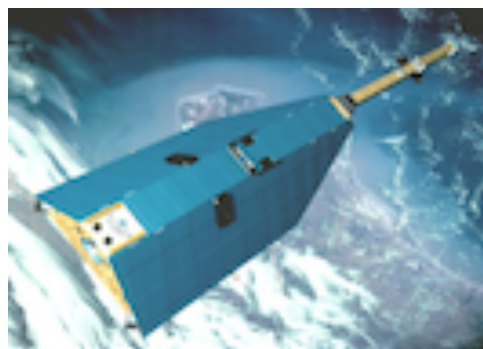


FIGURE 5.1 – Vue du satellite « CHALLENGING Mini – satellite Payload for geophysical research and application (CHAMP) ». Droits réservés ©IAG, Global Geodetic Observing System (GGOS) portal.

La deuxième mission dénommée Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) a été lancée le 16 mars 2002 depuis la même base russe de Plesetsk pour une durée initiale de 8 ans. C'est la première mission spatiale dédiée exclusivement à l'estimation du champ

1. http://missions-scientifiques.cnes.fr/Fr/terre_solide.htm

2. <http://www.gfz-potsdam.de>

de pesanteur. Fruit d'une collaboration entre la National Aeronautics and Space Administration (NASA) et la DLR, cette mission a pour ambition la cartographie du géoïde mondial à un rythme mensuel ou décadaire, avec une résolution spatiale de 100 km et une incertitude de 1 cm sur les ondulations du géoïde. C'est donc la partie variable du champ de gravité qui est recherchée dans cette mission.

Ses applications principales concernent le suivi de l'évolution des masses d'eau, de neige ou de glace mal connue à l'échelle mondiale, voire des déformations dues aux grands séismes tel le tremblement de terre de Sumatra en décembre 2004. Le principe de la mesure repose sur l'utilisation de deux satellites jumeaux GRACE-A et GRACE-B, placés à une distance de 200 km sur des orbites polaires quasi-circulaires à 470 km d'altitude. Les deux satellites (Fig. 5.2) mesurent constamment la distance qui les sépare à l'aide d'un distance-mètre micro-onde en bande « K ». Les variations de distances permettent ensuite d'estimer les perturbations relatives des orbites au micromètre près. Le positionnement des satellites combine le mode SST-hl grâce au système GPS et le mode « Satellite – to – Satellite Tracking in low – low mode (SST-II) » de par leur positionnement relatif grâce au distance-mètre embarqué. Un accéléromètre permet la correction des effets non gravitationnels. La technologie employée sur GRACE – proche d'une technologie de type gradiométrique – ne donne pas accès aux grandes longueurs d'onde du champ, mais apporte une détermination très précise des longueurs d'onde intermédiaires. Les grandes longueurs d'onde restent issues de l'exploitation des perturbations d'orbite, principalement des satellites LAGEOS et CHAMP. Les premiers modèles spatiaux obtenus à partir des données de la mission GRACE, ont été publiés en 2003 sous les noms de GGM01S et EIGEN-GRACE01S (cf Tab. 5.1). D'une longévité exceptionnelle, les satellites GRACE fonctionnent toujours, et devraient dépasser les 5 000 jours de mission d'ici la fin 2015.

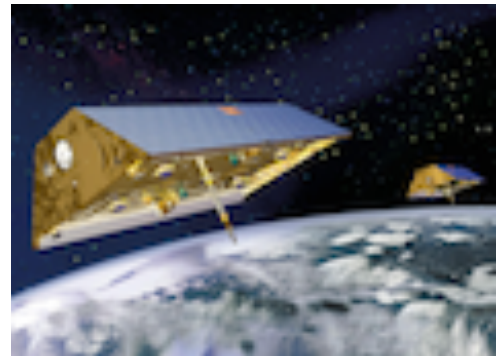


FIGURE 5.2 – Vue des satellites jumeaux « GRACE ». Droits réservés ©NASA.

La troisième mission spatiale dénommée GOCE a été sélectionnée par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) dans le cadre du programme de recherche « Earth Explorer » (Fig. 5.3). Son lancement s'est déroulée le 17 mars 2009 depuis la base russe de Plesetsk. La mission GOCE a été conçue pour cartographier le champ de gravité statique à haute résolution – 100 km sur le globe, soit un modèle de géopotentiel développé jusqu'au degré 200 – avec une erreur inférieure à 2 - 3 cm à cette échelle sur les ondulations du géoïde. Pour ce, la mission s'appuie sur une altitude basse – 260 km – et une combinaison d'instruments performants.



FIGURE 5.3 – Vue du satellite Gravity field and steady state Ocean Circulation Explorer mission (GOCE). Droits réservés ©European Space Agency (ESA).

Parmi les instruments qui équipent le satellite GOCE, figurent :

1. un gradiomètre à trois axes sensibles orthogonaux dont les directions sont, respectivement, radiale, le long de la trace de l'orbite, et normale au plan d'orbite; ce dernier est constitué de trois paires d'accéléromètres à trois axes conçus par l'ONERA, mesurant les accélérations avec une incertitude de $10^{-12} \text{ ms}^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$ par axe, séparés par une distance de 50 cm; les gradients de gravité sont alors mesurés avec une incertitude de 3 mE dans la bande passante de 0,005 à 0,1 Hz;
2. un récepteur GPS pour la détermination d'orbite par la méthode SST-hl;
3. un réflecteur pour laser pour la détermination d'orbite par la méthode SLR;
4. plusieurs senseurs stellaires pour déterminer l'attitude du satellite.

Le satellite GOCE bénéficie d'une compensation de traînée, condition nécessaire pour le bon fonctionnement du gradiomètre et pour assurer la longévité du satellite. À si basse altitude en effet, les frottements avec l'atmosphère auraient entraîné la perte du satellite en seulement quelques mois. L'annulation du freinage atmosphérique dans la direction du mouvement a été rendue possible grâce à des moteurs ioniques à poussées variables. La mission GOCE a fonctionné de façon quasi-continue entre 2009 et 2013. Les premiers modèles de géopotential qui intègrent des données GOCE ont été publiés dès l'année 2010 (cf Tab. 5.1).

TABEAU 5.1 – Modèles globaux de la pesanteur publiés durant les seize dernières années (BARTHELMES et KÖHLER, 2012), disponible sur le site de l'ICGEM à l'adresse <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>. Les initiales « S », « G », « A », et « M » désignent les données utilisées dans les modèles, respectivement, de poursuite d'orbite (S), de gravimétrie terrestre (G), d'altimétrie satellitaire (A) ou issues d'un autre modèle géopotential (M). Les missions spatiales qui ont permis l'acquisition des données sont CHAMP, GRACE, GOCE, ainsi que les satellites de la constellation LAGEOS.

n°	Modèle	Année	Degré	Type de données	Référence
1.	ITU_GRACE16	2016	180	S(Grace)	AKYILMAZ et al. (2016)
2.	ITU_GGC16	2016	280	S(Grace, Goce)	AKYILMAZ et al. (2016)
3.	EIGEN-6S4	2016	300	S(Goce, Grace, Lageos)	FÖRSTE et BRUINSMA (2016)
4.	GOCO05c	2016	720	S(GOCO05s), G, A	FECHER et al. (2016)
5.	GGM05C	2016	360	S(Grace, Goce), G, A	RIES et al. (2016)
6.	GECO	2016	2190	S(Goce), EGM2008	GILARDONI et al. (2016)
7.	GGM05G	2015	240	S (Grace, Goce)	BETTAPUR et al. (2015)
8.	GOCO05s	2015	280	S (Goce, Grace, Champ, Lageos,...)	MAYER-GÜRR et THE GOCO TEAM (2015)
9.	GO_CONS_GCF_2_SPW_R4	2014	280	S(Goce)	GATTI et al. (2014)
10.	EIGEN-6C4	2014	2190	S(Goce, Grace, Lageos), G, A	FÖRSTE et al. (2014)
11.	ITSG-Grace2014s	2014	200	S(Grace)	MAYER-GÜRR et al. (2014)
12.	ITSG-Grace2014k	2014	200	S(Grace)	MAYER-GÜRR et al. (2014)
13.	GO_CONS_GCF_2_TIM_R5	2014	280	S(Goce)	BROCKMANN et al. (2014)
14.	GO_CONS_GCF_2_DIR_R5	2014	300	S(Goce, Grace, Lageos)	BRUINSMA et al. (2013)
15.	JYY_GOCE04S	2014	230	S(Goce)	YI et al. (2013)

Suite des modèles page suivante

TABLEAU 5.1 : Modèles globaux de la pesanteur – suite –.

n°	Modèle	Année	Degré	Type de données	Référence
16.	GOGRA04S	2014	230	S(Goce,Grace)	Yi et al. (2013)
17.	EIGEN-6S2	2014	260	S(Goce, Grace, Lageos)	RUDENKO et al. (2014)
18.	GGM05S	2014	180	S(Grace)	TAPLEY et al. (2013)
19.	EIGEN-6C3stat	2014	1949	S(Goce, Grace, Lageos), G , A	FÖRSTE et al. (2012)
20.	Tongji-GRACE01	2013	160	S(Grace)	SHEN et al. (2013)
21.	JYY_GOCE02S	2013	230	S(Goce)	Yi et al. (2013)
22.	GOGRA02S	2013	230	S(Goce, Grace)	Yi et al. (2013)
23.	ULux_CHAMP2013s	2013	120	S(Champ)	WEIGELT et al. (2013)
24.	ITG-Goce02	2013	240	S(Goce)	SCHALL et al. (2014)
25.	GO_CONS_GCF_2_TIM_R4	2013	250	S(Goce)	PAIL et al. (2011)
26.	GO_CONS_GCF_2_DIR_R4	2013	260	S(Goce, Grace, Lageos)	BRUINSMA et al. (2013)
27.	EIGEN-6C2	2012	1949	S(Goce, Grace, Lageos), G, A	FÖRSTE et al. (2012)
28.	DGM-1S	2012	250	S(Goce, Grace)	FARAHANI et al. (2013)
29.	GOCO03S	2012	250	S(Goce, Grace,...)	MAYER-GÜRR et al. (2012)
30.	GO_CONS_GCF_2_DIR_R3	2011	240	S(Goce, Grace, Lageos)	BRUINSMA et al. (2010)
31.	GO_CONS_GCF_2_TIM_R3	2011	250	S(Goce)	PAIL et al. (2011)
32.	GIF48	2011	360	S(Grace), G, A	RIES et al. (2011)
33.	EIGEN-6C	2011	1420	S(Goce, Grace, Lageos), G, A	FÖRSTE et al. (2011)
34.	EIGEN-6S	2011	240	S(Goce, Grace, Lageos)	FÖRSTE et al. (2011)
35.	GOCO02S	2011	250	S(Goce, Grace,...)	GOIGINGER et al. (2011)
36.	AIUB-GRACE03S	2011	160	S(Grace)	JÄGGI et al. (2011)
37.	GO_CONS_GCF_2_DIR_R2	2011	240	S(Goce)	BRUINSMA et al. (2010)
38.	GO_CONS_GCF_2_TIM_R2	2011	250	S(Goce)	PAIL et al. (2011)
39.	GO_CONS_GCF_2_SPW_R2	2011	240	S(Goce)	MIGLIACCIO et al. (2011)
40.	GO_CONS_GCF_2_DIR_R1	2010	240	S(Goce)	BRUINSMA et al. (2010)
41.	GO_CONS_GCF_2_TIM_R1	2010	224	S(Goce)	PAIL et al. (2010a)
42.	GO_CONS_GCF_2_SPW_R1	2010	210	S(Goce)	MIGLIACCIO et al. (2010)
43.	GOCO01S	2010	224	S(Goce, Grace)	PAIL et al. (2010b)
44.	EIGEN-51C	2010	359	S(Grace, Champ), G, A	BRUINSMA et al. (2010)
45.	AIUB-CHAMP03S	2010	100	S(Champ)	PRANGE (2011)
46.	EIGEN-CHAMP05S	2010	150	S(Champ)	FLECHTNER et al. (2010)
47.	ITG-Grace2010s	2010	180	S(Grace)	MAYER-GÜRR et al. (2010)
48.	AIUB-GRACE02S	2009	150	S(Grace)	JÄGGI et al. (2009)
49.	GGM03C	2009	360	S(Grace), G, A	TAPLEY et al. (2007)
50.	GGM03S	2008	180	S(Grace)	TAPLEY et al. (2007)
51.	AIUB-GRACE01S	2008	120	S(Grace)	JÄGGI et al. (2008)
52.	EIGEN-5S	2008	150	S(Grace, Lageos)	FÖRSTE et al. (2008)
53.	EIGEN-5C	2008	360	S(Grace, Lageos), G, A	FÖRSTE et al. (2008)
54.	EGM2008	2008	2190	S(Grace), G, A	PAVLIS et al. (2008)
55.	ITG-Grace03	2007	180	S(Grace)	MAYER-GÜRR et al. (2007)
Suite des modèles page suivante					

TABLEAU 5.1 : Modèles globaux de la pesanteur – suite –.

n°	Modèle	Année	Degré	Type de données	Référence
56.	AIUB-CHAMP01S	2007	90	S(Champ)	PRANGE et al. (2009)
57.	ITG-Grace02s	2006	170	S(Grace)	MAYER-GÜRR et al. (2006)
58.	EIGEN-GL04S1	2006	150	S(Grace, Lageos)	FÖRSTE et al. (2006)
59.	EIGEN-GL04C	2006	360	S(Grace, Lageos), G, A	FÖRSTE et al. (2006)
60.	EIGEN-CG03C	2005	360	S(Champ, Grace), G, A	FÖRSTE et al. (2005)
61.	GGM02C	2004	200	S(Grace), G, A	UTEX-CSR (2004)
62.	GGM02S	2004	160	S(Grace)	UTEX-CSR (2004)
63.	EIGEN-CG01C	2004	360	S(Champ, Grace), G, A	REIGBER et al. (2006)
64.	EIGEN-CHAMP03S	2004	140	S(Champ)	REIGBER et al. (2004)
65.	EIGEN-GRACE02S	2004	150	S(Grace)	REIGBER et al. (2005)
66.	TUM-2S	2004	70	S(Champ)	WERMUTH et al. (2004)
67.	DEOS_CHAMP-01C	2004	70	S(Champ)	DITMAR et al. (2006)
68.	ITG_Champ01K	2003	70	S(Champ)	ILK et al. (2003)
69.	ITG_Champ01S	2003	70	S(Champ)	ILK et al. (2003)
70.	ITG_Champ01E	2003	75	S(Champ)	ILK et al. (2003)
71.	TUM-2Sp	2003	60	S(Champ)	FÖLDVARY et al. (2005)
72.	TUM-1S	2003	60	S(Champ)	GERLACH et al. (2003)
73.	GGM01C	2003	200	M(TEG4), S(Grace)	UTEX-CSR (2003)
74.	GGM01S	2003	120	S(Grace)	TAPLEY et al. (2003)
75.	EIGEN-GRACE01S	2003	140	S(Grace)	REIGBER et al. (2005)
76.	EIGEN-CHAMP03Sp	2003	140	S(Champ)	REIGBER et al. (2004)
77.	EIGEN-2	2003	140	S(Champ)	REIGBER et al. (2003b)
78.	EIGEN-1	2002	119	S(Champ)	REIGBER et al. (2003a)
79.	EIGEN-1S	2002	119	M(GRIM5), S	REIGBER et al. (2002)
80.	PGM2000A	2000	360	S, G, A	PAVLIS et al. (2000)
81.	TEG4	2000	180	S, G, A	TAPLEY et al. (2000)
Fin de la liste					

5.1.2.2 Qualité des modèles de géopotentiel

Contrairement aux modèles spatiaux, les modèles combinés sont produits en exploitant simultanément les données spatiales et des données de gravimétrie terrestre. Le calcul est conduit à une résolution bien inférieure à celle des données terrestres. En outre, ce ne sont pas les mesures au sol ou aériennes elles-mêmes qui sont exploitées, mais des moyennes spatiales à la résolution cherchée. En termes de compromis incertitude/résolution, la situation est ici plus contrastée puisque les modèles récents publiés, utilisant les données de GRACE ou GOCE, sont sans doute plus exacts mais parfois moins résolus que les meilleurs modèles publiés avant les années 2000.

Les modèles de géopotentiel sont calculés par une procédure d'optimisation linéaire et publiés avec des erreurs formelles sur chacun des coefficients. Cette caractérisation par la seule variance des coefficients correspond à une hypothèse statistique de stationnarité et d'isotropie des erreurs à la surface du globe, ce qui n'est pas tout à fait le cas. Ces erreurs formelles donnent une assez bonne idée de la qualité des modèles. La figure 5.4 en donne une illustration pour le modèle spatial GGM05G (cf Tab. 5.1, p. 130, Figs. 5.5 & 5.6, pp. 135

& 136). Les erreurs sur le géoïde sont de l'ordre de 1,0 à 1,5 cm aux degrés les plus élevés du développement, c'est-à-dire de 225 à 240.

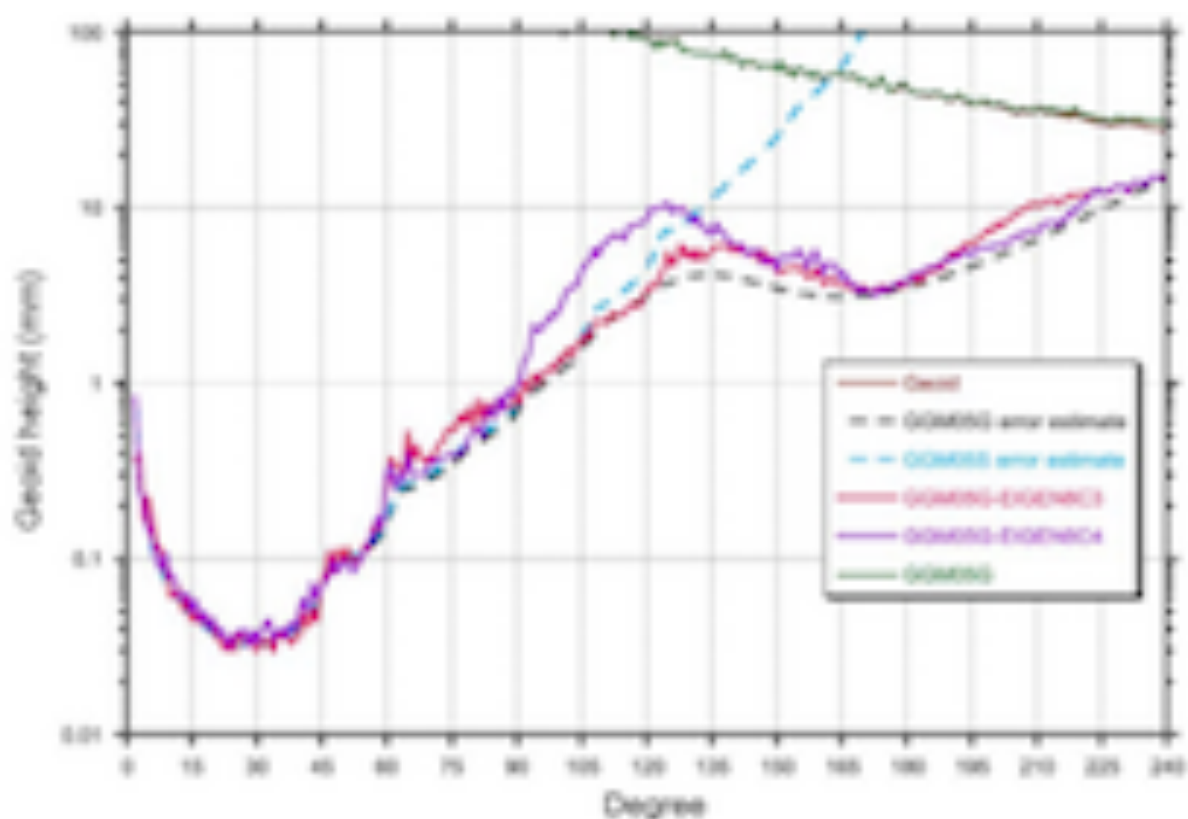


FIGURE 5.4 – Erreurs formelles par degré sur l'ondulation du géoïde pour le modèle spatial GGM05G (courbe en tirets noirs). Les erreurs sur le géoïde sont de l'ordre de 1,0 à 1,5 cm aux degrés les plus élevés du développement, c'est-à-dire de 225 à 240. Il convient de noter que les contributions à l'ondulation de ces degrés harmoniques (courbe verte) varient entre 3 et 4 cm, ce qui amène l'erreur relative sur ces degrés au-delà de 25 %. D'après BARTHELMES et KÖHLER (2012) et BETTAPUR et al. (2015), disponible sur le site <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>.

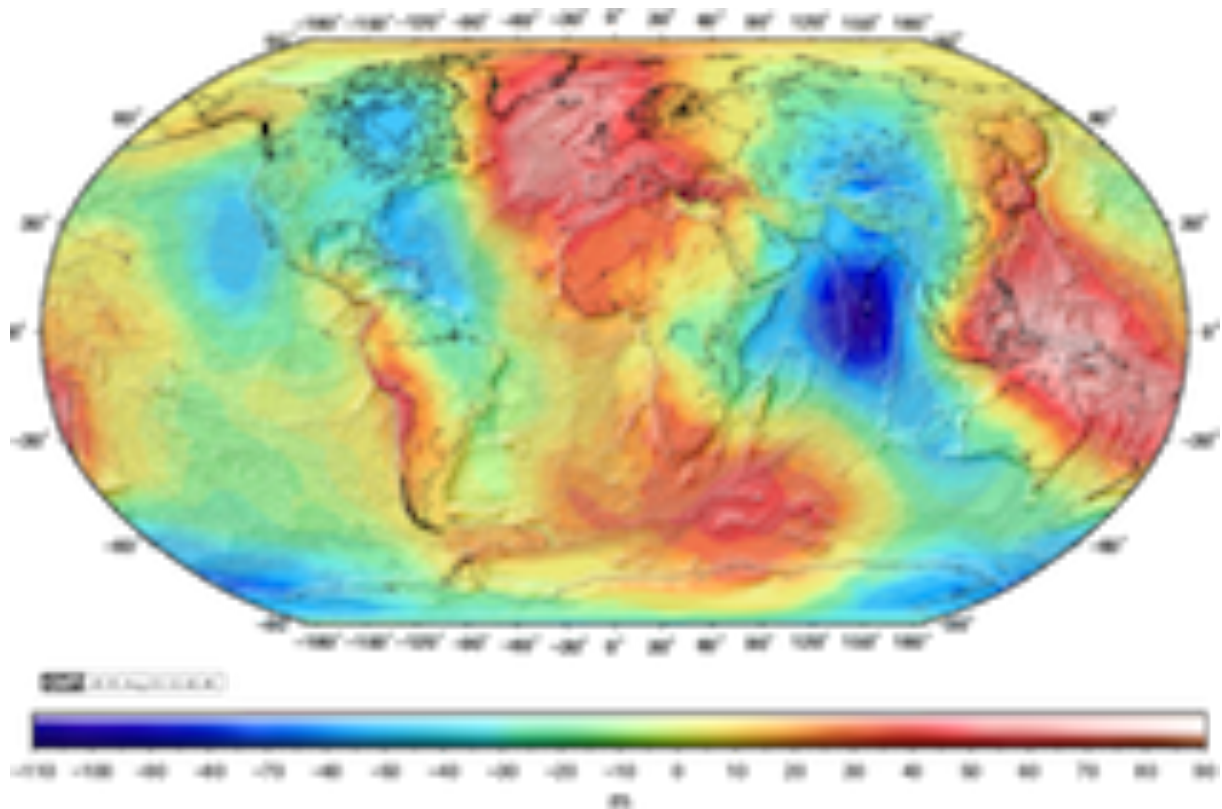


FIGURE 5.5 – Carte de l'ondulation du géoïde mondial ($0,1^\circ \times 0,1^\circ$) par rapport à l'ellipsoïde équipotentiel du modèle GRS 80, calculée à partir du modèle spatial GGM05G (cf Tab. 5.1) Ces données indiquent que les valeurs de l'ondulation varient entre $-107,5$ m et $+84,6$ m avec un écart quadratique moyen de $30,6$ m.

Calcul réalisé à l'aide du calculateur en ligne de l'ICGEM (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/Service.html>). Données topographiques issues de ETOPO1 (AMANTE et EAKINS, 2009). Carte produite à l'aide du logiciel GMT (WESSEL et al., 2013).

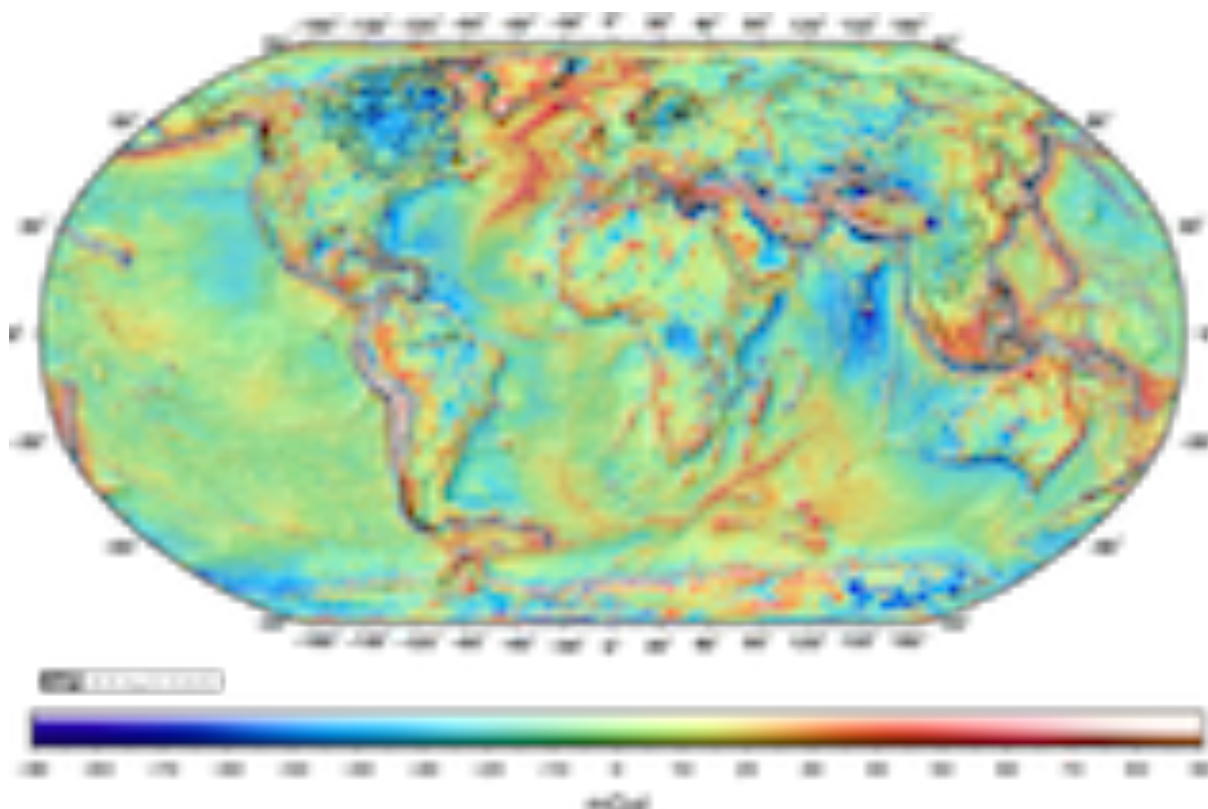


FIGURE 5.6 – Carte de l'anomalie à l'air libre mondiale ($0,5^\circ \times 0,5^\circ$), calculée à partir du modèle spatial GGM05G (cf Tab. 5.1) Ces données indiquent que les valeurs de l'anomalie varient entre $-335,4$ mGal et $+390,2$ mGal avec un écart quadratique moyen de $28,7$ mGal. L'échelle de la teinte hypsométrique a volontairement été limitée à l'intervalle $[-90 \text{ mGal}; +90 \text{ mGal}]$ afin de mettre en évidence les plus petites variations. Les plus grandes valeurs positives se localisent sur les plus hauts reliefs tels ceux de l'Himalaya ou de la Cordillère des Andes. À l'inverse, les anomalies négatives de plus grandes amplitudes concernent les fosses océaniques.

Calcul réalisé à l'aide du calculateur en ligne de l'ICGEM (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/Service.html>). Données topographiques issues de ETOPO1 (AMANTE et EAKINS, 2009). Carte produite à l'aide du logiciel GMT (WESSEL et al., 2013).

La figure 5.7, p. 137, présente une autre évaluation du modèle basée sur une comparaison spectrale avec le modèle combiné le plus récent, à savoir EIGEN-6C4 (cf Tab. 5.1, p. 130). Cette figure montre d'abord, pour chacun des modèles, les contributions par degré aux ondulations du géoïde, puis les différences entre les amplitudes des coefficients d'harmoniques sphériques par degré, et en fonction du degré maximum considéré dans la série d'harmoniques sphériques. Cette dernière courbe peut être considérée comme celle des différences cumulées jusqu'à degré maximum donné. Ces courbes indiquent qu'au-delà du degré 10, les contributions aux ondulations du géoïde sont d'amplitude inférieure à 1 m. Globalement, les différences cumulées entre les deux modèles ne dépassant pas 10 cm. Ensuite, il est clair que les différences par degré atteignent le niveau de l'erreur formelle seulement pour les hauts degrés; le niveau 1 cm est atteint seulement pour le degré 220. En revanche, les différences cumulées dépassent l'erreur formelle dès le degré 110, si bien que les différences entre les deux modèles deviennent significatives. Au-delà du degré 170, les différences cumulées entre les deux modèles dépassent les amplitudes des contributions aux ondulations du géoïde. L'incertitude sur le modèle le moins performant atteint alors au moins 50 % de la contribution à l'ondulation au degré considéré, soit ici 2,5 cm au degré 170, ce qui est compatible avec une erreur formelle entre 1,0 et 1,5 cm.

La figure 5.8, p. 138 représente les mêmes courbes que précédemment pour le modèle combiné EGM2008 (cf Tab. 5.1, p. 130). Une stabilisation remarquable de la différence cumulée à 10 cm est observable dès le degré 200, qui indique la présence d'un biais entre les modèles EGM2008 et EIGEN-6C4.

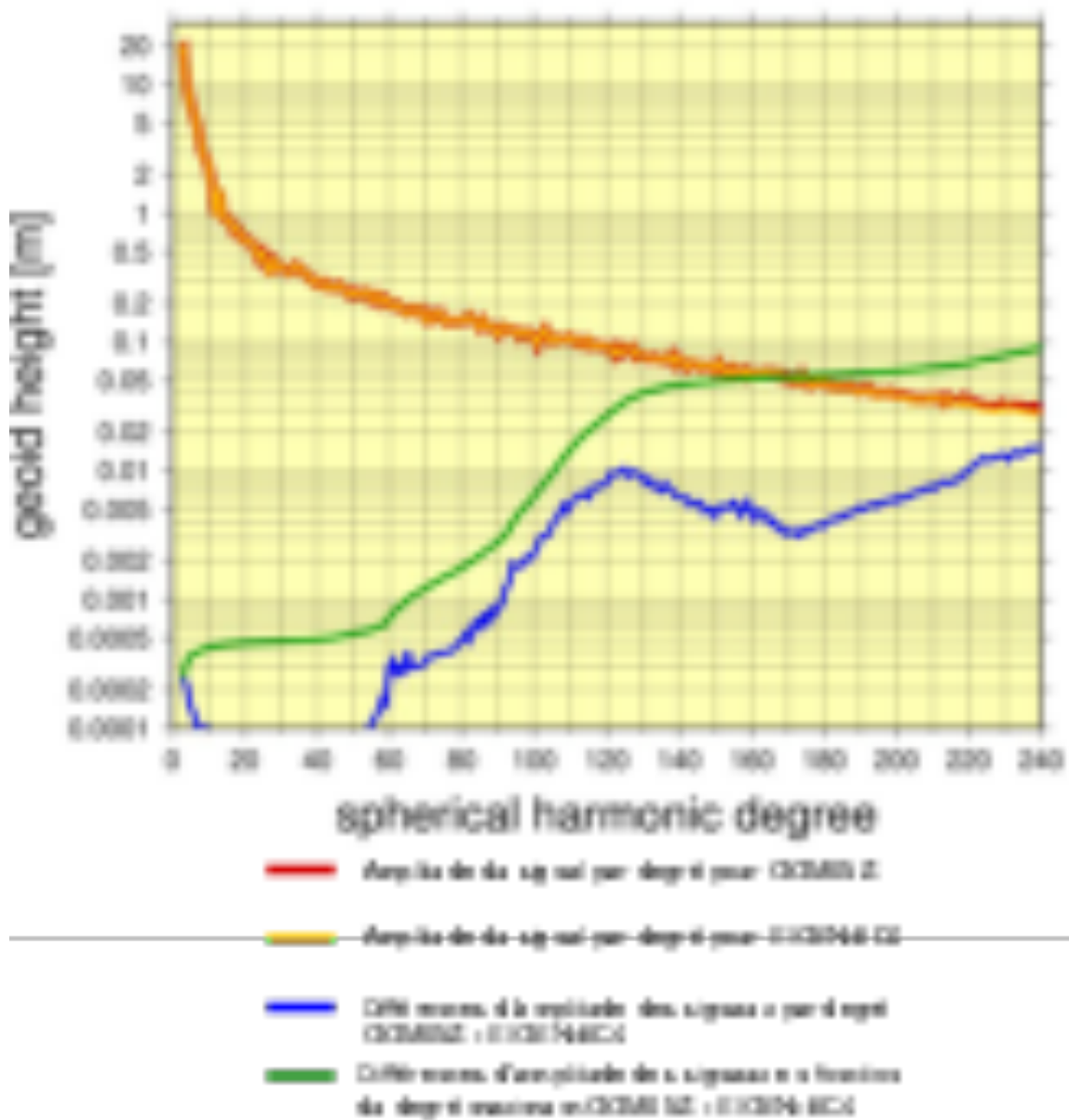


FIGURE 5.7 – Courbes des contributions spectrales des modèles GGM05S et EIGEN-6C4 à l'ondulation du géoïde, et courbes des différences spectrales entre les deux modèles. D'après BARTHELMES et KÖHLER (2012) sur le site <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>.

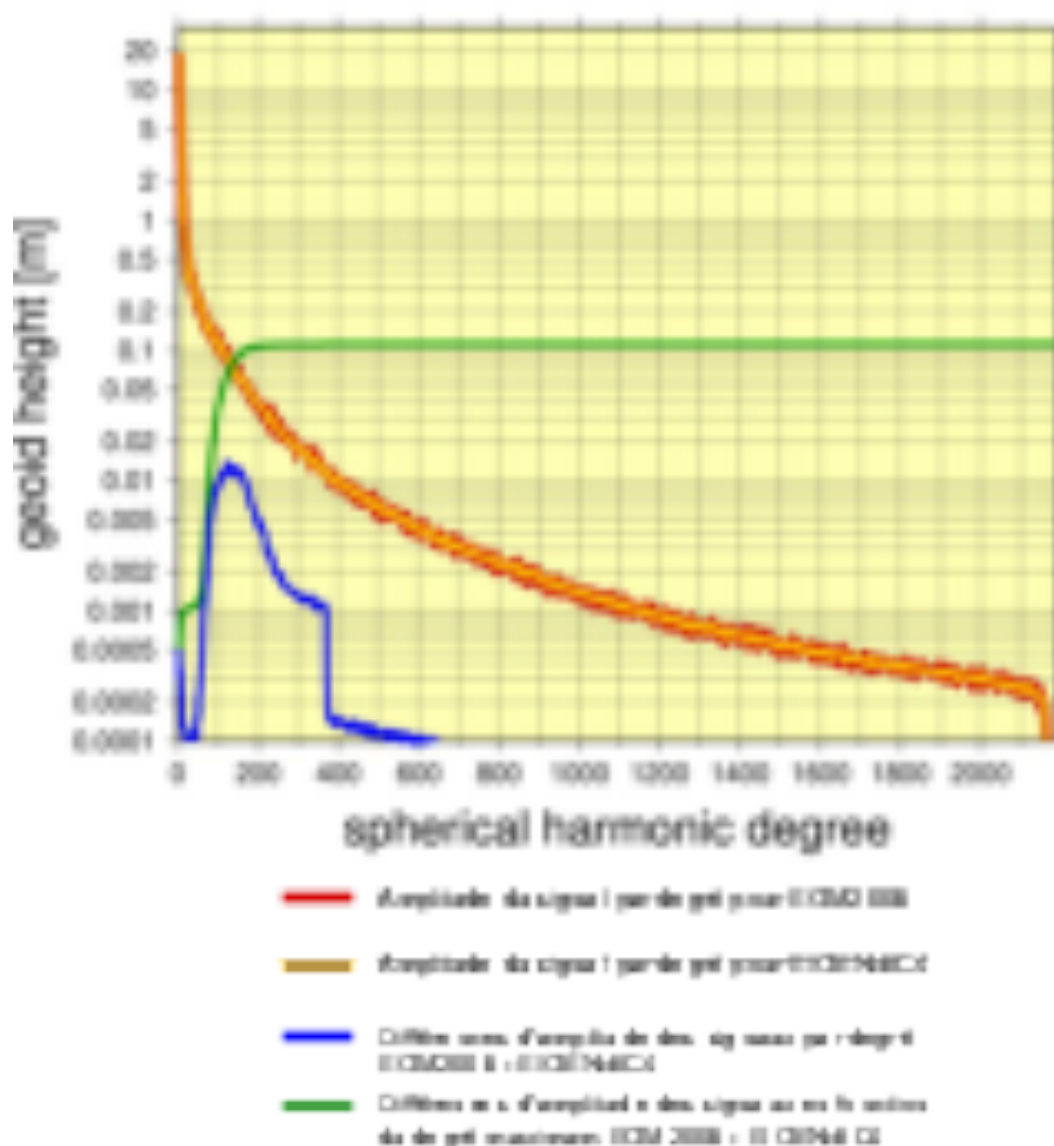


FIGURE 5.8 – Courbes des contributions spectrales des modèles EGM2008 et EIGEN-6C4 à l'ondulation du géoïde, et courbes des différences spectrales entre les deux modèles. D'après BARTHELMES et KÖHLER (2012) sur le site <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>.

L'exactitude de ces modèles peut être évaluée par rapport au champ réel : les erreurs proviennent alors principalement de la non prise en compte des plus courtes longueurs d'onde du champ. L'exactitude de la représentation du champ total dépend alors à la fois du contenu spectral du champ et, principalement, de la qualité des données sol disponibles pour le calcul des courtes longueurs d'onde. Le tableau 5.2, p. 139, représente par exemple les erreurs des modèles GGM05G, EGM2008 et EIGEN-6C4 en fonction de la région. Ces dernières sont comprises entre 10 et 40 cm pour les territoires étudiés, qui constituent un échantillon représentatif de l'ensemble des territoires émergés du globe. Ici, la comparaison est faite avec des points à la fois mesurés par GNSS et nivelés (points GNSS nivelés) : les différences calculées comprennent donc à la fois les erreurs du modèle et les erreurs systématiques des référentiels d'altitude des pays, qui peuvent également être de l'ordre du décimètre. Il faut donc retenir que l'exactitude — par rapport au champ total — des modèles de géopotential est de l'ordre de plusieurs décimètres à terre, et qu'elles dépassent d'un ordre de grandeur les

erreurs formelles publiées par les auteurs. La comparaison réalisée ici doit être renouvelée pour les mers où les données d'altimétrie satellitaire permettent une meilleure estimation du géoïde marin.

Modèle	Degré	Pays – Nombre de points de mesure						
		USA	Canada	Europe	Australie	Japon	Brésil	Total
		6 169	2 691	1 047	201	816	1 112	12 036
GGM05G	210	44,8 cm	37,4 cm	45,4 cm	35,7 cm	54,3 cm	52,1 cm	44,6 cm
EGM2008	2190	24,8 cm	12,8 cm	12,5 cm	21,7 cm	8,3 cm	46,0 cm	23,9 cm
EIGEN-6C4	2190	24,7 cm	12,6 cm	12,1 cm	21,2 cm	7,9 cm	44,6 cm	23,6 cm

TABLEAU 5.2 – Écarts quadratiques moyens entre les ondulations du géoïde calculées à l'aide de points GNSS nivelés et celles déduites du modèle de géoïde sur différents pays. Le nombre inscrit sous le nom du pays correspond au nombre de points utilisés pour le calcul. D'après BARTHELMES et KÖHLER (2012) sur le site <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>.

L'évolution de la qualité des modèles de géopotential sera gouvernée par les futures missions satellitaires dédiées à la gravimétrie. À très court terme (2017), le projet GRACE Follow On (GRACE – FO), issu d'un partenariat entre la NASA et le GFZ, devrait succéder à la mission GRACE en améliorant l'exactitude sur les données de poursuite. Les exactitudes visées sont de l'ordre de 1 à 2 cm sur le géoïde à des résolutions de l'ordre de 50 à 100 km, mais la faisabilité d'une amélioration significative par rapport à GOCE sur le champ statique reste à démontrer. Le CNES a également planifié pour 2016, une mission spatiale de physique fondamentale baptisée « MICROSCOPE » (MICRO-Satellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Équivalence). Cette mission a pour objectif principal un test du Principe d'Équivalence avec une incertitude inférieure de deux ordres de grandeur à celle obtenue à partir d'expériences terrestres (cf le site du CNES <http://missions-scientifiques.cnes.fr/MICROSCOPE/Fr/>). Pour ce, elle prévoit des mesures d'accélération d'une incertitude de l'ordre de 10^{-12} ms^{-2} grâce à un micro-satellite à traînée continûment compensée, orbitant à 700 km d'altitude. Les données de MICROSCOPE sont potentiellement utilisables pour le calcul d'un modèle de géopotential. À plus long terme (10 à 20 ans), le moteur principal dans ce domaine reste pour longtemps l'étude de l'évolution du climat. Les missions de type GRACE visent à déterminer les variations temporelles du champ de gravité avec pour objectif la modélisation des transferts de masse – en particulier de l'eau –. Compte tenu de l'atténuation des courtes longueurs d'onde du champ avec l'altitude et des limites imposées par l'atmosphère pour le choix de l'altitude de vol d'un satellite de durée de vie raisonnable, il semble peu probable, même à l'horizon de 20 ans, que le champ de pesanteur puisse être observé depuis l'espace à une résolution meilleure que plusieurs dizaines de kilomètres. Les progrès attendus ne porteront donc pas tant sur le champ de pesanteur lui-même que sur les modèles climatologiques qui seront permis par ces missions, et en particulier sur les modèles de circulation océanique, qui auront un impact important sur la détermination de la pesanteur en mer.

5.1.3 L'altimétrie satellitaire

La seconde source d'information globale sur le champ de pesanteur disponible uniquement en mer, provient de l'altimétrie satellitaire (Fig. 5.9). Depuis plus de 40 ans, la hauteur de la mer au-dessus de l'ellipsoïde est cartographiée par des satellites équipés d'un RADAR, permettant une détermination de cette surface à des précisions initialement de l'ordre de

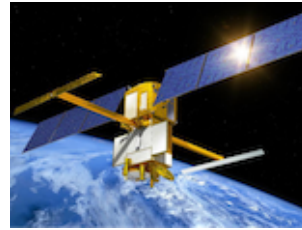
quelques décimètres, et aujourd'hui de quelques centimètres pour les longueurs d'onde supérieures à la dizaine de kilomètre. La connaissance de la surface de l'océan n'apporte pas directement une information sur la pesanteur. Les modèles de géoïde qui en sont issus dérivent donc d'un processus complexe d'assimilation de données dont nous allons seulement donner les grandes lignes.



(a) Jason-2
(alt. : 1 336 km)



(b) Envisat (alt. : 800 km)



(c) SWOT (alt. : 891 km)

FIGURE 5.9 – Vues de deux satellites altimétriques opérationnels Jason-2 (lancé le 20 juin 2008) et Envisat (lancé le 1^{er} mars 2002), et du futur satellite SWOT (Surface Water and Ocean Topography).

Droits réservés ©ROSMORDUC et al. (2011), ©CNES, ©Collecte Localisation Satellites (CLS), Space Oceanography Division, Aviso.

5.1.3.1 Généalogie

Les satellites altimétriques mesurent la *hauteur instantanée SSH* de l'océan (Sea Surface Height) dans un repère lié à un modèle de la forme de la Terre, c'est-à-dire, par exemple, au-dessus d'un ellipsoïde (Fig. 5.10, 141). Cette hauteur peut être directement comparée à la hauteur donnée par un récepteur GNSS monté sur une bouée aux problèmes de résolution spatiale près. Actuellement, cette hauteur est mesurée à une précision annoncée de 2 à 3 cm. Les comparaisons entre les déterminations effectuées par les satellites TOPEX/POSEIDON et JASON-1 montrent toutefois que les erreurs peuvent parfois être de l'ordre de 5 cm sur des régions assez larges (STAMMER et al., 2004).

Le traitement des données acquises par le satellite est extrêmement complexe. Il s'appuie sur une détermination de l'orbite du satellite de grande qualité – l'exactitude actuelle de l'orbitographie des satellites altimétriques récents est de l'ordre de 1 cm – qui nécessite la corrections d'effets aussi divers que les irrégularités de la propagation des ondes radar dans l'atmosphère ou l'incidence de l'état de la mer sur le centrage de la mesure (ROSMORDUC et al., 2011). La mesure continue de cette hauteur, avec une répétitivité assurée par un choix d'orbite permettant un passage exact sur les mêmes traces avec une périodicité fixée – 10 jours pour les satellites TOPEX/POSEIDON, Jason-1 & 2, par exemple –, permet d'accéder à la surface moyenne océanique $\langle SSH \rangle$.

Si N désigne la hauteur du géoïde (Fig. 5.10, p. 141) – surface d'équilibre de l'océan – et $\langle MDT \rangle$, la *topographie dynamique moyenne* de l'océan (Mean Dynamic Topography, cf Fig. 5.11a, p. 142), alors la relation qui lie ces grandeurs à la surface moyenne océanique s'écrit :

$$\langle SSH \rangle = N + \langle MDT \rangle. \quad (5.1)$$

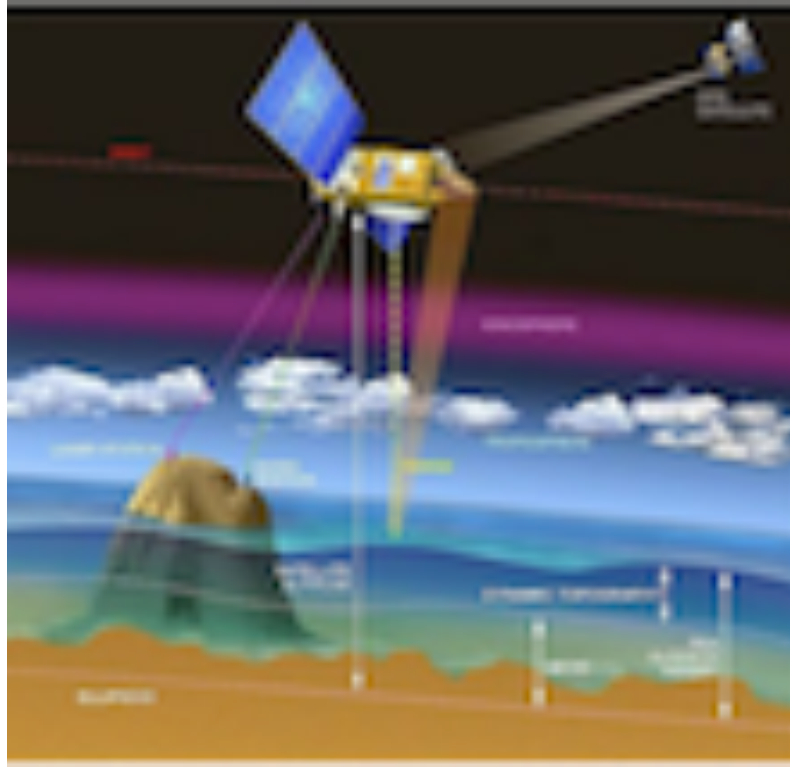
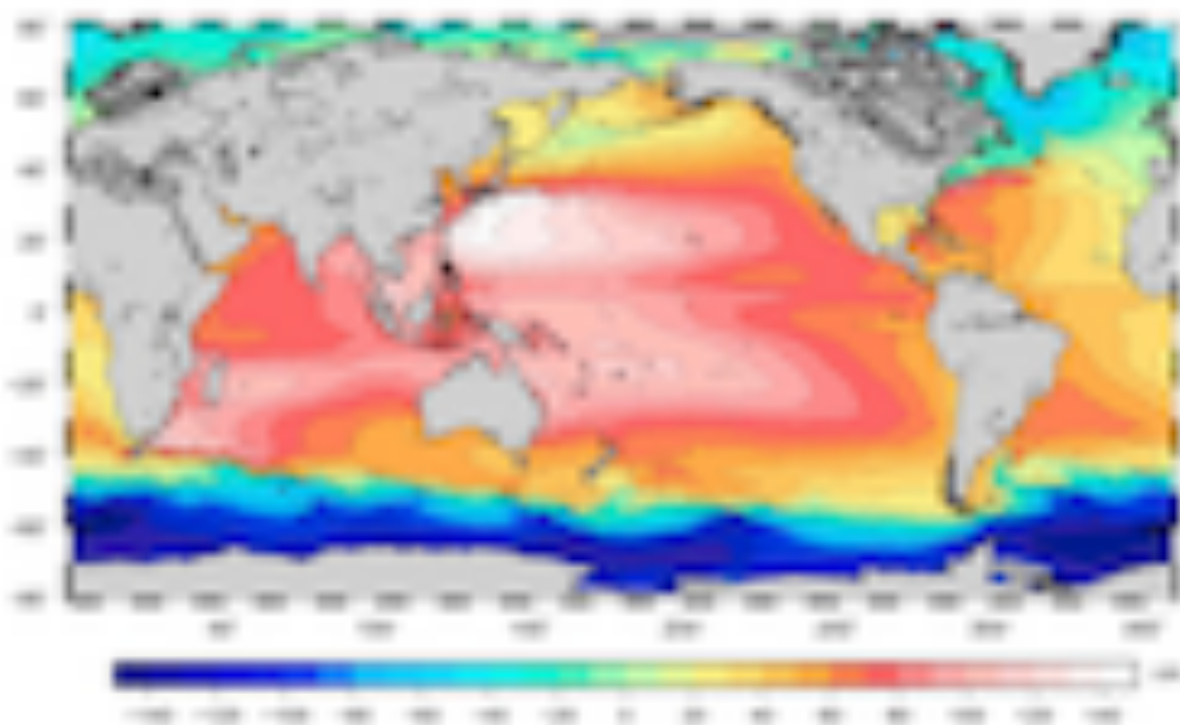


FIGURE 5.10 – Principe de la mesure réalisée en altimétrie satellitaire. Droits réservés ©CNES/D. Ducros.

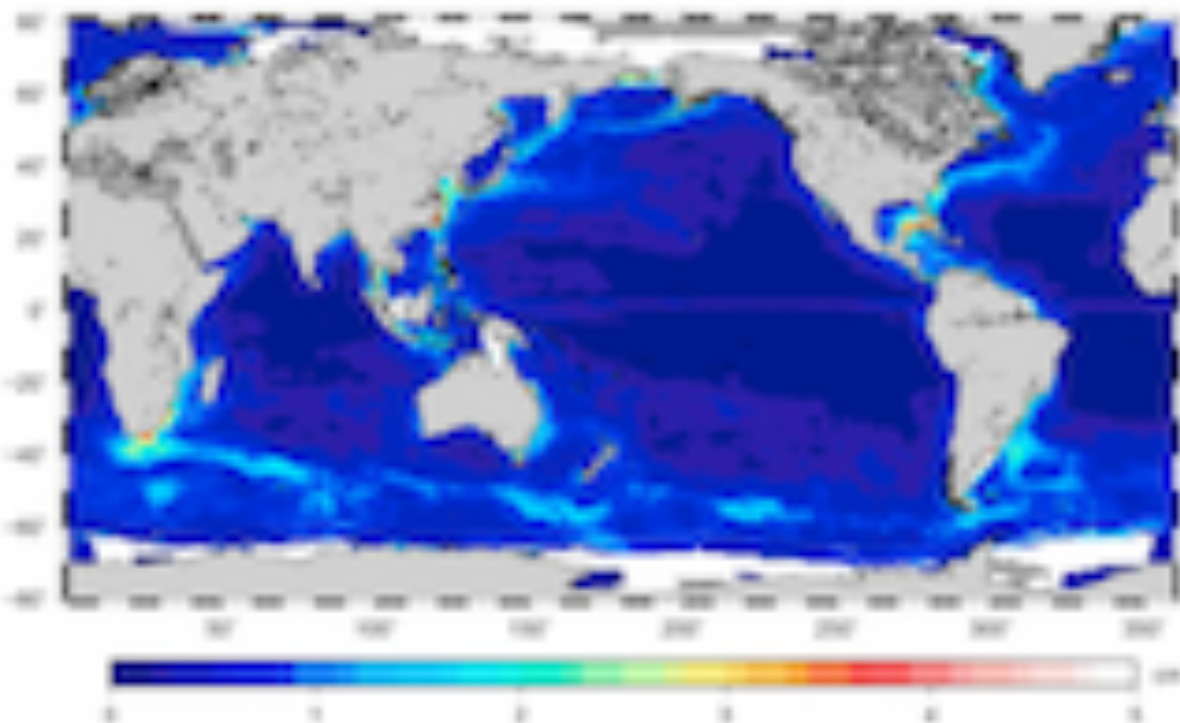
La surface moyenne des océans donne donc accès au géoïde pourvu que l'on puisse déterminer la topographie dynamique moyenne. Actuellement, la méthode la plus fiable pour la détermination de cette topographie est l'utilisation de modèles de circulation océanique générale, assimilant à la fois des données océanographiques in situ et, éventuellement, des premières approximations du géoïde – les modèles de géopotentiel par exemple – et les données d'altimétrie satellitaire (RIO et al., 2011).

L'erreur formelle des modèles de topographie dynamique océanique moyenne est de l'ordre de 1 à 2 cm aux latitudes comprises entre -60° et 70° (cf Fig. 5.11b), sauf près des côtes où la modélisation des courants est complexe. Les modèles sont fournis à la résolution des données d'altimétrie satellitaire, c'est-à-dire de l'ordre de 10 km.

Les modèles de géoïde sont déduits de l'estimation de la topographie dynamique moyenne par la relation 5.1. Ils sont qualifiés modèles de géoïde « synthétiques » par opposition aux modèles de géoïde issus de la gravimétrie. Une carte d'anomalies gravimétriques peut être déduite de la hauteur du géoïde en utilisant les propriétés d'harmonicité du champ de gravitation et la relation 3.48 (cf Chap. 3, section 3.3).



(a) Variations spatiales de la topographie dynamique moyenne $\langle MDT \rangle$. L'amplitude de cette topographie est de l'ordre de 1 m. La détermination du géoïde en mer à partir de la surface moyenne océanique suppose la connaissance préalable de cette surface associée à son incertitude.



(b) Répartition spatiale des erreurs formelles (cm) sur la topographie dynamique moyenne.

FIGURE 5.11 – Modèle de topographie dynamique moyenne CNES-CLS09 (RIO et al., 2011) au pas de $15' \times 15'$. Droits réservés ©CLS, Space Oceanography Division, Aviso (<http://www.aviso.altimetry.fr>), with the support from CNES.

5.1.3.2 Qualité des modèles de champ dérivés de l'altimétrie satellitaire

L'exactitude des modèles de champ de gravité issus de l'altimétrie satellitaire est liée à celle de la surface moyenne des océans (Fig. 5.12) et à celle des modèles de topographie dynamique moyenne (cf Fig. 5.11, p. 142). L'erreur sur la surface moyenne des océans peut être évaluée soit à partir d'une évaluation de l'exactitude des mesures satellitaires, elle-même accessible à partir d'une modélisation des erreurs d'orbites et des erreurs de mesures (estimée lors des opérations de calibration en vol), ou par intercomparaison des différents satellites; soit par intercomparaison des surfaces calculées par les différents laboratoires (Fig. 5.13, p. 145).

L'exactitude de la topographie dynamique moyenne peut être évaluée par comparaison à des mesures in situ des vitesses des courants. Cette évaluation nécessite le calcul de la topographie dynamique instantanée, somme de la topographie dynamique moyenne et de l'anomalie du niveau de la mer ou *SLA* (Sea Level Anomaly) : les erreurs évaluées sont donc une combinaison des erreurs de l'altimétrie satellitaire instantanée et des erreurs de la topographie dynamique moyenne. L'erreur commise sur le géoïde – et donc sur le champ de gravité – peut en être déduite, en prenant toutefois garde au fait que les erreurs sur la topographie dynamique moyenne et sur la surface moyenne océanique sont évidemment corrélées. Localement, le modèle de champ peut également être comparé à des campagnes marines ou aériennes in situ : cette évaluation complémentaire présente l'avantage d'être indépendante de la précédente.

Une comparaison des modèles proposée par SCHAEFFER et al. (2010), montre que ces modélisations contemporaines de la surface moyenne océanique s'accordent à mieux que 10 cm près sur la Terre entière. Les erreurs attendues doivent donc être de cet ordre de grandeur sur le géoïde. En admettant une incertitude $\sigma_N = 10$ cm sur l'ondulation du géoïde, il est possible d'estimer une borne supérieure σ_g de l'incertitude sur l'anomalie gravimétrique par un calcul de propagation d'erreur à partir de la relation 3.48; plus précisément, si l_{max} désigne le degré maximum utilisé dans la modélisation en harmoniques sphériques de l'ondulation, il vient :

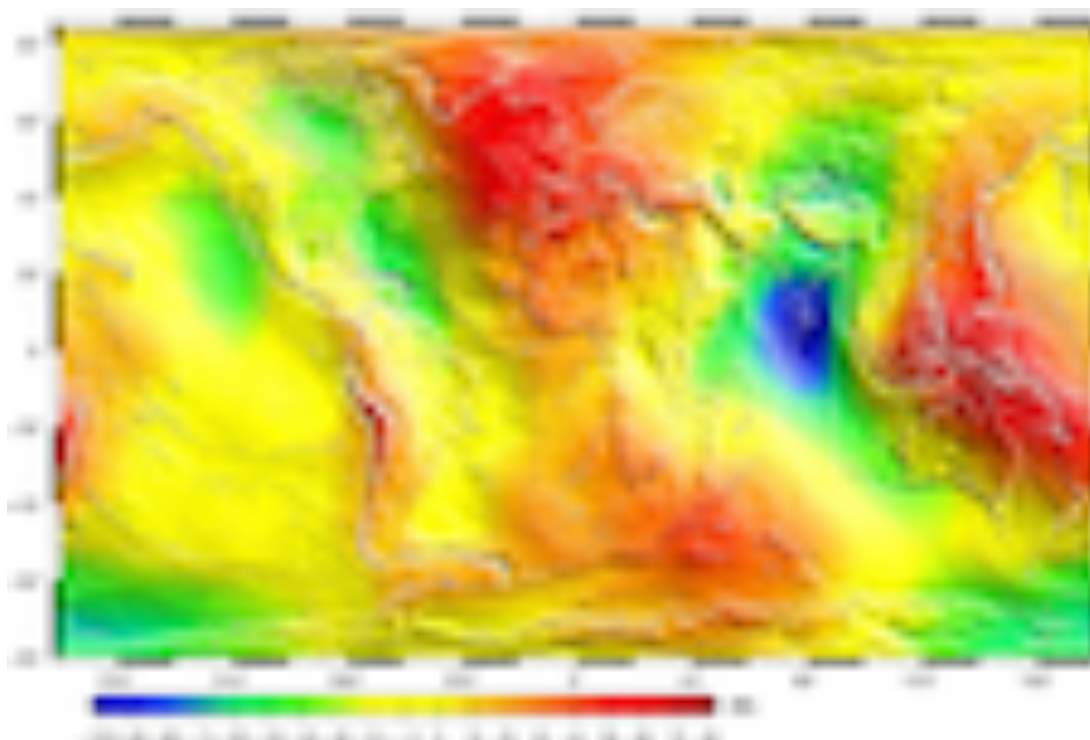
$$\sigma_g = (l_{max} - 1) \frac{g_a}{a} \sigma_N. \quad (5.2)$$

En prenant $g_a = 9,82 \text{ ms}^{-2}$ et $a = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$, il vient numériquement :

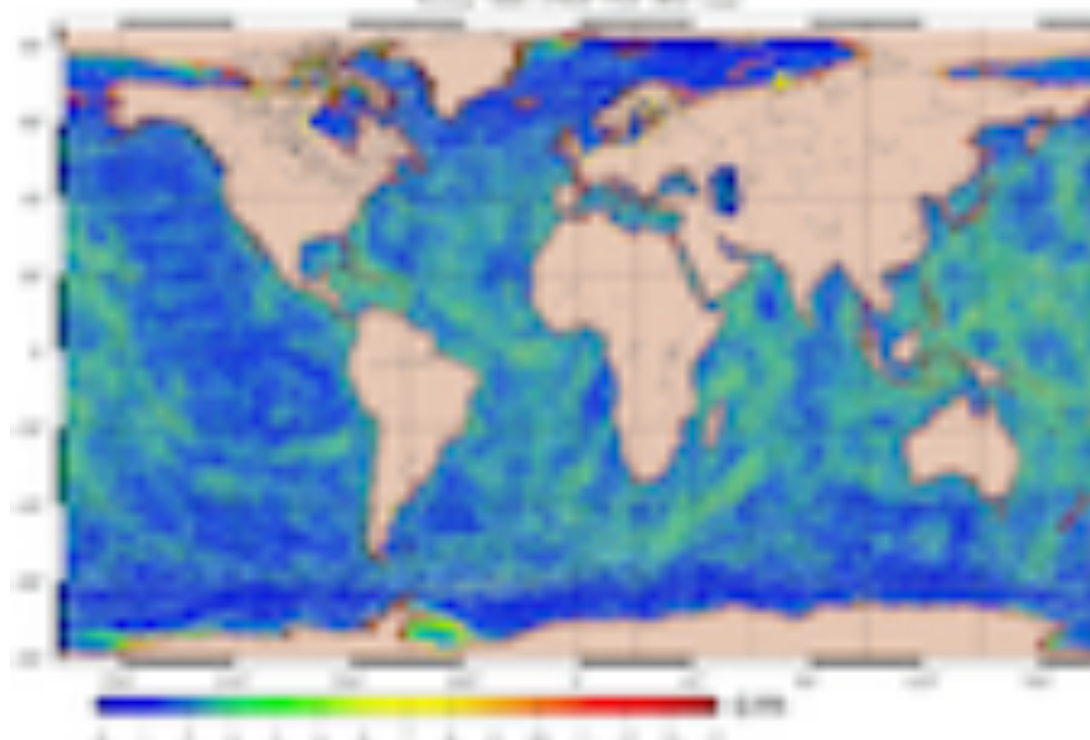
$$\sigma_g [\text{mGal}] = 1,5 \times 10^{-1} (l_{max} - 1) \sigma_N [\text{cm}]$$

Pour $\sigma_N = 10$ cm, l'incertitude maximale sur l'anomalie gravimétrique atteint donc 4,5 mGal à la résolution des modèles spatiaux ($l_{max} = 300$, soit 67 km) et 30 mGal à la résolution des modèles combinés ($l_{max} = 2000$, soit 10 km). Il faut donc avoir conscience de ce que les courtes longueurs d'onde des anomalies gravimétriques déduites de l'altimétrie satellitaire, sont aussi celles affectées par les plus fortes incertitudes. Cette constatation illustre une limite de la méthode qui s'ajoute aux inexactitudes à l'approche de la bande côtière.

L'évolution prévisible de l'exactitude de ces modèles est liée aux progrès conjoints de l'altimétrie satellitaire, en exactitude comme en résolution, de la mesure directe du champ de gravité depuis l'espace, ainsi qu'à ceux des modélisations de l'océan et des processus d'assimilation.

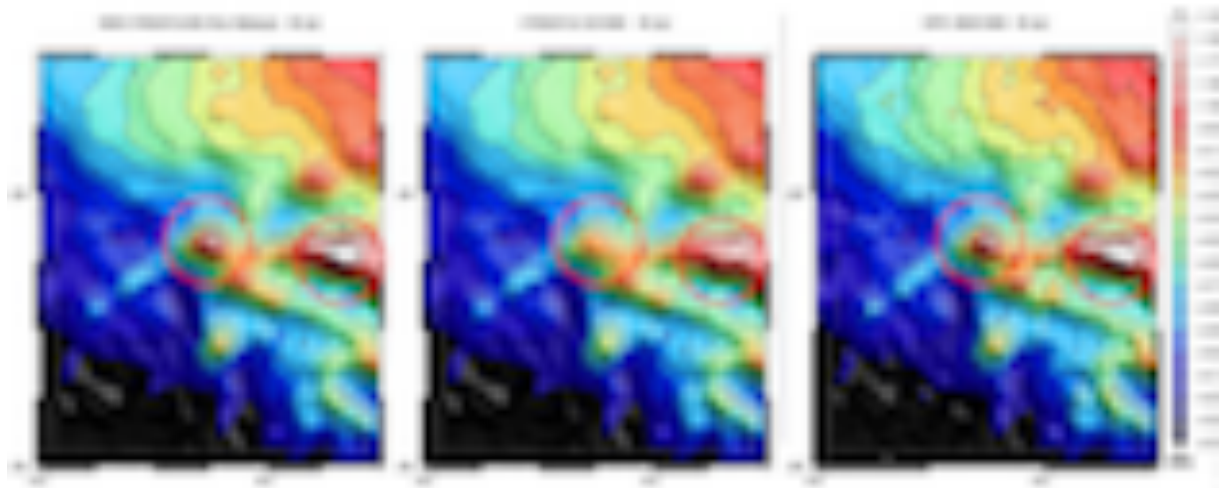


(a) Variations spatiales de la surface océanique moyenne $\langle SSH \rangle$.

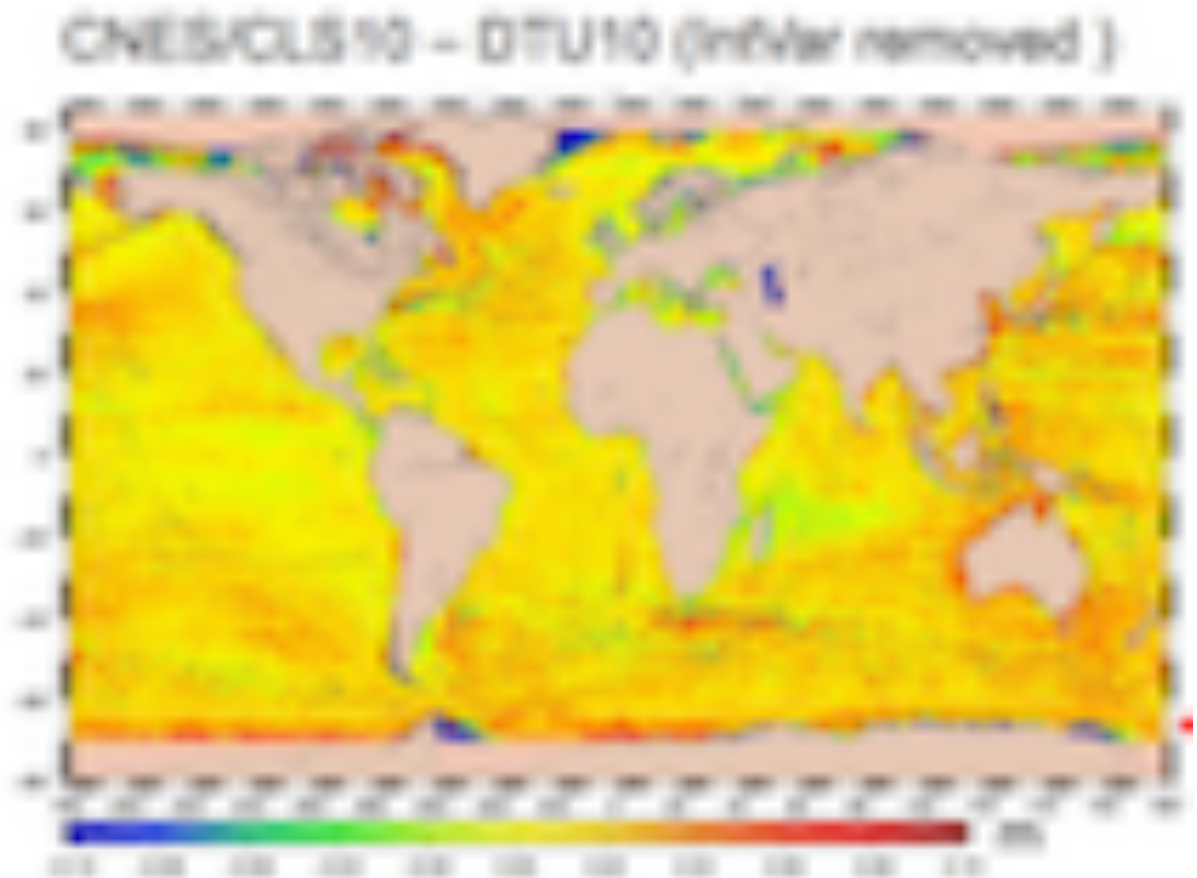


(b) Répartition spatiale des erreurs formelles sur la surface océanique moyenne.

FIGURE 5.12 – Modèle de surface océanique moyenne CNES-CLS11 (SCHAEFFER et al., 2012) au pas de $2' \times 2'$ calculé à partir de 16 années de mesure altimétrique. Cette surface comprend sur l'océan les contributions de la topographie dynamique moyenne (1993 – 1999) et de l'ondulation du géoïde. Le géoïde est prolongé sur les continents par le modèle spatial EIGEN-5C (cf Tab. 5.1) calculé à partir des données de GRACE. La bande côtière jusqu'à 50/100 km dans les terres correspond à une extrapolation lissée de la surface océanique moyenne vers le géoïde issu du modèle EIGEN-5C. *Droits réservés* ©CLS Space Oceanography Division, Aviso (<http://www.aviso.altimetry.fr>), with the support from CNES.



(a) Comparaison locale de deux modèles de surface moyenne océanique CNES-CLS10 et DTU 2010 (ANDERSEN et KNUDSEN, 2010) d'après SCHAEFFER et al. (2010). Les cartes CNES-CLS10 et CNES-CLS10 « New Release » sont produites avec deux stratégies différentes, la première ayant vraisemblablement sous-estimée la hauteur des monts sous-marins entourés en rouge.



(b) Cartes des différences des surfaces moyennes océaniques données respectivement par les modèles CNES-CLS10 et DTU 2010 après correction d'une variabilité inter-annuelle (SCHAEFFER et al., 2010).

FIGURE 5.13 – Comparaisons de modèles donnant la surface moyenne océanique en vue d'en évaluer l'incertitude. Cette dernière intervient directement dans le bilan d'erreur sur le géoïde marin. Droits réservés ©CLS Space Oceanography Division, Aviso (<http://www.aviso.altimetry.fr>), with the support from CNES.

5.1.4 Les données gravimétriques acquises sur la surface terrestre

Nous abordons à présent les données gravimétriques non satellitaires qui peuvent être constituées par :

- des mesures directes sur la surface du sol;
- des mesures en puits de forage;
- des mesures en mer depuis un navire océanographique ou une vedette hydrographique;
- des mesures en fond de mer et à bord de submersible;
- des mesures aéroportées.

Il est donc entendu que le terme « surface terrestre » doit être envisagé dans une acception suffisamment large pour y inclure des données acquises « au voisinage » de la surface terrestre. C'est le cas de la gravimétrie aéroportée et, également, de la gravimétrie marine dans la mesure où les sources d'intérêts sont constituées par les structures sous-marines en dessous de la couche d'eau. En dehors de toute considération de l'incertitude des mesures, cette division demeure néanmoins appropriée pour une classification des données en termes d'échelle et de résolution spatiales. Contrairement aux données de gravimétrie spatiale, les données terrestres s'appliquent aux échelles locales et régionales et leur résolution spatiale est directement fonction du taux d'échantillonnage, qui peut varier en fonction des conditions de lever. Seules des données spatiales couvrent globalement notre planète avec un taux d'échantillonnage constant.

Les instruments de mesure de la pesanteur en domaine terrestre, diffèrent notamment par la nature du capteur et l'adaptation éventuelle à un porteur mobile. Nous allons décrire brièvement les grands types d'instruments et leur domaine d'application en vue de reconstituer la généalogie des données gravimétriques terrestres.

5.1.4.1 Généalogie

5.1.4.1.1 Gravimétrie terrestre statique

Dès la fin de la 2^e guerre mondiale, les développements technologiques ont suscité des progrès considérables en instrumentation marqués par l'apparition de gravimètres portables de grande qualité (Fig. 5.14). Il s'agit d'instruments « scalaire » qui mesurent la composante verticale de la pesanteur, soit par sa valeur absolue, soit par la variation de cette dernière depuis un point de mesure pris comme référence. Ce dernier type d'instruments qualifié de gravimètre relatif (Fig. 5.15a, p. 147), a été largement utilisé en prospection minière et pétrolière, ainsi que pour l'exploration géophysique. Le principe de base de la mesure repose sur l'utilisation d'un peson à ressort sensible à toute variation de la pesanteur terrestre. La tension du ressort nécessaire pour ramener le peson à sa position d'équilibre est alors directement proportionnelle à la variation de pesanteur depuis le dernier point de mesure. Utilisé dans de bonnes conditions de mesure (faible bruit sismique), un gravimètre relatif à peson peut donner une valeur de la pesanteur



FIGURE 5.14 – Mesure gravimétrique au sol pratiquée avec un gravimètre relatif. Droits réservés ©Géosciences Montpellier.

avec une incertitude de 10^{-2} mGal. Une telle performance nécessite cependant une correction des mesures d'une dérive temporelle inhérente au capteur. En effet, les propriétés mécaniques des ressorts, notamment le coefficient de raideur, varie en cours de fonctionnement, ce qui peut entraîner des dérives atteignant quelques milligals par jour. Le contrôle de la dérive suppose donc la réalisation d'un nombre suffisant de réoccupations en vue de son estimation lors du traitement des données. Le principe du peson à ressort est également utilisé dans les gravimètres de puits. Le capteur est alors placé dans un boîtier spécifique circulaire, pour pouvoir être inséré et retiré aisément d'un trou de forage (Fig. 5.15b).



(a) Gravimètre à peson « CG-5 AUTOGRAV™ » commercialisé par la société @Scintrex.
Droits réservés ©Scintrex.



(b) (1) Gravimètre de puits de forage « BHGM™ » commercialisé par la société @Micro-g LaCoste. (2) Vue d'un lever en puits de forage au Canada.
Droits réservés ©Micro-g LaCoste.

FIGURE 5.15 – Deux exemples d'instruments pour la réalisation de mesures relatives et statiques de la pesanteur depuis la surface de la Terre (Fig. 5.15a) et en puits de forage (Fig. 5.15b).

La mesure des variations temporelles de la pesanteur en des points fixes est réalisée avec un autre type de gravimètre relatif dit supraconducteur (Fig. 5.16) à très faible dérive temporelle, de l'ordre du microgal par an. Ces derniers mesurent les variations de la pesanteur en détectant leurs effets sur le mouvement d'une sphère supraconductrice en lévitation. La lévitation est réalisée par la circulation de courants d'intensité constante dans deux bobines supraconductrices. Toute variation de la pesanteur se traduit par un déplacement de la sphère, détecté par un système de positionnement capacitif. Ce dernier génère, via une boucle d'asservissement, un courant de compensation qui alimente une bobine auxiliaire. Le champ magnétique additionnel fourni par cette bobine engendre une force magnétique qui ramène la sphère dans sa position initiale. Le matériau qui constitue la sphère est du niobium (Nb) qui atteint l'état supraconducteur à une température de 4,2 K. Cette très basse température est obtenue à l'aide d'un système de réfrigération à hélium gazeux. Un système de compensation de l'inclinaison complète l'instrument afin de corriger les déviations de la verticale locale. Dotés d'une très faible dérive instrumentale (1 à 2 $\mu\text{Gal}/\text{an}$), les gravimètres supraconducteurs présentent une incertitude de l'ordre du microgal. De par sa constitution, en particulier, la présence du dispositif cryogénique, un tel instrument n'est pas aisément transportable, et se destine plutôt à une utilisation en réseau pour étudier, entre autres exemples, les modes propres de vibration de la Terre, la dérive du pôle, les mouvements verticaux de la croûte terrestre dus aux marées terrestres et océaniques, ainsi que les transferts hydrologiques, sur des échelles de temps variant de quelques jours à plusieurs années.



FIGURE 5.16 – Gravimètre supraconducteur « igrav™ » de ©GWR Instruments. Droits réservés ©GWR.

Les mesures de la valeur absolue de la composante verticale de la pesanteur sont réalisées principalement à l'aide de gravimètres absolus dits balistiques (Fig. 5.17). Ces derniers possèdent une chambre à vide dans laquelle un corps pesant constitué par un coin de cube, est susceptible d'effectuer un mouvement de quasi-chute libre, accompagné par celui d'un chariot de réception qui précède le coin de cube (Fig. 5.18, p. 149). Ce dernier permet également de remonter le coin de cube pour effectuer une nouvelle mesure. En mesurant simultanément les positions du corps dans la chambre et les instants associés, il est possible d'estimer la loi du mouvement du corps lors de sa chute afin d'en extraire la valeur de la pesanteur. La mesure de position repose sur une méthode interférentielle utilisant un interféromètre de Michelson³ et une source de lumière laser permettant un positionnement au micromètre près (Fig. 5.19, p. 150). Le temps est mesuré par une horloge atomique au rubidium (Rb). Chaque mesure est constituée d'une succession de chutes assurant ainsi, après moyennage, la redondance nécessaire à l'obtention d'une incertitude de l'ordre du microgal pour les meilleurs instruments. À l'image des gravimètres relatifs supraconducteurs, les gravimètres balistiques se révèlent particulièrement encombrants, et donc plutôt réservés pour la mesure des variations temporelles de la pesanteur ou des levers de longue durée. Cependant,



FIGURE 5.17 – Gravimètre absolu balistique de type A10™ de ©Micro-g LaCoste Instruments. Photo : J. Verdun, IGN Saint-Mandé (94).

3. Michelson, Albert Abraham (1852 – 1931), physicien américain d'origine allemande.

une version transportable de ce gravimètre a été mise au point par la société américaine ©Micro-g LaCoste sous le nom de ©A10 (Fig. 5.17, p. 148). Protégé des vibrations du sol par un amortisseur dynamique, cet instrument permet des mesures de la pesanteur avec une incertitude de $10 \mu\text{Gal}$. Il peut servir à l'établissement de réseaux de contrôle et de rattachement des mesures gravimétriques, tel celui constitué actuellement par le Service de la Géodésie et du Nivellement (SGN) de l'Institut National de l'information Géographique et Forestière (IGN) à partir des points du Réseau de Base Français (RBF).

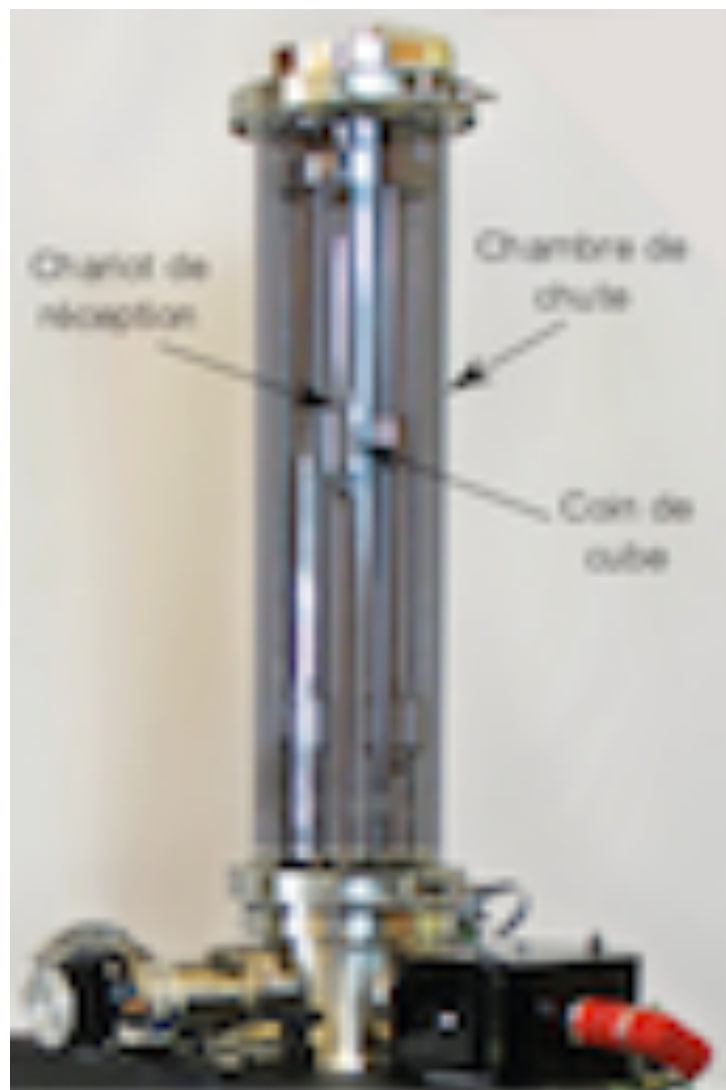


FIGURE 5.18 – Vue de la chambre de chute et du chariot de réception du gravimètre absolu balistique « FG5-X™ » commercialisé par ©Micro-g LaCoste.

Droits réservés ©Micro-g LaCoste.

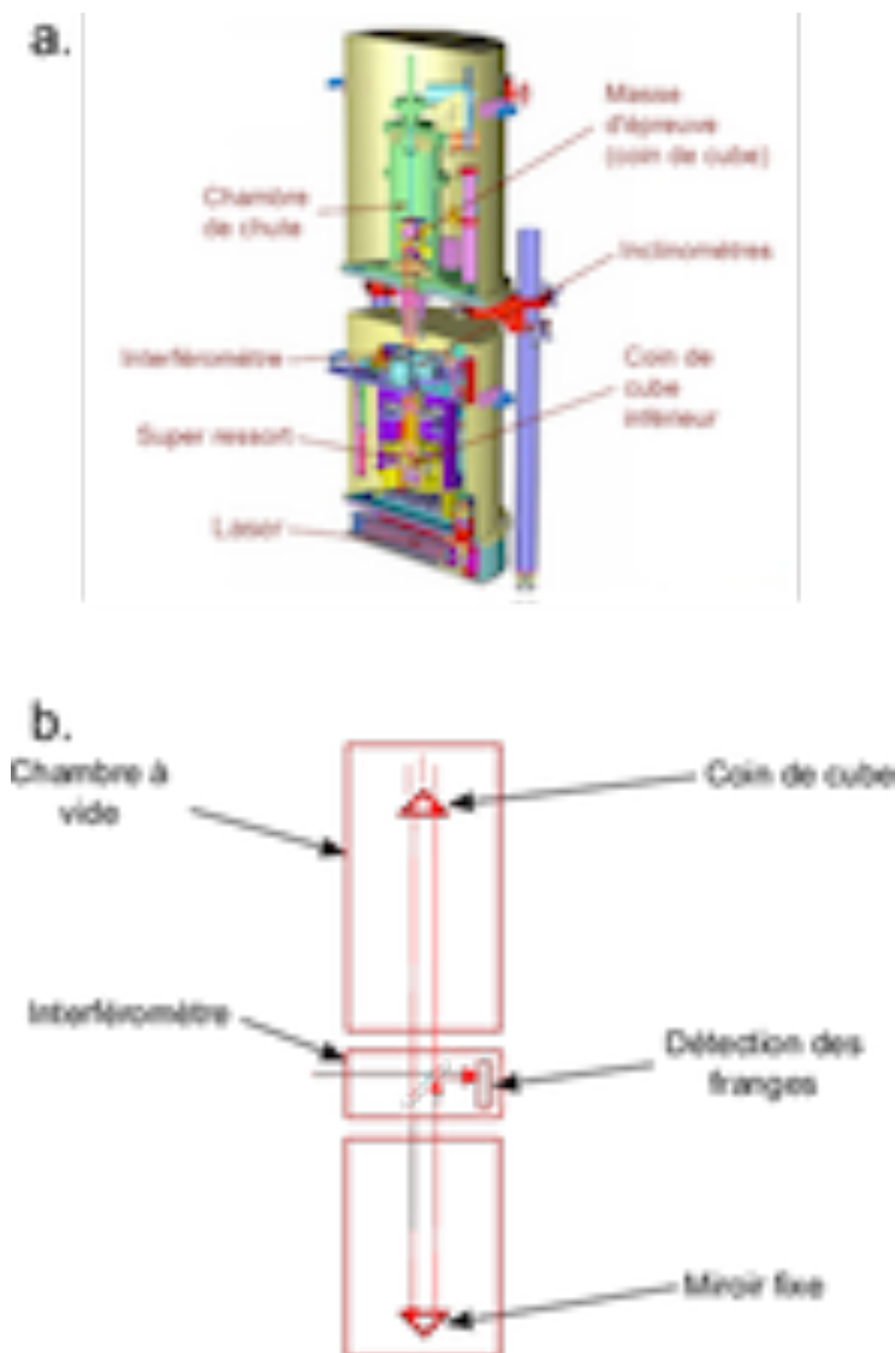


FIGURE 5.19 – (a) Vue en coupe du gravimètre absolu balistique A10™ sur laquelle sont figurés la chambre de chute, l'interféromètre et l'amortisseur dynamique dit « super ressort ». (b) Schéma figurant la marche du faisceau laser dans l'interféromètre de Michelson dont l'un des deux miroirs en coin de cube, constitue la masse d'épreuve en chute libre.

Droits réservés ©Micro-g LaCoste.

5.1.4.1.2 Gravimétrie marine et en fond de mer

En domaine marin, les mesures de gravimétrie mobile marine sont pratiquées en continu à l'aide de gravimètres terrestres « marinisés » (Figs. 5.21 & 5.22) à bord de navires océanographiques (Fig. 5.23). Nous reviendrons plus longuement sur ces systèmes au chapitre 6. Les mesures acquises depuis les navires, sont complétées par des mesures en fond de mer à l'aide de gravimètres relatifs statiques placés à bord de submersibles habités – tel le Nautille de l'Institut Français de Recherche pour l'Exploration de la Mer (IFREMER) – et stabilisés au-dessus du point de mesure. Le gravimètre de fond de mer s'installe également sur une plateforme stabilisée dans des enceintes pressurisées, arrimées en fond de mer ; c'est le principe du système « TOWDOG » développé par la « Scripps Institution of Oceanography (Scripps) » de l'université de Californie, aux États-Unis. Les mesures sous-marines sont, pour l'essentiel, statiques contrairement aux mesures de surface réalisées en continu durant la marche du navire. Ainsi, du point de vue opérationnel, les mesures sous-marines sont-elles très similaires aux mesures terrestres.

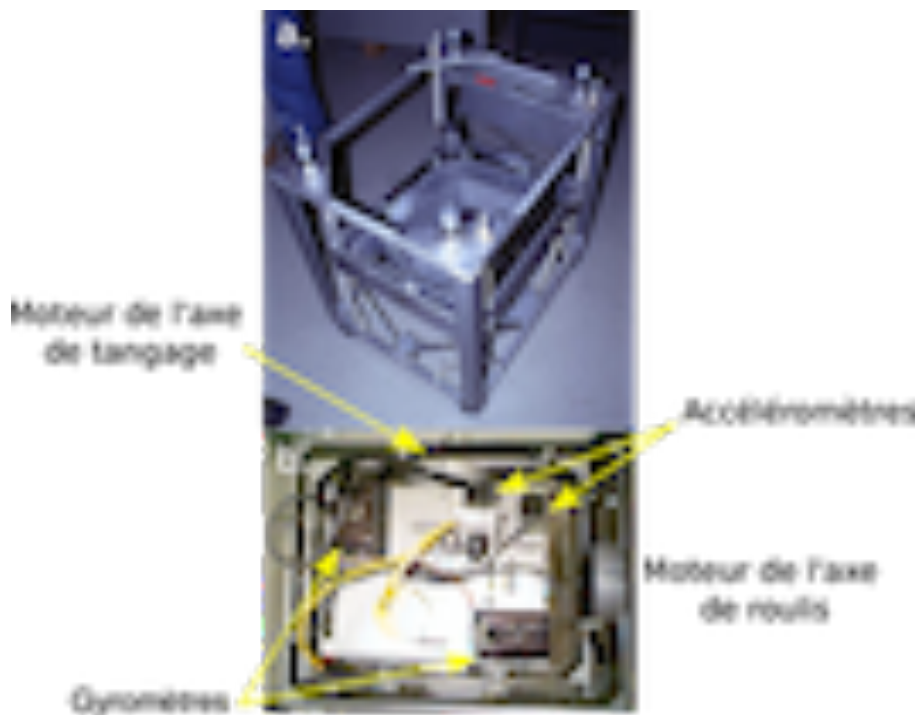


FIGURE 5.21 – (a) Vue de la plate-forme stabilisée dite « deux axes » qui équipe le gravimètre aérien/marin « TAGS-6™ » commercialisé par la société @Micro-g LaCoste Instruments. (b) Vue de dessus du gravimètre relatif monté sur cette plate-forme. Les deux gyromètres et deux accéléromètres qui participent au système d'asservissement de la plate-forme sont montés directement sur la face supérieure du gravimètre.

Photos : J. Verdun, École Polytechnique Fédérale de Zürich (ETHZ).

L'instrumentation utilisée couramment aujourd'hui en gravimétrie marine, consiste en un gravimètre scalaire relatif monté sur une plate-forme stabilisée. Le mode opératoire comprend donc, au démarrage de la campagne, un rattachement statique en un point où la valeur absolue de la pesanteur est déjà connue, appelé « point de base ». Ce rattachement est en général réalisé à l'aide d'un gravimètre scalaire terrestre depuis le point de base jusqu'à un point proche de l'amarrage du navire. Les mesures relatives sont donc augmentées de la valeur de référence au point de base pour obtenir les valeurs de l'accélération mesurée à bord du navire. En fin de campagne, une nouvelle mesure est réalisée au même point d'amarrage

pour déterminer l'écart de fermeture et ainsi estimer la dérive temporelle de l'instrument durant la campagne. Cette dernière est le plus souvent supposée linéaire. La réoccupation de points de base intermédiaires durant la campagne permet d'autres estimations de la dérive temporelle, ce qui permet le cas échéant de raffiner son modèle d'évolution. En outre, le coefficient de raideur du ressort qui équipe les gravimètres marins est susceptible de varier au cours de la campagne, ce qui fausse la calibration réalisée au préalable en laboratoire. Les contrôles aux points de base permettent alors d'estimer un facteur d'échelle à appliquer aux mesures pour compenser le défaut de calibration.



FIGURE 5.22 – Vues du gravimètre marin KSS31TM commercialisé par la société ®Bodenseewerk, et utilisé sur les navires océanographiques « Atalante » et « Pourquoi Pas » de la flotte française. Cette dernière est constituée de différents navires affrétés par différents organismes dont l'IFREMER, l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD), la Marine Nationale, le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM), l'Institut National des Sciences de l'Univers (INSU) du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), et l'Institut Polaire français Paul Émile Victor (IPEV).

Droits réservés ©Photos : Marie-Françoise Lalancette, SHOM.

Le rattachement permet en outre la mise en référence des mesures dans un référentiel gravimétrique donné. Ce dernier est matérialisé par un réseau de points sur lesquels les valeurs de la pesanteur ont été déterminées au moyen d'un processus d'ajustement intégrant un grand nombre de mesures absolues et relatives. Un exemple d'une telle réalisation est le réseau mondial baptisé International Gravity Standardization Net 1971 (IGSN71), qui comprend 1 854 points répartis dans le monde entier.



FIGURE 5.23 – Vues du « Atalante » (a) et de l'« Pourquoi Pas » (b). Ces deux navires sont utilisés lors de campagnes océanographiques comprenant de la gravimétrie marine.

Droits réservés ©IFREMER.

Les mesures d'accélération réalisées à bord du navire, doivent être corrigées des accélérations induites par le mouvement, c'est-à-dire l'accélération verticale et l'accélération d'Eötvös. La détermination de ces termes correctifs nécessite la connaissance de la position, la vitesse et l'accélération du navire, ainsi que son cap. Ces quantités sont en général déduites des positions obtenues à l'aide d'un système de radio-positionnement par satellite et/ou un centrale inertielle de navigation (cf Chap. 6). Les données issues du gravimètre sont filtrées à l'aide d'un filtre passe-bas. Le même filtre est appliqué sur les termes correctifs avant combinaison avec les données du gravimètre afin de rendre leurs gammes spectrales compatibles entre elles. Ainsi, la valeur de pesanteur obtenue par gravimétrie marine peut-elle être entachée des erreurs qui proviennent de :

- la valeur de pesanteur au point de base;
- la qualité du rattachement⁴;
- l'estimation des paramètres de dérive temporelle;
- l'estimation du facteur d'échelle;
- l'estimation des accélérations induites par le mouvement dont la précision dépend de la qualité du positionnement.

Nous avons supposé, jusqu'ici, que la mise à niveau du gravimètre s'effectuait sans défaut grâce à la plate-forme stabilisée. Cette hypothèse reste valide dans les conditions normales de mesures d'un navire océanographique qui sont celles nécessaires pour la réalisation de mesures bathymétriques. Les mesures gravimétriques disponibles dans les bases de données sont, en général, exprimées au point de mesure; elles n'ont donc subi aucune procédure de prolongement vers le bas.

Les mesures gravimétriques proviennent de campagnes océanographiques à buts cartographique, scientifique ou de prospection au cours desquelles d'autres types de données sont acquises telles des données bathymétriques, magnétiques et sismologiques. La densité des données est donc très variable à l'échelle mondiale en fonction de l'intérêt porté à la région pour ses ressources minières et pétrolières ou sa géodynamique. Seuls les organismes nationaux de cartographie des fonds sous-marins, tels le SHOM en France, explorent systématiquement l'intégralité des eaux territoriales à un rythme régulier.

À l'inverse, la réalisation de campagnes scientifiques dépend de l'obtention de crédits de recherche; leur rythme est donc très irrégulier et leur renouvellement non systématique. Certaines clauses de confidentialité émanant des programmes de recherche retardent en général l'insertion des mesures dans les bases de données publiques. Les données acquises lors de campagnes de prospection ne sont pas nécessairement rendues publiques en raison de leur intérêt commercial. Elles peuvent au mieux être insérées dans une base de données publiques plusieurs années après leur acquisition. Ainsi, est-il difficile de quantifier la fréquence de renouvellement et d'enrichissement des bases de données gravimétriques marines.

Les principales bases de données gravimétriques marines mondiales sont disponibles auprès du BGI et des « National Centers for Environmental Information (NCEI) » aux États-Unis (Fig. 5.24). Ces bases sont en accès libre et alimentées par divers contributeurs sans contre-partie financière. Les utilisateurs doivent seulement mentionner l'origine des don-

4. Opération qui consiste à déterminer la pesanteur à bord avec la navire amarré à partir de la pesanteur au point de base.

nées dans toutes publications des travaux exploitant ces dernières. En France, il existe des bases de données nationales libres d'accès telles celles proposées par le service « Systèmes d'Informations Scientifiques pour la MER (SISMER) »⁵ de l'IFREMER, qui regroupent les mesures d'un nombre limité de campagnes souvent de très bonne qualité. L'enrichissement et le renouvellement des bases de données actuelles devraient normalement se poursuivre grâce, notamment, aux besoins en matière de données à haute résolution spatiale hors de portée de l'altimétrie satellitaire, qui intéressent particulièrement les géophysiciens pour l'étude de structures géologiques océaniques (dorsales, volcans sous-marins, fosses, zones de subduction) et les océanographes pour l'étude des courants marins.

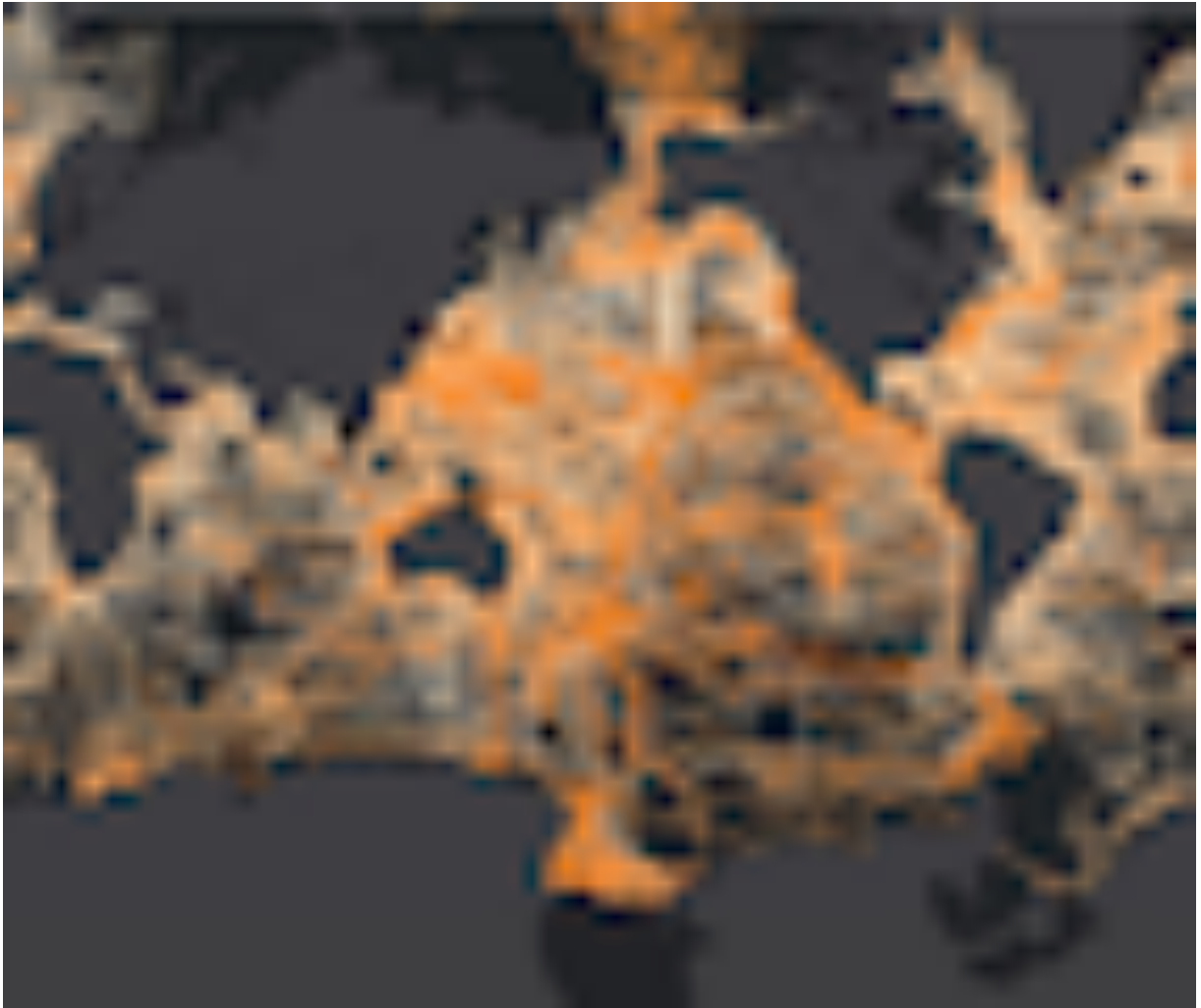


FIGURE 5.24 – Carte qui figure les levés marins comportant de la gravimétrie, accessibles dans la base de données des centres nationaux américains d'information sur l'environnement (NCEI) de l'agence gouvernementale de l'océan et de l'atmosphère (NOAA). Cette base contient les données gravimétriques de 2 183 levés qui couvrent les océans et la Méditerranée.

Droits réservés ©NCEI, NOAA (<http://maps.ngdc.noaa.gov/mgg/mggd.html>).

5. <http://www.ifremer/sismer>

5.1.4.1.3 Gravimétrie aéroportée

Grâce au déploiement des systèmes de positionnement par satellite dès les années 80, en particulier le système GPS, et les progrès engendrés sur le positionnement vertical, la gravimétrie aéroportée s'est progressivement développée à partir de gravimètres marins adaptés sur des avions, tels les systèmes « Air-Sea Gravity System IITM » (VALLIANT, 1991) et « Tags-6TM » (Fig. 5.25), fabriqués par ©Micro-g LaCoste. Le protocole expérimental est donc en tous points similaire à celui de la gravimétrie marine (rattachement, estimation de la dérive temporelle et du facteur d'échelle, estimation des accélérations induites par le mouvement). Comme en gravimétrie marine, les mesures sont exprimées à l'altitude de vol sans prolongement vers le bas.



FIGURE 5.25 – Gravimètre relatif aéroporté TAGS-6TM monté sur sa plate-forme stabilisée, commercialisé par ©Micro-g LaCoste. Droits réservés ©Micro-g LaCoste.

La gravimétrie aéroportée permet de réaliser des mesures de résolution intermédiaire (10 km – 100 km) entre celles obtenues respectivement par les mesures terrestres et les mesures spatiales et des acquisitions sur des régions inaccessibles – chaînes de montagnes, volcans, forêts tropicales, déserts, marges continentales, zones côtières. En complément des mesures de l'intensité de la gravité, les gradiomètres mobiles fournissent des mesures des gradients de la gravité, dont la connaissance est particulièrement utile pour la restitution des courtes longueurs d'onde du champ de gravité et la détermination de la géométrie des structures géologiques. À titre d'exemple, le système « ©Air-3D FTG » (« 3D Full Tensor Gradient » décrit dans MURPHY (2004)) développé par la société américaine ©Lockheed Martin-Bell Aerospace est un gradiomètre aéroporté dont la précision atteint 0,5 mGal/km, soit 5 E, à 200 m de résolution pour un lever à très basse altitude (80 m).

Actuellement, de nombreux levés gravimétriques aéroportés sont réalisés dans le monde par des organismes scientifiques, des instituts géographiques et cadastraux, et des sociétés de prospection, en particulier dans les régions difficiles d'accès telles les chaînes de montagnes ou les marges continentales. Aux États-Unis, le projet « Gravity for the Redefinition of the American Vertical Datum (GRAV-D) » (<http://www.ngs.noaa.gov/GRAV-D>), porté par le National Geodetic Survey (NGS), a pour objectif une re-définition du réseau altimétrique du pays avec une incertitude homogène de 2 cm. Un budget de 39 millions de dollars a d'ores et déjà été alloué pour la réalisation de levés gravimétriques aéroportés jusqu'en 2022, qui couvrent notamment Puerto Rico, les Îles Vierges, la région de la Côte du golfe du Mexique, les Grands Lacs de l'Amérique du Nord et Hawaï (Fig. 5.26). Ce projet témoigne du degré de maturité atteint par la gravimétrie aéroportée, rendue incontournable dans la réalisation de levés gravimétriques homogènes à une échelle régionale.



FIGURE 5.26 – Localisation aux États-Unis des levés de gravimétrie aéroportée réalisés dans le cadre du projet « GRAV-D ». *Droits réservés* ©NGS, NOAA.

Les mesures de gravimétrie aéroportées commencent à être insérées dans les banques de données internationales. C'est le cas notamment des levés réalisés sur la Suisse en 1992 (KLINGELÉ et al., 1997), sur les Alpes en 1998 [Verdun et al., 2003 (acl5)], et sur la Corse en 2001 (DUQUENNE et al., 2002), pour lesquels les données ont été insérées dans la base du BGI. La densité des données accessibles demeure encore très inférieure à celle de la gravimétrie marine. En outre, il n'existe pas aujourd'hui de bases de données dédiées uniquement à la gravimétrie aéroportée. Les données aéroportées sont simplement insérées dans les bases de données marines munies d'un code qui permet de les reconnaître.

Nous reviendrons plus longuement sur les systèmes aériens de gravimétrie mobile au chapitre 6 en détaillant notamment les capteurs mis en œuvre sur ces instruments.

5.1.4.2 Qualité des données terrestres

D'un point de vue global, le champ de pesanteur sur les terres émergées est moins bien connu que le champ en mer puisqu'il ne peut bénéficier des données homogènes à haute résolution (~ 10 km) issues de l'altimétrie satellitaire. Seule la gravimétrie aéroportée permet d'obtenir une résolution comparable à terre. Bien qu'en constante augmentation, la couverture aérogravimétrique reste encore faible comparée à celle de l'altimétrie satellitaire, si bien que l'homogénéité de l'échantillonnage du champ de pesanteur sur les terres demeure très variable.

En premier lieu, la gravimétrie statique au sol, permet la cartographie du champ de gravité aux échelles régionales et locales, par interpolation des mesures gravimétriques acquises au sol à l'aide de gravimètres scalaires relatifs et absolus – tels les instruments fabriqués par la société américaine ©Micro-g LaCoste – uniquement sur les zones accessibles à un opérateur pédestre. Les mesures en puits de forage viennent ponctuellement compléter les mesures de surface. L'incertitude usuelle atteinte sur les données acquises par des levés à terre est de l'ordre de 0,01 mGal à la résolution de 1 km. De plus fines résolutions de l'ordre du 100^e de kilomètre sont atteignables par des levés de détail.

En second lieu, l'incertitude ultime des mesures de gravimétrie marine s'estime en tenant compte des contributions de tous les postes d'erreur mentionnés au §5.1.4.1. La qualité des données insérées dans une base de données marine est en général très inégale. Dans les bases du BGI, toute mesure doit être accompagnée de sa précision, de la position et l'altitude du point de mesure avec leurs précisions respectives, ainsi que d'une indication sur le réseau gravimétrique auquel elle se rattache et les points de base utilisés. Lorsque l'une de ces informations fait défaut, la mesure est quasiment inexploitable notamment en géodésie pour la détermination du géoïde. Certaines campagnes comportent même des biais très importants qu'il est difficile de corriger a posteriori sans une connaissance des points de base. Lorsque toutes les informations sur la mesure sont bien renseignées, cette dernière peut être considérée comme valable lorsque son incertitude est inférieure à 5 mGal. Cependant, il est souvent nécessaire de repousser cette limite à 10 mGal pour prendre en compte un plus grand nombre de données.

En dernier lieu, l'incertitude sur les données gravimétriques aéroportées est en général meilleure que celle de la gravimétrie marine, en particulier pour les levés de basse altitude où elle peut atteindre 2 à 3 mGal pour une résolution spatiale de 5 à 10 km. Lorsque les conditions météorologiques sont favorables, l'attitude d'un avion peut être particulièrement stable comparée à celle d'un navire soumis à une légère houle. En revanche, la résolution spatiale est d'autant plus faible que l'altitude de vol est élevée. Elle se dégrade encore plus suite aux opérations de filtrage passe-bas pour réduire le bruit de mesure [Verdun et al., 2002 (acl7)].

L'utilisation d'un gravimètre absolu balistique pour des levés aéroportés (Fig. 5.27) a été tentée à l'ETHZ (BAUMANN et al., 2011). Les résultats montrent que les performances atteintes en termes d'incertitude et de résolution spatiale (6,9 mGal pour 12 km de résolution), sont comparables à celles obtenues à partir de gravimètres relatifs stabilisés. À ce jour, la visibilité des franges d'interférences produites par l'interféromètre demeure le problème majeur. En effet, les vibrations de l'avion qui entraînent celles du miroir fixe de l'interféromètre, engendrent un brouillage intempestif des franges, ce qui perturbe fortement les mesures.



FIGURE 5.27 – Vue du gravimètre FG-5L™ (1) de ® Micro-g LaCoste, installé dans l’habitacle d’un avion pour la réalisation de levés aéroportés dans le cadre du projet « Airborne Absolute Gravimetry (AAG) » de l’ETHZ. Le système gravimétrique a été complété par une centrale inertielle (5) et son système d’acquisition (6). *Droits réservés* ©BAUMANN *et al.* (2011).

La gravimétrie mobile inertielle fait également l’objet de nombreuses recherches que nous décrirons plus en détail au chapitre 6. Les dispositifs de gravimétrie vectorielle se composent de capteurs d’accélération, rigidement fixés au véhicule porteur, et d’un système de positionnement indépendant. Les capteurs d’accélération mesurent la différence entre l’accélération du véhicule porteur et l’accélération gravitationnelle. À partir de l’estimation de l’accélération du porteur déduite des mesures de position, il est possible d’extraire des mesures accélérométriques, l’accélération gravitationnelle après un filtrage adéquat du bruit de mesure. Ce principe est adopté sur un grand nombre de systèmes gravimétriques en développement.

Les tout derniers résultats concernant ce type de système ont été publiés par une équipe chinoise (ZHAO *et al.*, 2015). Cette dernière relate la réalisation d’un lever gravimétrique aéroporté sur le Groenland à 360 m d’altitude avec une incertitude de 1,5 mGal pour une résolution spatiale de 6 km. Il est clair que les progrès réalisés sur les capteurs gravimétriques depuis une dizaine d’années, n’ont pas encore permis d’abaisser significativement l’incertitude sur les mesures de gravimétrie mobile aérienne. Le principal verrou technologique qui résiste aux investigations, reste cependant l’amélioration de la résolution spatiale des levés mobiles.

5.1.5 Des niches à combler

L’inventaire des données gravimétriques disponibles sur la Terre témoigne de l’omniprésence des données de gravimétrie spatiale, y compris celles de l’altimétrie satellitaire, en

tant que données globales assimilées dans les modèles du champ de gravité (Fig. 5.28). La résolution spatiale des modèles de géopotential les plus fins issus de la gravimétrie spatiale, ne descend pas en dessous de 70 km. Par ailleurs, les contributions des plus courtes longueurs d'onde demeurent de faible amplitude et affectées d'une grande incertitude relative – 0,1 % sur l'ondulation du géoïde (10 cm sur 100 m d'amplitude de l'ondulation) et 2 % sur l'anomalie à l'air libre (4 mGal sur 200 mGal d'amplitude de l'anomalie) –. Il est notamment impossible de produire à l'échelle d'un pays, une surface de référence altimétrique à partir des seules données spatiales.

Inversement, les données acquises au sol au cours des campagnes géophysiques et dans les réseaux gravimétriques sont pour l'essentiel ponctuelles, et localisées dans les lieux accessibles. Si elles permettent d'obtenir localement des hautes résolutions (< 1 km) et de très faibles incertitudes relatives (~ 50 ppm, soit 0,01 mGal pour 200 mGal d'amplitude de l'anomalie à l'air libre), leur couverture n'est pas homogène, notamment sur les zones montagneuses et littorales. La gravimétrie mobile marine et aérienne, permet théoriquement de compenser les effets d'un échantillonnage irrégulier de données gravimétriques. Cependant, les performances des gravimètres mobiles n'ont, à ce jour, pas encore atteint un niveau permettant la restitution des très courtes longueurs d'onde (< 1 km), quelle que soit la région considérée. Outre les problèmes posés par la correction des accélérations induites par le mouvement, une limitation handicapante de la gravimétrie mobile actuelle, est que le porteur opère à trop grande distance des sources. En effet, L'éloignement limite naturellement la résolution spatiale des levés. La réalisation d'instruments couplés à des porteurs légers apparaît donc d'ores et déjà comme une niche dans le panel des techniques de la gravimétrie actuelle. Ce sont ces niches que nous allons tenter d'explicitier dans la suite, non sans avoir préalablement rappelé les principaux enjeux de défis qui subsistent en gravimétrie moderne.

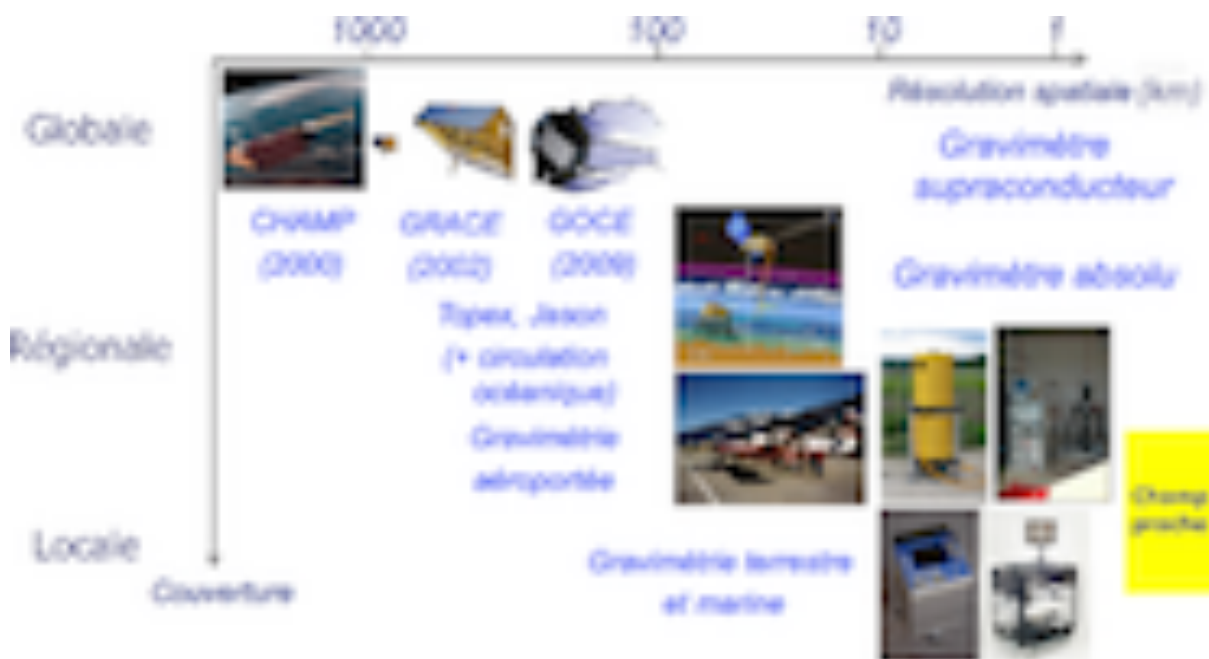


FIGURE 5.28 – Bilan des techniques d'acquisition de la gravimétrie moderne situées dans un graphe « résolution spatiale/couverture ». Une niche demeure pour la gravimétrie en champ proche pour la restitution à haute résolution spatiale du champ de gravité de l'échelle locale à régionale.

5.2 Enjeux et défis de la gravimétrie moderne

5.2.1 Les nouveaux instruments

5.2.1.1 Gravimétrie atomique

Le développement des gravimètres absolus statiques connaît aujourd'hui une véritable révolution, suscitée par la mise au point pour les applications géophysiques, de gravimètres balistiques à fontaine atomique, qualifiés également de gravimètres « à atomes froids » ou « à onde de matière ». Entamées depuis déjà plus de 15 ans en France, les recherches sur le gravimètre à atomes froids ont d'abord servi l'expérience de la Balance du watt menée par le Laboratoire National d'Essais (LNE) et le BIPM, pour la redéfinition du kilogramme (GENEVÈS et al., 2007, MERLET et al., 2014a,b). Après le développement d'instruments de laboratoire par le laboratoire SYRTE, une jeune entreprise française baptisée @ μ QUANS a développé une version du gravimètre (Fig. 5.29) destinée aux applications géophysiques sous le nom de Absolute Quantum Gravimeter (AQG) (DESRUELLE et al., 2014). À l'heure où nous parlons, le gravimètre AQG est quasi-opérationnel et un premier instrument a d'ores et déjà été retenu pour le Réseau Sismologique et géodésique Français (RESIF) dans le cadre du projet d'excellence (« EquipEx ») RESIF-CORE. En outre, c'est encore une technologie basée sur les atomes froids qui a été sélectionnée pour un second projet d'excellence de grande ampleur baptisé « MIGA ». Ce dernier consiste en l'installation d'un interféromètre atomique de grande dimension pour la détection des fluctuations spatio-temporelles de l'espace-temps, qui se manifestent notamment par la propagation d'ondes gravitationnelles (GEIGER et al., 2015). Ces deux faits de l'actualité scientifique témoignent sans conteste de l'engouement pour les dispositifs à atomes froids dans la gravimétrie moderne.

Le principe du gravimètre à atomes froids consiste à tirer profit de l'expérience de la chute libre non plus avec un coin de cube, mais avec des atomes de rubidium refroidis par laser. Plus précisément, une population d'environ 10^6 atomes est confinée par laser pour refroidir jusqu'à une température de $1 \mu\text{K}$. Puis, les atomes sont libérés et chutent librement sous l'effet de la pesanteur. L'utilisation d'un interféromètre à ondes de matière permet alors de mesurer, par interférométrie atomique, le déplacement relatif des atomes par rapport au miroir de rétro-réflexion équipant l'interféromètre. Ce déplacement est directement proportionnel à l'intensité de la pesanteur. Le gravimètre à atomes froids possède des avantages indéniables sur son homologue optique pour une exactitude comparable de par l'absence d'éléments mécaniques dans le dispositif de chute libre. Il permet ainsi une plus grande fréquence d'acquisition et dispose d'une plus grande immunité aux vibrations du sol. Les opérations d'alignement des éléments d'optique y sont également plus simples. Si le rythme des progrès se maintient, cette nouvelle technologie pourrait devenir prépondérante, d'autant plus qu'elle permet également, moyennant quelques composants additionnels, la mesure du gradient vertical de la pesanteur.

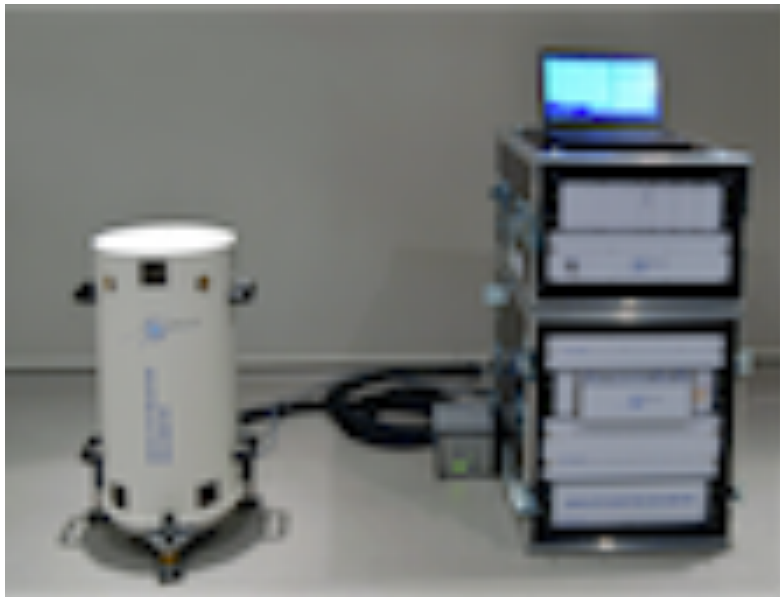


FIGURE 5.29 – Vue du gravimètre atomique « AQG™ ». Droits réservés ©μQUANS.

5.2.1.2 L'essor de la gradiométrie

La gradiométrie connaît aujourd'hui un essor considérable, notamment dans le domaine de la prospection géophysique, pour deux raisons essentielles :

1. l'utilisation des anomalies des gradients de gravité en plus des anomalies de gravité dans l'inversion géophysique, permet d'améliorer la localisation des sources (BARNES et al., 2008, FITZGERALD et HOLSTEIN, 2006, WHILE et al., 2008) ;
2. les mesures gradiométriques étant de nature différentielle, elles sont moins sensibles aux accélérations induites par le mouvement lorsque réalisées à bord d'un porteur mobile ; en d'autres termes, la gradiométrie mobile aurait une plus forte immunité au bruit que la gradiométrie mobile (JEKELI, 1993).

Les développements technologiques en vue de la réalisation de gradiomètres mobiles sont nombreux à l'heure actuelle, parmi lesquels se distinguent une technologie opérationnelle basée sur des accéléromètres électrostatiques et deux technologies émergentes basées respectivement sur les capteurs gravimétriques supraconducteurs et à atomes froids.

En premier lieu, il faut souligner que les technologies à base de capteurs électrostatiques héritent directement des développements menés sur les systèmes de navigation inertielle. Les mesures des gradients de gravité sont également utilisées sur ces derniers, en vue d'améliorer les performances de navigation, notamment lorsque l'accès aux signaux GNSS est difficile, voire impossible (RICHESON, 2008). Du côté de la prospection géophysique, il existe des systèmes de gradiométrie mobile opérationnels (appelés Gravity Gradiometer Instrument (GGI)), tels ceux commercialisés par la société ®Lockheed Martin, en l'occurrence, le gradiomètre aéroporté Air-3D FTG précédemment mentionné (5.30), et le gradiomètre aéroporté FALCON. La société ®ARKeX a développé également le système FTGeX™ pour la prospection géophysique (5.31). Ces



FIGURE 5.30 – Gradiomètre aéroporté Air-3D FTG™ commercialisé par ®Lockheed Martin. Droits réservés ©Lockheed Martin.

systèmes ont fait parti de l'équipement de navigation des sous-marins américains « Trident ». Il a fallu attendre l'année 1994 pour que le secret « défense » soit levé par le ministère de la défense américain. Les principes de ces deux instruments sont identiques : il s'agit de mesurer la différence d'accélération à l'aide d'accéléromètres séparés dans l'espace afin de restituer, après corrections des effets perturbateurs, les gradients de gravité. À la différence du gradiomètre FALCON pour lequel les accéléromètres sont fixes, le système Air-3D FTG utilisent des paires d'accéléromètres montées sur des disques en rotation à vitesse constante. Une démodulation du signal permet alors de restituer les gradients de gravité en atténuant les effets des accélérations induites par le mouvement de l'avion.

C'est également un gradiomètre électrostatique opérationnel, appelé Electrostatic Gravity Gradiometer (EGG1) (Fig. 5.32), qui a été utilisé sur la mission GOCE (cf §5.1.2). Il se distingue de ses homologues terrestres par sa très grande sensibilité ($\sim 1 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$). Une étude de faisabilité d'un gradiomètre planaire aéroporté, dérivé du gradiomètre de GOCE, a été menée dans le cadre du projet « GREMLIT » porté par l'Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP) en collaboration avec l'ONERA, le Laboratoire de Recherches en Géodésie (LAREG) et le SHOM. La faisabilité a été confirmée (DOUCH, 2015, DOUCH et al., 2014, 2015), mais le développement du prototype opérationnel est à venir.



FIGURE 5.31 – Gradiomètre mobile FTGeX™ sur sa plateforme stabilisée. Droits réservés ©ARKeX.

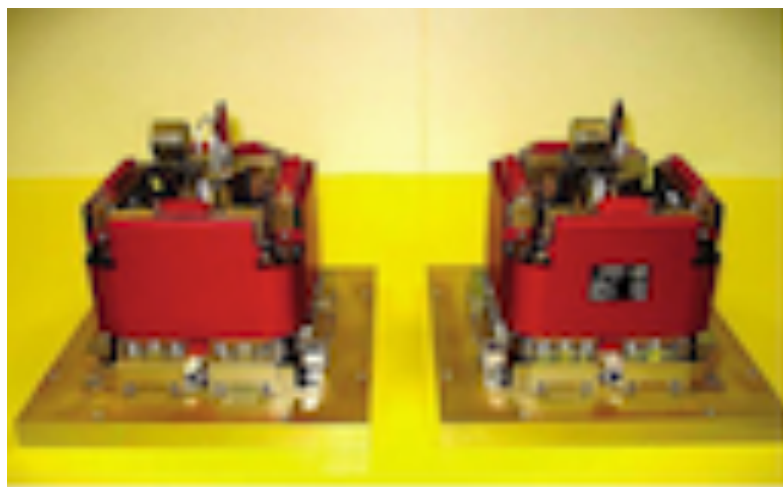


FIGURE 5.32 – Vue d'une paire d'accéléromètres 3D qui forment un bras du gradiomètre embarqué sur le satellite GOCE. Droits réservés ©ONERA.

En second lieu, la mise au point des accéléromètres supraconducteurs à haute sensibilité, a suscité le développement de gradiomètres supraconducteurs (Superconducting Gravity Gradiometer (SGG)), notamment aux États-Unis, en Australie et en Angleterre. Les accéléromètres supraconducteurs utilisent des interféromètres quantiques supraconducteurs (Superconducting QUantum Interferometer Device (SQUID)) pour déterminer l'accélération d'un corps d'épreuve. Ces derniers opèrent à très basse température (4 K), ce qui nécessite un dispositif cryogénique de refroidissement. La société ©ARKeX, spécialisée dans la gradiométrie marine et aéroportée, annonce le développement et la commercialisation imminente d'un gradiomètre mobile Exploration Gravity Gradiometer (EGG2), basé sur des capteurs supraconducteurs. Peu d'information diffuse sur cet instrument à l'heure actuelle, bien qu'il

soit permis de penser que le dispositif sera plutôt réservé aux gros porteurs étant donné la présence du dispositif de refroidissement.

Enfin, un nombre conséquent d'équipes de recherche, notamment à l'ONERA, à l'ESA, au JPL et au SYRTE (CARRAZ et al., 2014, PEREIRA DOS SANTOS, 2015, SAIF, 2014, YU et al., 2006), s'est lancé dans le développement de gradiomètre à atomes froids pour les domaines spatial et terrestre. Les avantages annoncés pour ce type de dispositif, sont essentiellement une plus forte immunité au bruit et, pour les versions mobiles, une plus grande bande passante, grâce notamment à l'utilisation de capteurs hybrides combinant accéléromètres électrostatiques et à atomes froids (LAUTIER et al., 2014). L'ONERA a choisi de s'orienter dans cette voie pour le développement de son gradiomètre à atomes froids baptisé « GIBON », dont la sensibilité devrait descendre en dessous de $1 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$. Les développements autour de la gradiométrie atomique témoignent de la grande vitalité de la recherche instrumentale qui profite à la gravimétrie. Au-delà des missions spatiales pour lesquelles le porteur est conçu en fonction de l'instrument, l'un des grands enjeux de la gravimétrie et gradiométrie instrumentales, sera de proposer des instruments assez facile d'accès pour les utilisateurs et adaptable à toutes sortes de terrain et tout type de porteurs.

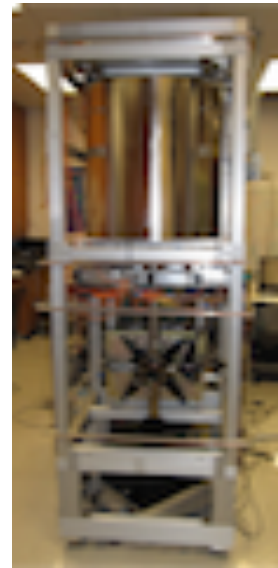


FIGURE 5.33 – Vue du gradiomètre à atomes froids développé au JPL. Droits réservés ©JPL, NASA.

Les efforts consentis pour le développement de gradiomètres ultra-sensibles pour les applications géophysiques terrestres, témoignent de l'extraordinaire engouement pour cette technique. Pour l'instant, ces dispositifs demeurent encombrants et onéreux. Il existe néanmoins des tentatives de réalisation de capteurs gradiométriques moins encombrants. C'est le cas notamment de la société @GRAVITEC Instruments qui propose un capteur destiné aux puits de forage qui utilise la torsion d'un ruban métallique pour estimer les gradients de gravité non diagonaux. Il est clair qu'aujourd'hui encore, la conception d'un gradiomètre complet, haute sensibilité, transportable sur de petits porteurs, nécessite la levée d'un verrou technologique.

5.2.2 La fusion de données hétérogènes

Les modèles combinés de géopotential réalisent la synthèse de plusieurs sources de données gravimétriques (cf §5.1.2), acquises par des techniques variées sur des zones diverses et à des époques différentes. Il s'agit là d'un exemple de fusion de données hétérogènes. Dans le cas des modèles de géopotential, cette fusion de données repose sur le choix préalable d'une représentation fonctionnelle du champ de gravité, en l'occurrence les développements en harmoniques sphériques. La détermination des coefficients d'harmoniques sphériques à partir des équations d'observation relatives aux différentes sources de données gravimétriques, s'apparente alors à la résolution d'un problème inverse.

Les limites de l'utilisation des développements en harmoniques sphériques pour la représentation du champ de gravité consistent pour l'essentiel en :

- la croissance considérable du nombre de coefficients des développements en harmoniques sphériques lorsque la résolution s'affine; par exemple, un raffinement de la résolution d'un facteur 2 quadruple le nombre de coefficients nécessaires au développement (cf Chap. 2, section 2.2);
- l'impossibilité de prendre en compte l'échelle spatiale des données gravimétriques lors du calcul des coefficients.

Les recherches sur les représentations fonctionnelles alternatives, telles celles menées au LAREG et à l'IPGP sur les ondelettes, témoignent de l'effort consenti actuellement pour mettre au point de nouvelles méthodes de représentation du champ de gravité, qui puissent s'adapter à différentes échelles spatiales des données (PANET, 2015). Les problèmes théoriques soulevés par ces recherches tiennent au fait qu'il n'existe pas, à la différence des harmoniques sphériques, de famille d'ondelettes définies sur la sphère qui forme une base. La non unicité de la représentation du champ de gravité qui en découle, nécessite l'emploi de méthodes de régularisation coûteuses en temps de calcul. Des recherches mathématiques en amont seront très vraisemblablement indispensables pour progresser dans cette voie. En outre, la difficulté de représentation s'accroît dès lors qu'il s'agit de traiter le champ variable dans un formalisme cohérent avec celui de la représentation spatiale. Sans doute, la découverte d'une représentation spatio-temporelle du champ de gravité, exhaustive sur la sphère, qui puisse prendre en compte l'échelle spatiale des données gravimétriques, est un défi majeur pour la gravimétrie théorique du XXI^e siècle.

La résolution d'un problème inverse impliquant les données gravimétriques sert également à la modélisation des sources. La solution du problème n'étant pas unique⁶, l'inversion s'appuie toujours sur un modèle des sources a priori obtenu par d'autres techniques d'investigation géophysique, telle la sismique, ou couple plusieurs types de données géophysiques. En revanche, il est toujours possible d'obtenir une distribution de masses, dite *couche équivalente*, qui reproduit avec une incertitude quantifiable, un champ de gravité observé. La fusion de données gravimétriques peut donc être opérée en déterminant préalablement les sources équivalentes correspondant aux champs observés, pour les combiner ensuite en une seule par simple superposition. La qualité de la fusion dépendra alors de notre capacité à produire une couche équivalente suffisamment fine pour reproduire le champ avec la meilleure résolution possible et la plus faible incertitude. Cette approche a déjà été appliquée au traitement des données GRACE avec l'utilisation de masses élémentaires ou *mass-cons* (CHAO et al., 1987) réparties dans une couche superficielle d'étendue limitée (LEMOINE et al., 2007). Il est clair que la généralisation de cette approche offrirait une solution élégante au problème de la fusion des données spatiales et terrestres à la fois pour le champ statique et le champ variable.

6. Le théorème de Newton évoqué au chapitre 2 illustre cette non unicité.

5.2.3 Séparation et modélisation des sources de la gravité

La séparation et l'identification des sources sont des problèmes cruciaux en gravimétrie, qui se posent dès lors qu'il faut associer un effet gravitationnel à une source bien définie. Le terme « source » doit ici être entendu dans une acception plus large que la simple distribution de masse : par source, nous entendons processus géophysique qui possède une signature spatiale et/ou temporelle parfaitement identifiable dans les signaux et champs issus de la gravimétrie (VALTY, 2013). Une première séparation s'opère naturellement entre les sources indépendantes et dépendantes du temps. Nous avons vu au chapitre 4 que l'étude des composantes spectrales du champ statique, vu par l'ondulation du géoïde ou les anomalies de gravité, permettait d'identifier certaines sources, telles, par exemple, la déformation de la lithosphère ou la déflexion du Moho. Le problème se complique sensiblement pour l'analyse du champ variable de par la multiplicité des phénomènes géophysiques, périodiques (marées et surcharges), non périodiques (rebond post-glaciaire, fonte des glaces) ou accidentels (déformations co- et post-sismique), qui engendrent des variations temporelles de la gravité. La séparation des sources est rendue encore plus difficile lorsque les effets gravitationnels sont synchrones et d'amplitudes comparables.

L'étude des séries temporelles gravimétriques doit alors s'inspirer des méthodes statistiques déjà éprouvées par ailleurs. Par exemple, des travaux récents (PANET et al., 2007, RAMILLIEN et al., 2008, VALTY et al., 2013) ont mis en œuvre avec succès, des méthodes de séparation dites « aveugles » (JUTTEN et HÉRAULT, 1991), telles l'analyse en composantes principales (ACP) ou indépendantes (ACI), jusqu'alors réservées à d'autres domaines tels l'économétrie, l'acoustique et le traitement d'image. L'adaptation des méthodes statistiques existantes aux signaux acquis en gravimétrie, voire la recherche de nouvelles méthodes d'investigation des signaux gravimétriques, sont des enjeux majeurs de la gravimétrie moderne, qui susciteront encore à l'avenir de nombreuses thématiques de recherche.

5.3 Plaidoyer pour la gravimétrie mobile en champ proche

5.3.1 Bonification des référentiels altimétriques

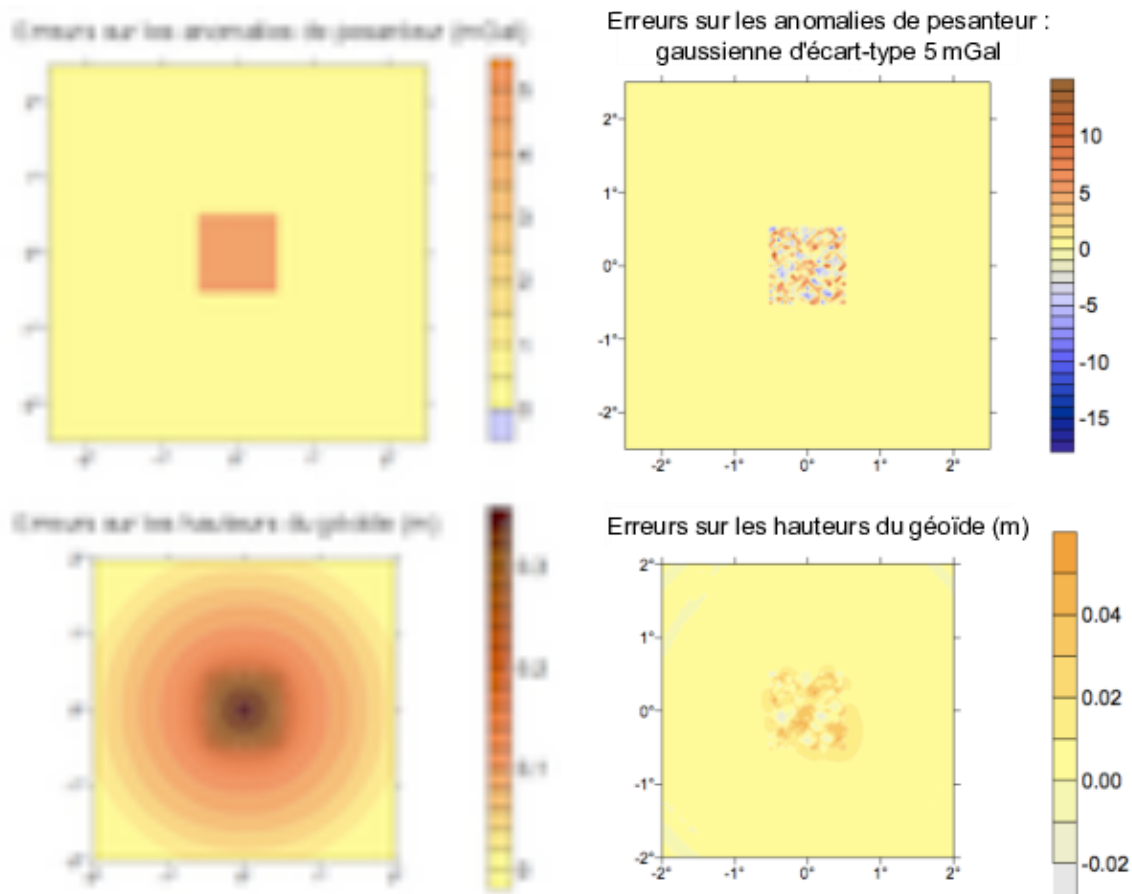
Les besoins en gravimétrie à l'échelle nationale concernent, d'une part, les réseaux de nivellement, et d'autre part, la réalisation de modèles du géoïde en vue du nivellement par GNSS. L'obtention de tels modèles est la première étape de la réalisation des surfaces de référence des altitudes. Ces dernières donnent accès à une référence altimétrique en permettant de convertir les hauteurs au-dessus d'un ellipsoïde de référence h mesurées par les techniques GNSS en altitude H à partir de la simple relation :

$$H = h - N_{ra}, \quad (5.3)$$

où N_{ra} représente la hauteur de la surface de référence altimétrique par rapport à l'ellipsoïde de référence (DUQUENNE, 1999). En France, la grille de Référence Altimétrique de la France 2009 (RAF09) permet d'accéder à la référence altimétrique « Institut Géographique National 1969 (IGN69) » qui est un système d'altitudes normales. Cette dernière a été construite à partir de la grille du Quasi-Géoïde de la France 1998 (QGF98) par adaptation sur un ensemble de points du Réseau Géodésique Français (RGF) dont les hauteurs et altitudes normales sont connues (IGN, 2010). La gravimétrie nécessaire à l'établissement des réseaux de nivellement est généralement obtenue soit par des mesures relatives réalisées sur les repères en même

temps que sont déterminées les dénivelées géométriques, soit par interpolation d'une couverture gravimétrique dense existante. La précision et l'exactitude nécessaires sont de l'ordre de 0,1 à 1 mGal, hors de portée des systèmes mobiles actuels. Les critères de qualité que doit respecter la couverture gravimétrique utilisée pour la réalisation d'un modèle de géoïde précis à haute résolution sont plus difficiles à établir, car la relation entre anomalies de gravité et ondulations du géoïde est une formule intégrale complexe (cf Chap. 3, Sec. 3.3, Éqs. 3.51 et 3.52). Il est cependant possible, par des considérations simples ou par des simulations, de tirer les conclusions suivantes :

- L'exactitude des données gravimétriques est critique. Par exemple, un biais de 1 mGal affectant l'ensemble des données provoque une erreur sur le géoïde qui se chiffre en mètres. Second exemple (cf Fig. 5.34a), un biais de 5 mGal affectant un lever d'extension $110 \text{ km} \times 110 \text{ km}$ provoque sur le géoïde une erreur atteignant localement 36 cm. Il est donc impératif de rattacher les mesures relatives, qu'elles soient terrestres, aéroportées ou marines, à un réseau de référence de qualité. Il est tout aussi important de rechercher les biais locaux affectant les couvertures gravimétriques anciennes par des « sondages » au moyen de mesures absolues et relatives à faible résolution (quelques dizaines de kilomètres) mais exactes et précises au niveau de quelques dizaines de microgals.
- La précision des mesures gravimétriques est moins cruciale. La figure 5.34b montre qu'un bruit gaussien d'écart-type 5 mGal affectant un lever d'extension $110 \text{ km} \times 110 \text{ km}$, se traduit sur le géoïde par des déformations dont le module ne dépasse pas 4 cm. Ce fait s'explique en remarquant que le noyau de l'intégrale de surface qui transforme les anomalies de gravité en hauteurs de géoïde (cf Éqs. 3.51 et 3.52), agit comme un filtre puissant. Une précision de 0,1 à 1 mGal sur la gravimétrie est donc amplement suffisante en vue de la détermination d'un modèle de géoïde à 1 cm de précision.



(a) Effet d'un biais de 5 mGal sur le géoïde.

(b) Effet d'une erreur aléatoire centrée.

FIGURE 5.34 – Simulation du calcul d'un modèle local de géoïde à partir de données erronées, c'est-à-dire affectées d'un biais constant (Fig. 5.34a) ou d'une erreur aléatoire gaussienne centrée, d'écart-type égal à 5 mGal (Fig. 5.34b). C'est la présence du biais qui est la plus dommageable pour le calcul du géoïde, puisque l'erreur engendrée peut atteindre 36 cm alors qu'elle ne dépasse pas 4 cm dans le cas d'une erreur aléatoire gaussienne, centrée.

D'après Duquenne et Verdun, 2008 (ascl2).

À partir du comportement spectral du potentiel de pesanteur, il est possible de montrer que la distance D entre points gravimétriques, qui caractérise la densité des levés, est liée à l'écart-type de l'erreur sur le géoïde σ_N par la relation :

$$D[\text{km}] = 3,2 \sigma_N[\text{cm}]. \quad (5.4)$$

Par exemple, il faut un point tous les 3 km pour un géoïde de précision 1 cm. Ce seuil de densité doit être respecté pour la zone couverte par le géoïde et ses marges. Plus loin, la densité peut décroître jusqu'à s'annuler au-delà de 200 à 500 km, en fonction de la variabilité spatiale du champ.

Pour évaluer l'intérêt des développements en gravimétrie mobile, il convient d'examiner l'état des réseaux et couvertures des différentes composantes du territoire national. Sans faire ici un inventaire complet et en se limitant à la question de la densité des données, on présente deux cas extrêmes, ceux de la France métropolitaine et de la Guyane. La figure 5.35 montre l'état de la couverture gravimétrique pour la France métropolitaine, étant entendu que les mesures très récentes ne sont pas encore disponibles dans les pays voisins.

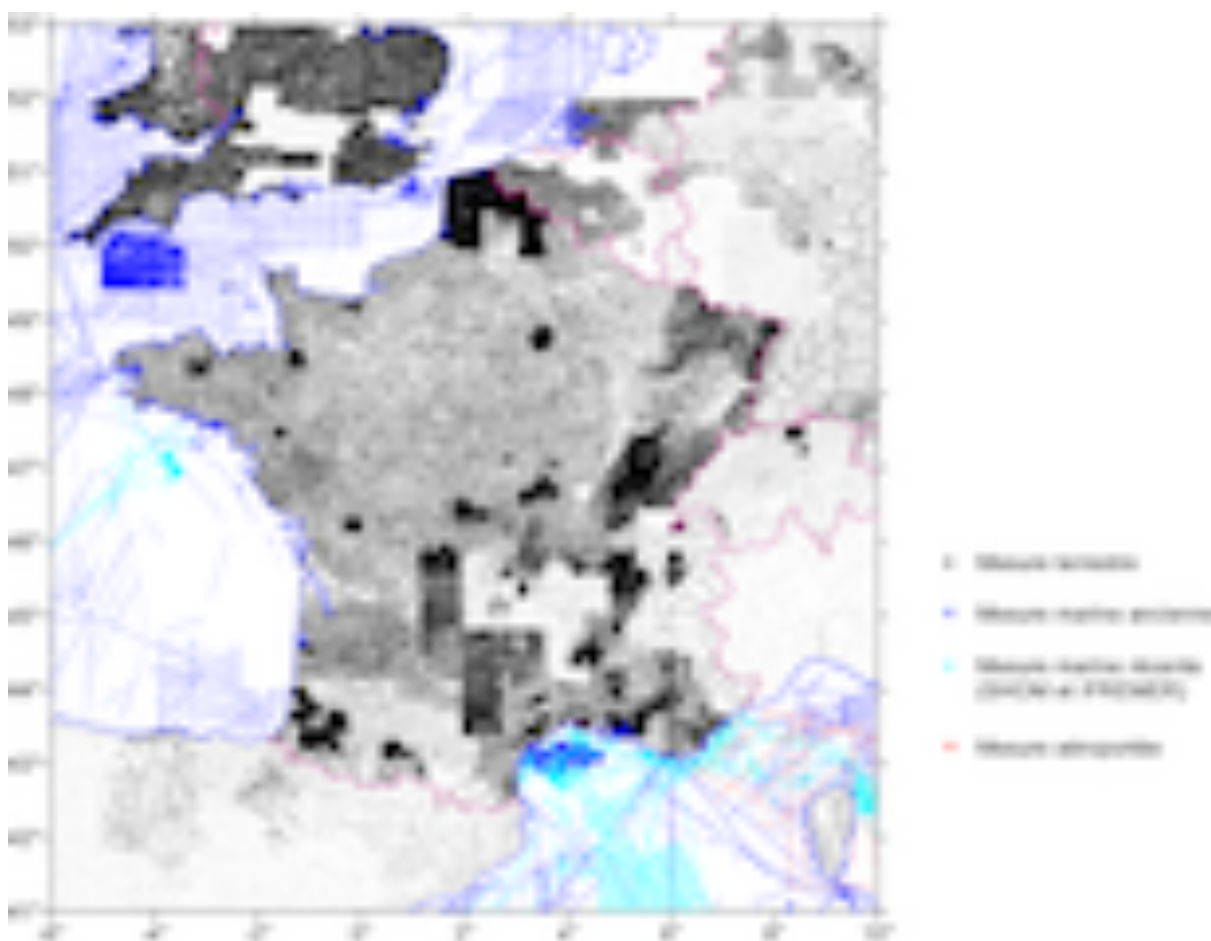


FIGURE 5.35 – Données gravimétriques disponibles en France à partir de la base de données du BGI.
D'après Duquenne et Verdun, 2008 (ascl2).

Sur les terres émergées, la faible densité des points gravimétriques dans les régions montagneuses ne permet pas d'envisager le calcul d'un géoïde de précision 1 cm, mais elle serait suffisante pour une précision de 3 à 5 cm. Il faut signaler qu'en montagne, les mesures gravimétriques ont été réalisées presque exclusivement dans les vallées, ce qui est une source de biais pour le géoïde. En mer, la densité et la qualité des données marines sont très variables. Certaines croisières anciennes sont connues pour être fausses. Elles ne peuvent être corrigées que par comparaison à des données récentes, satellitaires, aériennes ou marines (DUQUENNE et al., 2002). En haute mer, il est possible de compléter ou de remplacer les données existantes par des anomalies de gravité déduites d'altimétrie par satellite. Cependant, il a été prouvé à maintes reprises que les données altimétriques n'étaient pas fiables à moins de 50 à 75 km des côtes (cf §5.1.3). Or cette bande côtière, souvent cruciale pour les calculs de géoïde en raison de la variabilité spatiale du champ, est peu fréquentée par les navires de gros tonnage équipés de gravimètres classiques à plates-formes stabilisées, comme le montrent, par exemple, les lacunes importantes le long de la côte atlantique et de la Manche.

En Guyane, l'état des levés est tout autre : comme le montre la figure 5.36, ce territoire est un désert gravimétrique. Deux mesures ont été effectuées à terre le long de la côte, mais il n'existe aucune donnée ni à l'intérieur, ni dans l'océan Atlantique à moins de 100 km. La situation des autres départements d'outre-mer est généralement intermédiaire entre celle de la France métropolitaine et celle de la Guyane, bien qu'ils ne soient, dans l'ensemble, pas tous pourvus de réseaux de référence dignes de ce nom.

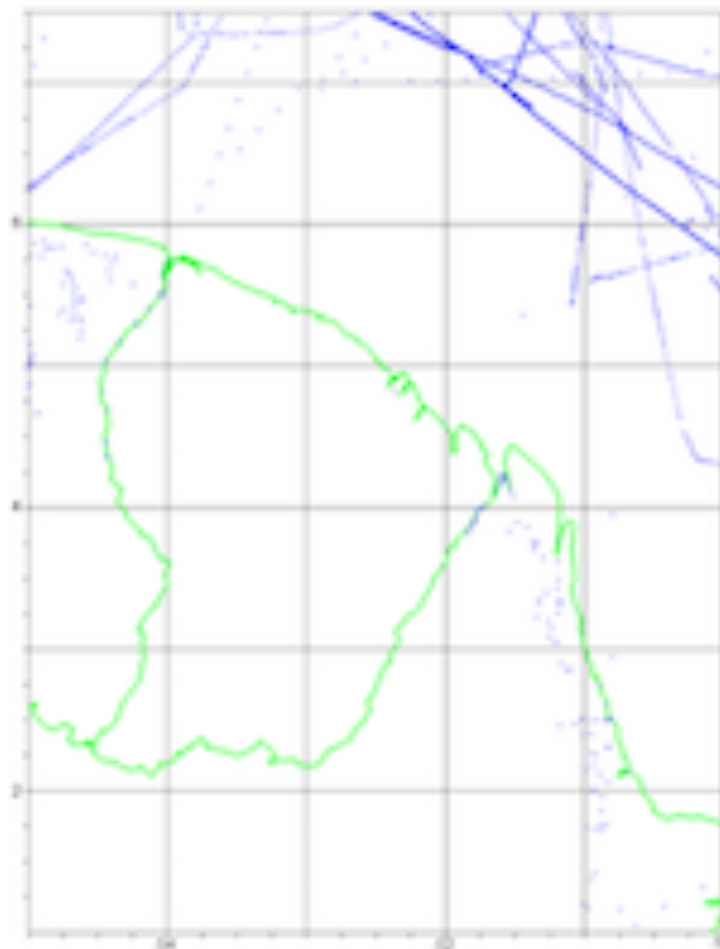


FIGURE 5.36 – Couverture gravimétrique de la Guyane d'après la base de données du BGI. D'après Duquenne et Verdun (ascl2)2008.

La gravimétrie mobile apparaît donc d'un grand intérêt pour combler les lacunes des couvertures gravimétriques. La gravimétrie mobile « classique », à base de gravimètres aériens ou marins sur plates-formes stabilisées, est déjà une technique éprouvée qui peut être utilisée en haute mer et dans des territoires étendus peu accessibles comme la Guyane. En mer à proximité des côtes ou à terre dans des zones d'accès difficile mais de taille limitée, un système de mesure maniable et bon marché monté sur divers véhicules légers (vedette hydrographique, automobile, petit avion ou drone) serait une alternative séduisante.

5.3.2 La pesanteur des grands fonds

En domaine marin, l'utilisation des données gravimétriques et des cartes du champ, aux échelles de plusieurs centaines à plusieurs dizaines de kilomètres, a permis de révolutionner la vision de la structure de la croûte océanique et des processus actifs à l'axe des dorsales. De nombreuses études (GENTE et al., 1995, MAIA et GENTE, 1998, MAIA et al., 2007, ROMMEVAUX et al., 1993) ont montré que la croûte océanique a une structure complexe. Ainsi, à l'image d'une croûte océanique homogène, la gravimétrie a-t-elle permis de substituer celle d'une croûte très variable du point de vue de sa structure, et constituée de roches de nature et de composition très différentes. Récemment, la gradiométrie mobile a fait une percée significative en prospection géophysique offshore (HOUGHTON, 2010, MURPHY, 2004, ZUIDWEG et MUMAW, 2009) et ce grâce aux informations qu'elle fournit sur la direction et les limites de structures à plus haute résolution que la gravimétrie conventionnelle.



FIGURE 5.37 – Gravimètre sous-marin INO™, fabriqué par @Scintrex qui peut être installé jusqu'à 600 m de profondeur. Droits réservés ©Scintrex.

En outre, le développement des engins sous-marins a permis l'exploration directe des grands fonds océaniques. À l'aide de gravimètres terrestres embarqués dans les sous-marins, des mesures ponctuelles ont été réalisées au fond dans différents endroits des dorsales médio-océaniques (BALLU et al., 1998a,b). En effet, les mesures effectuées en surface à bord de navires sont actuellement de bonne qualité – moins de 1 mGal d'incertitude pour les meilleures campagnes – mais l'éloignement des sources, dû à l'épaisseur de la lame d'eau (3 000 à 5 000 m) atténue considérablement le signal aux plus hautes fréquences. Les études détaillées au fond demandent des mesures plus proches des sources. Cependant, la réalisation de mesures à bord d'un sous-marin demande beaucoup de temps et la qualité souhaitée n'est pas toujours atteinte de par la difficulté de stabilisation du sous-marin. Les mesures effectuées à l'extérieur du sous-marin ou d'un submersible téléguidé (ROV) (Fig. 5.38) avec un gravimètre terrestre « marinisé » (Fig. 5.37) sont en général affectées d'une plus faible incertitude, car il est plus facile de niveler et de stabiliser l'instrument. Toutefois, le temps de déploiement reste long. Le nombre de mesures réalisées lors d'une campagne est donc réduit et le gain lié au rapprochement des sources n'est pas accompagné d'une bonne résolution spatiale. Malgré ces limitations, les



FIGURE 5.38 – Remote Operated Vehicle (ROV) « Victor » de l'IFREMER utilisé en gravimétrie sous-marine. Droits réservés ©IFREMER.

mesures gravimétriques fond de mer ont permis d'améliorer les connaissances sur la structure à haute résolution de la croûte océanique, notamment sur les réseaux de percolation d'eau de mer et la fracturation (BALLU et al., 1998a,b, HILDEBRAND et al., 1990, LUYENDICK, 1984). Ces aspects sont essentiels pour la compréhension de la distribution spatiale et de la genèse des sites hydrothermaux et des dépôts minéraux associés.

La prospection de ressources sous-marines et l'exploration des structures géologiques en fond de mer requiert le développement d'une instrumentation embarquée adéquate. Il est aujourd'hui possible de réaliser des mesures géophysiques rapprochées à partir de submersibles autonomes (Autonomous Underwater Vehicle (AUV)) équipés communément de sondeurs multi-faisceaux et de magnétomètre. Étonnamment, la gravimétrie sous-marine rapprochée à partir d'un submersible autonome (Fig. 5.39), n'est pas encore opérationnelle. Cette dernière suppose en effet le développement d'un capteur novateur qui soit suffisamment léger et peu gourmand en énergie pour pouvoir être utilisé depuis un submersible léger de type ROV ou AUV. Une acquisition en continu sur route de données gravimétriques, conjointement à des données bathymétriques serait l'aboutissement d'un développement instrumental dédié au champ proche en fond de mer.



FIGURE 5.39 – Vue du navire « Europe » de IFREMER duquel sont envoyés des sous-marins autonomes de type « AUV tel l'« Aster X » vu au premier plan. Droits réservés ©IFREMER.

5.3.3 Les faces cachées du littoral

L'environnement littoral est une zone constamment mobile au gré de l'action des processus marins tels que la houle, les courants marins et les tempêtes (Fig. 5.40). C'est également une zone fortement convoitée par l'Homme, exploitée par l'agriculture, l'industrie et le tourisme que les aménageurs tentent de préserver à tout prix : construction de murs, digues et jetées, apport de matériaux, curage et approfondissement des chenaux sont autant d'interventions anthropiques dont le but est de fixer le trait de côte, de protéger des inondations, de maintenir l'accès aux ports et aux plages, de sécuriser l'urbanisation. L'évolution du littoral peut être très rapide si bien qu'il est courant d'invoquer la notion d'aléas d'érosion et de submersion à propos des zones côtières. En revanche, l'érosion côtière résulte

de la combinaison de facteurs environnementaux impliquant des phénomènes à évolution lente tels que le changement climatique et l'élévation du niveau moyen des mers. Ainsi, la gestion raisonnée du littoral nécessite-t-elle non seulement le suivi intensif d'indicateurs géomorphologiques de l'évolution du trait côte, mais aussi l'analyse qualitative et quantitative du contexte morpho-sédimentaire de la frange côtière. Il est clair par exemple que le type de côte – sableuse ou rocheuse, formée de baies, d'estuaires, de mangroves, de plages coralliennes – et le marnage ont une influence considérable sur les phénomènes d'érosion. Il convient donc d'étudier ce contexte en parallèle du suivi pour espérer comprendre en profondeur et prévoir à plus long terme l'érosion côtière.



FIGURE 5.40 – Vue de la résidence « Le Signal » à Soulac-sur-Mer en Gironde (33) le 5 janvier 2014. Les effets de l'érosion côtière y sont particulièrement visibles, suite à de très fortes tempêtes.

Droits réservés ©Photo : Laurent Theillet, Sud Ouest™.

La nature de la côte influence considérablement l'ampleur du phénomène d'érosion comme l'atteste, par exemple, les données recueillies en France métropolitaine (EUROSION, 2004). En effet, les côtes sableuses y reculent sur la moitié de leur linéaire correspondant à 1 150 km de longueur de côte. Les côtes vaseuses – vasières, estuaires et marais maritimes – s'engraissent dans les 2/3 des cas, c'est-à-dire sur 370 km de longueur de côte. Les côtes rocheuses sont généralement peu sujettes à l'érosion maritime sur 3/4 de leur linéaire, soit 2 130 km. L'érosion rocheuse la plus importante concerne les roches sédimentaires qui composent les falaises, plus particulièrement les falaises calcaires. Le recul du littoral engendré par l'érosion côtière est également très variable en fonction de la région. Faible en Corse et en Ile-et-Vilaine (< 10 %), il est en revanche fort (> 50 %) dans les Pyrénées Atlantiques et le Gard, voire extrêmement fort (> 70 %) en Seine-Maritime et dans le Pas-de-Calais. Le suivi systématique de l'évolution du trait de côte par des techniques géodésiques, d'imagerie et de télédétection permet la localisation des zones vulnérables. Dans une perspective de gestion littorale sur le long terme, le suivi doit certes être pérennisé et synthétisé sur l'ensemble du territoire concerné, mais il doit également être accompagné de l'acquisition de données géophysiques qui permettent de mieux comprendre et anticiper les phénomènes d'érosion côtière à toutes les échelles spatiale et temporelle.

À titre d'exemple, parmi les processus naturels qui agissent sur le trait de côte, les courants marins côtiers et la houle jouent un rôle considérable de par l'érosion vigoureuse qu'ils engendrent notamment lors des tempêtes. Il existe cependant des structures géologiques telles que les barres sédimentaires d'avant-côte qui constituent une protection naturelle

contre l'action destructrice des courants côtiers. La contribution exacte de ces structures dans la limitation des effets des courants sur l'érosion de la côte reste encore à évaluer, au moins d'un point de vue quantitatif. Cette étude nécessite préalablement une modélisation géophysique qui comprenne à la fois la forme des structures, la nature des matériaux et certaines de leurs propriétés physiques telles que la porosité ou la perméabilité, qui évoluent avec la compaction et la consolidation des roches (GUÉGUEN et PALCIAUSKAS, 1992).

Les méthodes d'investigation géophysique, telle la sismique, sont mises en œuvre sur les zones littorales en vue de la modélisation des structures géologiques sédimentaires. Il existe cependant des zones côtières lagunaires, estuariennes ou deltaïques qui se caractérisent par des taux de sédimentation rapide avec des sédiments riches en matière organique. Ce type de sédimentation rapide implique l'enfouissement de la matière organique et sa dégradation anaérobie avec la formation de gaz biogénique (FIGUEIREDO et al., 1996, FLEISCHER et al., 2001, HEMPEL et al., 1994), principalement du méthane (FLOODGATE et JUDD, 1992, ROUSSEL et al., 2009). La présence de ce gaz qui s'accumule dans les sédiments est responsable d'une diffraction des ondes acoustiques, ce qui rend les zones qui le contiennent complètement sourdes à l'exploration sismique (BERTIN et CHAUMILLON, 2005, GARCIA-GIL et al., 2002, HENRIET et al., 1978, LEE et CHOUGH, 2003, MAESTRO et al., 2002, MISSIAEN et al., 2002, WEVER et al., 1998). C'est pourquoi, sous des surfaces très importantes, parfois majoritaires, des zones côtières lagunaires, estuariennes ou deltaïques, nous ne disposons d'aucune connaissance sur le sous-sol, sur les quantités et la géométrie des sédiments, sur la profondeur et la géomorphologie du socle rocheux. Il existe donc une lacune de connaissance considérable dans ces domaines à forts enjeux écologiques, économiques et patrimoniaux. Toute méthode susceptible d'obtenir des informations du sous-sol dans ces contextes, permettrait de réaliser un formidable bond en avant dans les connaissances avec des retombées sociétales et industrielles très importantes.

L'utilisation de la gravimétrie mobile à bord d'une embarcation légère, d'un véhicule amphibie, voire d'un drone, apparaît comme une solution attractive pour l'acquisition de données géophysiques en domaine côtier. Outre l'apport de données gravimétriques cruciales pour l'amélioration des modèles de géoïde à l'approche des côtes (cf §5.3.1), la gravimétrie mobile côtière en champ proche, permettrait de suppléer les méthodes sismiques sur les zones acoustiquement sourdes, en vue de l'étude géophysique des petites structures du littoral. Cette application innovante des données gravimétriques en zone côtière, consiste en la réalisation d'une inversion couplée avec les mesures d'épaisseurs de sédiments effectuées par un sondeur acoustique basse fréquence, afin d'estimer la distribution de la densité des sédiments en profondeur. L'acquisition en profils gravimétriques longitudinaux et transverses permettrait également d'envisager une modélisation 3D de la répartition des densités. La densité est un paramètre important de la physique des roches qui dépend notamment de la lithologie, de la porosité, de la saturation en fluide, de la pression et la température du milieu considéré (GUÉGUEN et PALCIAUSKAS, 1992). Dans le cadre de cette application, il s'agit plutôt d'un paramètre mécanique du sédiment impliqué directement dans les mécanismes de transport des sédiments tels le charriage (roulement et glissement), la saltation (sauts successifs) ou la suspension (dispersion dans l'eau).

De façon générale, tout profil de plage est le résultat d'un équilibre dynamique entre le démaigrissement et l'engraissement sédimentaires causés respectivement par la houle de tempête (migration des sédiments vers le bas de l'estran) et la houle de beau temps (remontée des sédiments vers le haut de l'estran) entraînant des variations saisonnières natu-

relles des profils de plage. Les courants de houle impliqués dans ce phénomène, qui peuvent être longitudinaux (dérive littorale) ou transversaux, sont prépondérants à l'approche de la côte où ils dominent les courants de marée plutôt actifs au large. Le suivi de ce mouvement est réalisable à partir des estimations de volumes sédimentaires obtenues avec le sondeur de sédiments. En revanche, toute modélisation dynamique des phénomènes de transports sous l'effet des courants de houle nécessite la connaissance de la densité des sédiments. De même, l'érosion des côtes rocheuses résulte pour l'essentiel de l'action des vagues qui se traduit par une poussée de l'eau ainsi qu'une abrasion des sédiments en suspension dans l'eau. À nouveau, la densité du sédiment apparaît comme un paramètre fondamental qui intervient directement dans la capacité du sédiment à se mettre en suspension dans l'eau. Dans un objectif d'étude de l'érosion côtière, il apparaît donc que les données gravimétriques permettent de dépasser le stade du suivi du mouvement des macro-formes sédimentaires pour atteindre celui de la modélisation des phénomènes de charriage, ce qui constitue également une grande innovation dans ce domaine.

Deuxième partie

Synthèse analytique des travaux de recherche

Chapitre 6

Méthodologies et instrumentation en gravimétrie mobile

« Le savant n'est pas l'homme qui fournit les vraies réponses; c'est celui qui pose les vraies questions »

Claude Lévi-Strauss
Le Cru et le cuit

LA gravimétrie mobile est la branche de la gravimétrie qui utilise directement les techniques des systèmes de lever mobiles pour la réalisation de mesures dynamiques de la gravité. De fait, elle met en œuvre des systèmes de positionnement et d'orientation traditionnellement rencontrés dans les porteurs employés dans la cartographie mobile, la photogrammétrie, la lasergrammétrie et la bathymétrie.

À ce jour, la gravimétrie et la gradiométrie mobiles pratiquées sur la Terre, demeurent encore coûteuses et exigent le déploiement d'une instrumentation encombrante réservée à de gros porteurs, peu adaptés à la gravimétrie rapprochée. La raison essentielle, que nous allons expliquer dans ce chapitre, tient en l'absence de capteurs d'accélération de dimensions réduites et à faible consommation électrique, dont la sensibilité et la gamme de mesures soient compatibles avec des mesures terrestres de gravimétrie mobile. Par ailleurs, aucune méthode de traitement des données ne fait consensus. La pratique a consacré un ensemble de méthodes retenues sur la base d'une relative efficacité, sans jamais s'interroger sur les fondements qui pourraient justifier leur emploi. Aussi, ce chapitre expose ma propre vision des aspects méthodologiques de la gravimétrie mobile, en s'appuyant sur les expériences menées avec trois systèmes gravimétriques de lever, qui équipent respectivement des porteurs aériens, marins et sous-marins. Les projets de recherche, décrits en fin du présent chapitre, tracent la voie vers de nouvelles recherches visant à améliorer les capteurs d'accélération et à revisiter profondément la méthodologie de traitement des données. De nouvelles applications de la gravimétrie mobile sur les domaines côtiers, estuariens et fluviaux sont également examinées.

6.1 Principes de mesure en gravimétrie mobile

6.1.1 Mesure de la gravité dans un repère inertiel

L'essence de la problématique de mesure de la gravité depuis un porteur mobile, peut être appréhendée à l'aide d'une expérience de pensée assez simple. Imaginons un observateur plongé dans un champ de gravité $\mathbf{g}$, et immobile par rapport à un repère inertiel d'origine O_i et de base orthonormée $(\hat{\mathbf{e}}_{X_i}, \hat{\mathbf{e}}_{Y_i}, \hat{\mathbf{e}}_{Z_i})$ (Fig. 6.1). Supposons également que cet observateur possède un accéléromètre constitué d'un simple peson à ressort, dont le cadre est immobile par rapport au même repère inertiel. Sous l'effet de l'accélération gravitationnelle, le ressort s'allonge dans la direction de cette dernière jusqu'à ce que la tension du ressort qui exerce sur le peson une force de rappel, compense l'attraction gravitationnelle. L'observateur juge que la compensation est réalisée lorsque le peson s'immobilise, c'est-à-dire que l'équilibre est établi dans son propre repère.

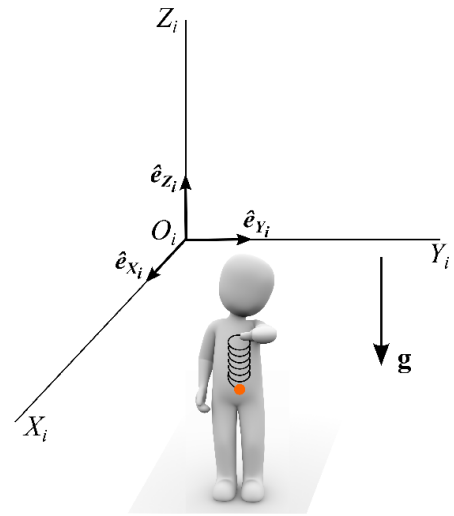


FIGURE 6.1 – Observateur immobile dans un repère inertiel.

Soit $\mathbf{a}$ la force de rappel par unité de masse exercée par le ressort – communément appelée *force spécifique* –, et soit $\mathbf{x}$ le vecteur position du peson connu par ses coordonnées (X^i, Y^i, Z^i) dans le repère inertiel. L'application de la seconde loi de Newton au peson conduit à la relation :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g} + \mathbf{a}, \quad (6.1)$$

où $\ddot{\mathbf{x}}$ désigne la dérivée seconde de $\mathbf{x}$ par rapport au temps, calculée par :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{X}^i \hat{\mathbf{e}}_{X_i} + \ddot{Y}^i \hat{\mathbf{e}}_{Y_i} + \ddot{Z}^i \hat{\mathbf{e}}_{Z_i}. \quad (6.2)$$

Ainsi définie, l'accélération du peson est relative au repère inertiel.

L'observateur constate l'équilibre lorsque $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{a} = -\mathbf{g}. \quad (6.3)$$

Ainsi, en mesurant la force spécifique – ou toute quantité analogue –, l'observateur détermine-t-il directement l'accélération gravitationnelle. Cette situation idéale n'existe pas en pratique ; elle correspond au cas théorique le plus simple de la *gravimétrie inertielle vectorielle*.

Envisageons à présent deux situations où l'observateur est en mouvement par rapport au repère inertiel. Soit $(O_b, \hat{\mathbf{e}}_{X_b}, \hat{\mathbf{e}}_{Y_b}, \hat{\mathbf{e}}_{Z_b})$, le repère cartésien attaché à l'observateur, c'est-à-dire le repère solide de l'observateur et de son instrument – l'indice « b » est ici l'initiale du terme anglais « body », qui signifie ici corps de l'instrument –.

Dans la première situation, notée S_1 (Fig. 6.2), l'observateur est animée d'un mouvement de translation rectiligne de vitesse V_b dans la direction du vecteur $\hat{e}_{X_i}$, de sorte que la dérivée par rapport au temps du vecteur $\overrightarrow{O_i O_b}$ s'exprime par :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_i O_b} = V_b \hat{e}_{X_i}.$$

En outre, les vecteurs de base du repère de l'observateur demeurent identiques à ceux du repère inertiel, ce qui entraînent l'égalité de leurs dérivées secondes par rapport au temps :

$$\ddot{\hat{e}}_{X_b} = \ddot{\hat{e}}_{X_i} = \mathbf{0}, \ddot{\hat{e}}_{Y_b} = \ddot{\hat{e}}_{Y_i} = \mathbf{0}, \ddot{\hat{e}}_{Z_b} = \ddot{\hat{e}}_{Z_i} = \mathbf{0}.$$

Soient (X^b, Y^b, Z^b) les coordonnées du peson dans le repère de l'observateur. Le vecteur position du peson mesuré depuis l'origine du repère inertiel s'exprime, dans ce cas par :

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{O_i O_b} + X^b \hat{e}_{X_b} + Y^b \hat{e}_{Y_b} + Z^b \hat{e}_{Z_b}.$$

En dérivant deux fois la relation ci-dessus relativement au repère inertiel, il vient :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \underbrace{\ddot{\overrightarrow{O_i O_b}}}_{[1]} + \underbrace{\ddot{X}^b \hat{e}_{X_b} + \ddot{Y}^b \hat{e}_{Y_b} + \ddot{Z}^b \hat{e}_{Z_b}}_{[2]} + \underbrace{X^b \ddot{\hat{e}}_{X_b} + Y^b \ddot{\hat{e}}_{Y_b} + Z^b \ddot{\hat{e}}_{Z_b}}_{[3]}.$$

Dans cette relation, le terme [3] est nul, le terme [2] correspond à l'accélération du peson relative au repère de l'observateur, et le terme [1] est simplement égal à $\dot{V}_b \hat{e}_{X_i}$.

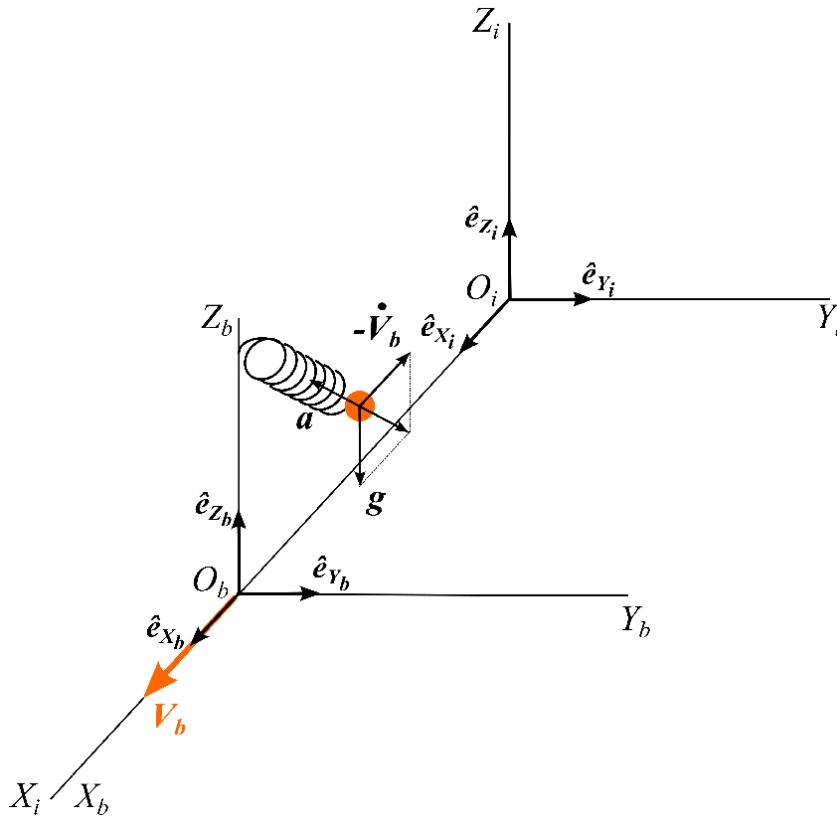


FIGURE 6.2 – Situation S_1 . L'observateur, muni d'un peson à ressort, est animé d'un mouvement de translation dans la direction de $\hat{e}_{X_i}$.

Si le peson est à l'équilibre pour l'observateur, son accélération relative au repère de l'observateur est nulle. La relation qui relie la force spécifique à l'accélération gravitationnelle s'écrit alors :

$$\mathbf{a} = -(\mathbf{g} - \dot{V}_b \hat{\mathbf{e}}_{X_i}). \quad (6.4)$$

La force spécifique mesure, dans ce cas, une accélération gravitationnelle apparente qui possède une composante directement opposée à l'accélération de l'instrument. Cette dernière apparaît donc comme une erreur systématique à déterminer en vue de corriger la mesure. Par conséquent, l'exactitude de la mesure de l'accélération gravitationnelle dépend de la capacité de l'observateur à estimer son accélération, et celle de son instrument par rapport au repère inertiel.

Dans la seconde situation notée S_2 (Fig. 6.3), nous supposons que l'observateur effectue un mouvement de rotation d'axe $\hat{\mathbf{e}}_{Z_i}$, caractérisé par le vecteur rotation $\mathbf{\Omega}_b$. Dans ce cas, les origines du repère de l'observateur et du repère inertiel restent confondues ($O_i = O_b$), et les dérivées temporelles premières et secondes des vecteurs de la base ($\hat{\mathbf{e}}_{X_b}, \hat{\mathbf{e}}_{Y_b}, \hat{\mathbf{e}}_{Z_b}$) satisfont les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_{\alpha_b} &= \mathbf{\Omega}_b \times \hat{\mathbf{e}}_{\alpha_b} \\ \ddot{\hat{\mathbf{e}}}_{\alpha_b} &= (\dot{\mathbf{\Omega}}_b + \mathbf{\Omega}_b \times \mathbf{\Omega}_b) \times \hat{\mathbf{e}}_{\alpha_b}, \end{aligned}$$

où $\alpha = X, Y, Z$ et le symbole « $\times$ » désigne le produit vectoriel.

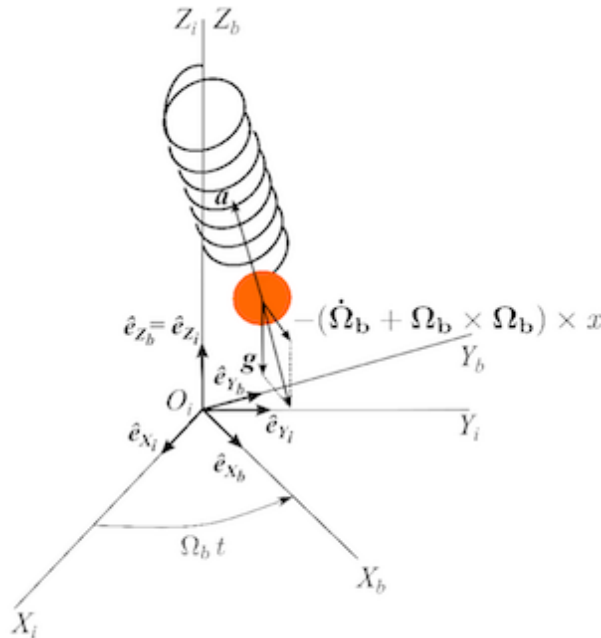


FIGURE 6.3 – Situation S_2 . L'observateur, muni d'un peson à ressort, effectue un mouvement de rotation d'axe $\hat{\mathbf{e}}_{Z_i}$.

Le vecteur position du peson s'exprime ici par la relation :

$$\mathbf{x} = X^b \hat{\mathbf{e}}_{X_b} + Y^b \hat{\mathbf{e}}_{Y_b} + Z^b \hat{\mathbf{e}}_{Z_b},$$

qui, dérivée deux fois par rapport au temps, devient :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \ddot{X}^b \hat{\mathbf{e}}_{X_b} + \ddot{Y}^b \hat{\mathbf{e}}_{Y_b} + \ddot{Z}^b \hat{\mathbf{e}}_{Z_b} + 2 \left(\dot{X}^b \dot{\hat{\mathbf{e}}}_{X_b} + \dot{Y}^b \dot{\hat{\mathbf{e}}}_{Y_b} + \dot{Z}^b \dot{\hat{\mathbf{e}}}_{Z_b} \right) + \dots \\ &\quad X^b \ddot{\hat{\mathbf{e}}}_{X_b} + Y^b \ddot{\hat{\mathbf{e}}}_{Y_b} + Z^b \ddot{\hat{\mathbf{e}}}_{Z_b}, \end{aligned}$$

d'où, en explicitant les dérivées des vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_{\alpha_b}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\ddot{X}^b \hat{\mathbf{e}}_{X_b} + \ddot{Y}^b \hat{\mathbf{e}}_{Y_b} + \ddot{Z}^b \hat{\mathbf{e}}_{Z_b}}_{[1]} + 2 \underbrace{\Omega_b \times \left(X^b \hat{\mathbf{e}}_{X_b} + Y^b \hat{\mathbf{e}}_{Y_b} + Z^b \hat{\mathbf{e}}_{Z_b} \right)}_{[2]} + \dots \\ &\quad \underbrace{(\dot{\Omega}_b + \Omega_b \times \Omega_b) \times \left(X^b \hat{\mathbf{e}}_{X_b} + Y^b \hat{\mathbf{e}}_{Y_b} + Z^b \hat{\mathbf{e}}_{Z_b} \right)}_{[3]}. \end{aligned}$$

Les termes [1] et [2] correspondent respectivement à l'accélération et la vitesse du peson relatives au repère de l'observateur. Elles sont toutes deux nulles lorsque l'équilibre est atteint. Le terme [3] correspond simplement au vecteur position $\mathbf{x}_b$ du peson mesuré depuis l'origine $O_b = O_i$, si bien que la relation donnant la force spécifique s'écrit à présent :

$$\mathbf{a} = - \left(\mathbf{g} - (\dot{\Omega}_b + \Omega_b \times \Omega_b) \times \mathbf{x}_b \right). \quad (6.5)$$

À nouveau, l'observateur ne peut déterminer qu'une accélération gravitationnelle apparente qu'il doit corriger d'une erreur systématique. Cette dernière dépend à la fois de la position du peson $\mathbf{x}$, du vecteur rotation Ω_b de son propre repère par rapport au repère inertiel, et de sa variation temporelle $\dot{\Omega}_b$.

Cette expérience simple, qui ne considère somme toute que le seul mouvement de l'observateur par rapport à un repère inertiel, illustre plusieurs problèmes fondamentaux de la gravimétrie mobile. En premier lieu, la mesure de l'observateur étant une accélération, toute séparation de cette dernière des accélérations non gravitationnelles nécessite la détermination complète du mouvement du repère de l'observateur. Ainsi, dans le cas général d'un mouvement combinant les situations 1 et 2, l'observateur devra-t-il déterminer les vecteurs $\mathbf{O}_i \mathbf{O}_b$, Ω_b , leurs dérivées premières ($\rightarrow \dot{\Omega}_b$) et secondes ($\rightarrow \ddot{\Omega}_b$), et la position du peson dans son propre repère ($\rightarrow \mathbf{x}_b$), ce qui nécessite des *capteurs de position et d'orientation* supplémentaires. En second lieu, l'expérience décrite ici suppose implicitement que l'observateur sache mesurer des grandeurs vectorielles telle la force spécifique $\mathbf{a}$. Or, en pratique, les grandeurs vectorielles sont déterminées grâce à leurs composantes dans un repère de travail donné. C'est pourquoi notre observateur ne pourrait mesurer complètement la force spécifique à l'aide d'un seul peson, mais seulement la composante de cette dernière dans la direction sensible du peson.

Deux solutions s'offrent à lui : soit il maintient l'axe sensible dans une direction fixe – idéalement proche de la verticale du lieu – et il exprime toutes les grandeurs vectorielles dans un repère dont l'un des axes est aligné dans cette direction ; soit il utilise un accéléromètre à trois directions sensibles, non coplanaires (par exemple, trois pesons à axes orthogonaux), qui constituent un repère du capteur – baptisé généralement repère « s » pour « sensor » –. Il pourra déterminer ensuite la relation de passage permettant de transformer les composantes des grandeurs vectorielles mesurées dans le repère du capteur, en celles mesurables dans le repère de travail. En fait, ces deux configurations se rencontrent dans les dispositifs mobiles de mesure de la gravité. La nécessité de connaître l'orientation du repère de mesure par rapport au repère de travail, complique encore plus la mesure dans les deux cas.

6.1.2 Modèle général d'un système de gravimétrie mobile

Tous les systèmes de gravimétrie mobile peuvent être décrits à l'aide d'un modèle général, ce qui en permet une approche unifiée indépendante de la technologie des capteurs. Le formalisme mathématique utilisé dans cette approche est directement hérité de celui employé pour modéliser les systèmes inertiels de navigation, à partir des outils mathématiques développés notamment dans ROGERS (2007). L'application du formalisme de la navigation aux systèmes de gravimétrie mobile est particulièrement bien traitée dans JEKELI (2001). Nous avons étendu et généralisé cette modélisation pour en donner une formulation définitive dans Roussel et al., 2015 (acti1). Une version différente mais équivalente de cette formulation est utilisée dans de Saint-Jean et al., 2005 (acti6), 2007 (com12), de Saint-Jean, 2008 (these4), et Cali et al., 2005 (com14), 2010 (do1). L'atout essentiel de la formulation proposée dans Roussel et al., 2015 (acti1), est son universalité. Elle permet, en effet, la modélisation de toute sorte de systèmes mobiles de gravimétrie ou gradiométrie. C'est donc cette dernière que nous avons choisie de présenter ci-après.

6.1.2.1 Description du modèle

Le système de gravimétrie mobile décrit par ce modèle est supposé comporter un capteur d'accélération à « 3 axes », qui mesure les accélérations dans trois directions non coplanaires définies par les axes sensibles du capteur. Il s'agit donc d'un système de gravimétrie *vectorielle*. Le capteur d'accélération peut également consister en 3 accéléromètres uni-axes, dont les axes sensibles seraient non coplanaires.

Le capteur d'accélération est ici supposé sans défaut; les modèles d'erreur seront discutés ultérieurement. Le système comporte, en outre, un dispositif de positionnement permettant de déterminer la position d'un point particulier du véhicule porteur que nous nommerons P . En pratique, ce point ne peut coïncider avec l'intersection des axes sensibles du capteur d'accélération. Le vecteur liant cette intersection avec le point positionné est appelé *bras de levier*; il est supposé connu. Enfin, un dispositif de mesure de l'attitude du véhicule doit être également présent pour déterminer les angles de roulis, tangage, et lacet. Toutes les données sont supposées échantillonnées dans le temps à la même cadence. Le modèle proposé peut être adapté très simplement pour décrire le cas particulier d'un système ne comportant qu'un seul accéléromètre uni-axe, c'est-à-dire un système de gravimétrie *scalaire*.

6.1.2.2 Repères et notations

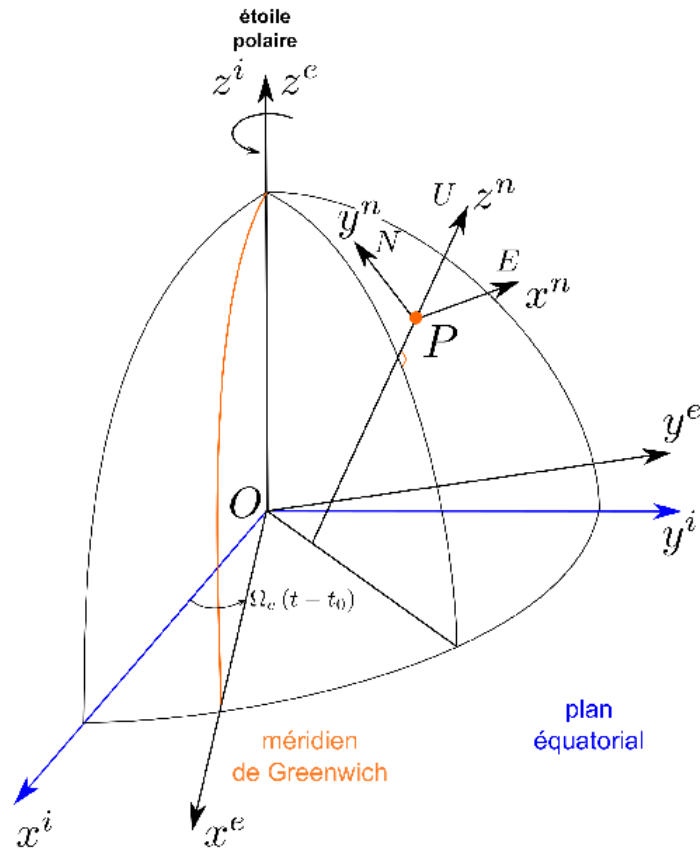
Les grandeurs vectorielles utilisées dans ce modèle sont définies par leurs trois composantes dans un repère donné. Si $\mathbf{X}$ désigne un vecteur et a un certain référentiel, la notation $\mathbf{X}^a$ correspond à la matrice colonne contenant les trois coordonnées du vecteur $\mathbf{X}$ dans le référentiel a :

$$\mathbf{X}^a = \begin{bmatrix} X_x^a \\ X_y^a \\ X_z^a \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

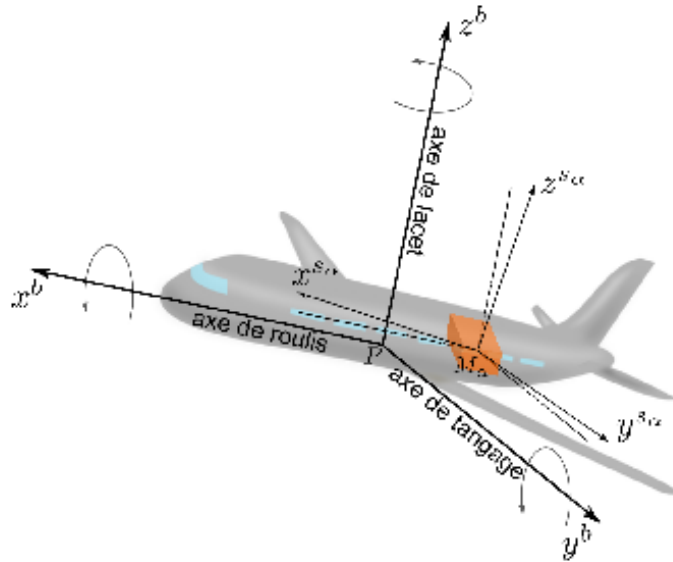
Une telle représentation est très utile en pratique, puisque toute détermination d'une grandeur vectorielle consiste à en mesurer les coordonnées dans un repère donné.

Certains repères pourront être munis d'une base orthonormée, de sens direct; ils seront désignés par l'acronyme « ROND » pour « Repère OrthoNormé Direct ». Les repères nécessaires à l'expression des équations du modèle sont définis ci-après :

1. Le repère i « *inertial* » (Fig. 6.4a, p. 187), supposé inertiel, est un ROND qui a son origine au centre O de la Terre, et dont l'orientation est fixe par rapport à la sphère céleste. Soient Ox^i , Oy^i et Oz^i les trois axes de ce repère. L'axe Oz^i pointe dans la direction de l'Étoile Polaire qui coïncide avec celle de l'axe de rotation moyen de la Terre. C'est dans le repère i que la seconde loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) est valable.
2. Le repère e « *earth* » (Fig. 6.4a, p. 187) est un ROND lié à la Terre dont l'origine coïncide avec son centre O . L'axe Oz^e est confondu avec l'axe des pôles moyen; les deux autres axes orthogonaux Ox^e et Oy^e appartiennent au plan équatorial dans lequel l'axe Ox^e intersecte le méridien de Greenwich. L'axe Oy^e complète alors le repère pour qu'il soit direct. Le repère e est animé d'un mouvement de rotation par rapport au repère i autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire Ω_e .
3. Le repère n « *navigation* » (Fig. 6.4a, p. 187) dit repère de *géographique local*, est un ROND dont l'axe Oz^n , noté U , coïncide avec la normale locale à un ellipsoïde de référence conventionnel. Ce dernier est un ellipsoïde de révolution dont l'axe est confondu avec l'axe des pôles moyen; les deux autres axes Ox^n et Oy^n , notés respectivement E et N , appartiennent au plan orthogonal à la normale, et pointent respectivement dans les directions de l'est et du nord; l'axe U est dirigé vers le haut. De par sa définition locale, le repère n a une origine mobile qui se déplace, pour ce qui nous concerne, avec le véhicule. Nous supposons son origine placée au point P du véhicule dont la position est connue. C'est dans le repère n que les composantes du champ de pesanteur seront exprimées.
4. Le repère b « *body* » (Fig. 6.4b, p. 187) est un ROND complètement lié au véhicule porteur. Les axes Ox^b et Oz^b sont respectivement dirigés dans le sens de marche du véhicule et vers le haut. L'axe Oy^b complète ces deux premiers axes pour que le repère soit direct. Les angles de rotation du véhicule autour des axes Ox^b , Oy^b , et Oz^b correspondent respectivement aux angles de roulis, de tangage, et de lacet qui déterminent l'attitude du véhicule.
5. Le repère s « *sensor* » (Fig. 6.4b, p. 187) est complètement défini par les trois directions des axes sensibles du capteur 3D d'accélération. De par les défauts d'alignement, les trois directions des axes sensibles ne forment pas nécessairement un trièdre orthogonal. L'origine du repère s est supposée située dans le capteur lui-même, au niveau du corps d'épreuve qui subit l'accélération mesurée. Dans la suite, nous appellerons M_α , l'origine du repère s_α associé au capteur α . La mesure d'accélération du capteur α est constituée par les trois valeurs d'accélération obtenues suivant les trois directions du repère s_α .



(a) Repères i « *inertial* » ($Ox^i y^i z^i$), e « *earth* » ($Ox^e y^e z^e$) et n « *navigation* » ($Ox^n y^n z^n$) ou (E, N, U), utilisés en gravimétrie mobile. Le repère e effectue une rotation d'axe (Oz^i) autour du repère i à la vitesse angulaire de rotation de la Terre Ω_e . Le point P est fixe dans le véhicule porteur.



(b) Repères b « *body* » ($Ox^b y^b z^b$) et s « *sensor* » ($Ox^{s_\alpha} y^{s_\alpha} z^{s_\alpha}$), utilisés en gravimétrie mobile. Le repère s_α est associé au capteur 3D d'accélération α . Compte tenu des défauts d'alignement des axes sensibles, ce repère n'est pas nécessairement orthogonal. Il y a autant de repères s que d'accéléromètres 3D dans un système de gravimétrie mobile. Le point P est l'origine commune des repères n et b . Le point M_α situe le capteur d'accélération dans l'habitacle du véhicule porteur.

FIGURE 6.4 – Repères utilisés en gravimétrie mobile.

Soient a_1 et a_2 deux repères quelconques, et $C_{a_2}^{a_1}$ la matrice 3×3 de passage du repère a_2 vers le repère a_1 . Chaque colonne de la matrice $C_{a_2}^{a_1}$ est formée par les coordonnées d'un vecteur de base du repère a_2 exprimées dans le repère a_1 , ce qui se traduit par :

$$C_{a_2}^{a_1} = \begin{bmatrix} u_{1a_2}^{a_1} & u_{2a_2}^{a_1} & u_{3a_2}^{a_1} \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

où $u_{ia_2}^{a_1}$, $i = 1, 2, 3$ désigne la matrice colonne des coordonnées du i^e vecteur de base du repère a_2 exprimées dans le repère a_1 .

Les matrices colonnes $\mathbf{X}^{a_1}$ et $\mathbf{X}^{a_2}$ sont liées par la relation matricielle :

$$\mathbf{X}^{a_1} = C_{a_2}^{a_1} \mathbf{X}^{a_2}. \quad (6.8)$$

Soient $C_{a_1}^{a_2}$ et $C_{a_2}^{a_3}$ les matrices de passage du repère a_1 au repère a_2 et du repère a_2 au repère a_3 respectivement. Le vecteur $\mathbf{X}^{a_3}$ peut alors s'exprimer en fonction de $\mathbf{X}^{a_2}$ et $\mathbf{X}^{a_1}$ par les relations :

$$\mathbf{X}^{a_3} = C_{a_2}^{a_3} \mathbf{X}^{a_2} = C_{a_2}^{a_3} C_{a_1}^{a_2} \mathbf{X}^{a_1}.$$

Il en résulte une relation entre les matrices de passage $C_{a_1}^{a_3}$, $C_{a_2}^{a_3}$ et $C_{a_1}^{a_2}$:

$$C_{a_1}^{a_3} = C_{a_2}^{a_3} C_{a_1}^{a_2}. \quad (6.9)$$

Cette relation est généralisable à un nombre k quelconque de repères $a_1, a_2, \dots, a_k$, comme suit :

$$C_{a_1}^{a_k} = C_{a_{k-1}}^{a_k} \dots C_{a_2}^{a_3} C_{a_1}^{a_2}. \quad (6.10)$$

Il est clair également que $C_{a_2}^{a_2} = I_3$ où I_3 est la matrice identité 3×3 . En utilisant la relation 6.9, il vient :

$$C_{a_2}^{a_2} = C_{a_1}^{a_2} C_{a_2}^{a_1},$$

ce qui entraîne :

$$C_{a_1}^{a_2} C_{a_2}^{a_1} = I_3 \quad \text{ou} \quad C_{a_2}^{a_1} = (C_{a_1}^{a_2})^{-1}. \quad (6.11)$$

Dans le cas où les repères a_1 et a_2 sont des ROND, la matrice $C_{a_2}^{a_1}$ est *orthogonale*, ce qui se traduit par :

$$(C_{a_2}^{a_1})^{-1} = (C_{a_2}^{a_1})^T, \quad (6.12)$$

où le symbole « $\dots^T$ » désigne la transposition.

Il est alors possible d'exprimer la matrice de passage $C_{a_1}^{a_2}$ du repère a_1 vers le repère a_2 en remarquant que :

$$\mathbf{X}^{a_2} = C_{a_1}^{a_2} \mathbf{X}^{a_1} = (C_{a_2}^{a_1})^{-1} \mathbf{X}^{a_1},$$

d'où il résulte, avec la relation 6.12 :

$$C_{a_1}^{a_2} = (C_{a_2}^{a_1})^T. \quad (6.13)$$

La dérivée temporelle d'une matrice de passage telle $C_{a_2}^{a_1}$, s'exprime par la relation matricielle suivante :

$$\frac{dC_{a_1}^{a_2}}{dt} = \dot{C}_{a_1}^{a_2} = C_{a_1}^{a_2} \Omega_{a_2 a_1}^{a_1}, \quad (6.14)$$

où $\Omega_{a_1 a_2}^{a_1}$ est la matrice 3×3 antisymétrique, construite à partir des coordonnées $(\omega_x^{a_1}, \omega_y^{a_1}, \omega_z^{a_1})$ du vecteur rotation $\omega_{a_1 a_2}$ du référentiel a_2 par rapport au référentiel a_1 , comme suit :

$$\Omega_{a_1 a_2}^{a_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z^{a_1} & +\omega_y^{a_1} \\ +\omega_z^{a_1} & 0 & -\omega_x^{a_1} \\ -\omega_y^{a_1} & +\omega_x^{a_1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Cette matrice sera appelée par la suite *matrice de vitesse de rotation*.

La matrice de vitesse de rotation dans le repère a_2 s'exprime très simplement à partir de la matrice $\Omega_{a_1 a_2}^{a_1}$ par la relation :

$$\Omega_{a_1 a_2}^{a_2} = C_{a_1}^{a_2} \Omega_{a_1 a_2}^{a_1} C_{a_2}^{a_1}. \quad (6.16)$$

Dans le cas où les matrices $C_{a_1}^{a_2}$ et $C_{a_2}^{a_1}$ sont orthogonales, la relation 6.16 précédente implique que :

$$C_{a_1}^{a_2} \Omega_{a_1 a_2}^{a_1} = \Omega_{a_2 a_1}^{a_2} C_{a_1}^{a_2}.$$

La relation de dérivation 6.14 peut donc également s'exprimer par :

$$\dot{C}_{a_1}^{a_2} = \Omega_{a_1 a_2}^{a_2} C_{a_1}^{a_2}. \quad (6.17)$$

Ce sont alors les coordonnées du vecteur rotation $\omega_{a_1 a_2}$ dans le repère a_2 , qui sont utilisées dans la matrice de vitesse de rotation.

La matrice de vitesse de rotation peut être obtenue à partir de la seule matrice de passage et sa dérivée. En effet, en multipliant chaque membre de la relation 6.17 par $C_{a_1}^{a_2}$ à gauche, il vient :

$$\Omega_{a_1 a_2}^{a_2} = C_{a_1}^{a_2} \dot{C}_{a_1}^{a_2}. \quad (6.18)$$

La relation 6.16 reste valable pour n'importe quelle matrice. En effet, si Γ^{a_1} et Γ^{a_2} désignent deux matrices 3×3 exprimées respectivement dans les repères a_1 et a_2 , alors il vient :

$$\Gamma^{a_1} = C_{a_2}^{a_1} \Gamma^{a_2} C_{a_1}^{a_2}. \quad (6.19)$$

Enfin, nous allons exprimer les dérivées temporelles première et seconde du vecteur X^{a_1} en fonction de celles du vecteur X^{a_2} . Ces derniers sont liés par la relation matricielle :

$$X^{a_1} = C_{a_2}^{a_1} X^{a_2}.$$

Avec la relation 6.14, il vient successivement :

$$\dot{X}^{a_1} = C_{a_2}^{a_1} \Omega_{a_1 a_2}^{a_2} X^{a_2} + C_{a_2}^{a_1} \dot{X}^{a_2}, \quad (6.20)$$

$$\ddot{X}^{a_1} = C_{a_2}^{a_1} (\Omega_{a_1 a_2}^{a_2} \Omega_{a_1 a_2}^{a_2} + \dot{\Omega}_{a_1 a_2}^{a_2}) X^{a_2} + 2 C_{a_2}^{a_1} \Omega_{a_1 a_2}^{a_2} \dot{X}^{a_2} + C_{a_2}^{a_1} \ddot{X}^{a_2}. \quad (6.21)$$

Ces relations fondamentales sont d'une grande utilité pratique pour l'expression des lois de la mécanique, comme nous allons voir dans ce qui suit.

6.1.2.3 Équation liant gravité et force spécifique

Soit $\mathbf{a}_\alpha^i$ la force spécifique mesurée par le capteur d'accélération α , et soit $\mathbf{X}_\alpha^i$ le vecteur position qui repère le point M_α où se situe le corps d'épreuve du capteur d'accélération, tous deux mesurés dans le repère inertiel i . D'après la seconde loi de Newton, l'accélération du corps d'épreuve $\ddot{\mathbf{X}}_\alpha^i$ dans le repère i , s'exprime par :

$$\ddot{\mathbf{X}}_\alpha^i = \mathbf{g}_\alpha^i + \mathbf{a}_\alpha^i, \quad (6.22)$$

où $\mathbf{g}_\alpha^i$ est l'accélération gravitationnelle au point M_α .

Le point M_α est distinct du point P effectivement positionné. En appelant $\mathbf{L}_\alpha^b$ le vecteur $\overrightarrow{PM}_\alpha$ mesuré dans le repère b , il vient :

$$\mathbf{X}_\alpha^i = \mathbf{X}_P^i + C_b^i \mathbf{L}_\alpha^b,$$

où C_b^i est la matrice de passage orthogonale du repère b au repère i .

La position du point P étant déterminée généralement dans le repère terrestre e , une écriture plus appropriée de la relation précédente doit impliquer le vecteur position $\mathbf{X}_P^e$, qui repère le point P ; il vient alors :

$$\mathbf{X}_\alpha^i = C_e^i \mathbf{X}_P^e + C_b^i \mathbf{L}_\alpha^b, \quad (6.23)$$

où C_e^i est la matrice de passage orthogonale du repère e au repère i .

La relation 6.23 est constituée par la somme de deux formules de changement de repère (cf Éq. 6.8), dont la dérivée temporelle seconde peut être obtenue à l'aide de la relation 6.21. Cette démarche permet de déterminer une nouvelle expression de l'accélération $\ddot{\mathbf{X}}_\alpha^i$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_\alpha^i = & C_e^i (\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e) \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^i \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^i \ddot{\mathbf{X}}_P^e + \dots \\ & C_b^i (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b) \mathbf{L}_\alpha^b + 2 C_b^i \Omega_{ib}^b \dot{\mathbf{L}}_\alpha^b + C_b^i \ddot{\mathbf{L}}_\alpha^b, \end{aligned} \quad (6.24)$$

où Ω_{ie}^e et Ω_{ib}^b sont respectivement les matrices de vitesse de rotation du repère e et du repère b par rapport au repère i .

Les points P et M_α étant fixes dans le repère b , le vecteur $\mathbf{L}_\alpha^b$ est constant, d'où il découle :

$$\dot{\mathbf{L}}_\alpha^b = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{L}}_\alpha^b = 0. \quad (6.25)$$

Par ailleurs, l'accélération $\ddot{\mathbf{X}}_\alpha^i$ est liée à la gravité $\mathbf{g}_\alpha^n$ et à la force spécifique $\mathbf{a}_\alpha^b$, exprimées respectivement dans les repères n et b , par la relation 6.22 qui peut s'écrire :

$$\ddot{\mathbf{X}}_\alpha^i = C_e^i C_n^e \mathbf{g}_\alpha^n + C_e^i C_n^e C_b^n \mathbf{a}_\alpha^b, \quad (6.26)$$

où C_n^e et C_b^n sont les matrices de passages orthogonales du repère n au repère e et du repère b au repère n respectivement.

En combinant les relations 6.24, 6.25, et 6.26, il vient :

$$\begin{aligned} C_e^i C_n^e \mathbf{g}_\alpha^n + C_e^i C_n^e C_b^n \mathbf{a}_\alpha^b = & C_e^i (\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e) \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^i \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^i \ddot{\mathbf{X}}_P^e + \dots \\ & C_b^i (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b) \mathbf{L}_\alpha^b. \end{aligned}$$

En multipliant chaque membre de la relation précédente par $C_e^n C_i^e$, compte tenu des relations $C_i^e C_e^i = I_3$, $C_e^n C_n^e = I_3$, et $C_e^n C_i^e C_b^i = C_b^n$, il vient, tous calculs faits :

$$\mathbf{g}_\alpha^n = C_e^n (\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e) \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^n \ddot{\mathbf{X}}_P^e + C_b^n (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b) \mathbf{L}_\alpha^b - C_b^n \mathbf{a}_\alpha^b. \quad (6.27)$$

L'équation 6.27 peut être considérée comme une relation fondamentale de la gravimétrie et de la gradiométrie mobiles. Elle va servir de base pour tous les développements ultérieurs.

Pour déterminer l'accélération de la pesanteur, notée $\bar{\mathbf{g}}_\alpha^n$, il suffit de compléter l'expression de l'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}_\alpha^n$ avec celle de l'accélération centrifuge; il vient alors :

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha^n = \mathbf{g}_\alpha^n - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e (\mathbf{X}_P^e + C_n^e C_b^n \mathbf{L}_\alpha^b). \quad (6.28)$$

Une relation analogue à 6.27 peut être donnée pour la pesanteur dans laquelle le terme $C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \mathbf{X}_P^e$ disparaît, et un nouveau terme de bras de levier apparaît :

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha^n = C_e^n \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^n \ddot{\mathbf{X}}_P^e + \left[C_b^n (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b) - C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n \right] \mathbf{L}_\alpha^b - C_b^n \mathbf{a}_\alpha^b.$$

En utilisant les relations 6.11 et 6.19, il est possible de transformer le produit $C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n$ comme suit :

$$\begin{aligned} C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n &= C_b^n \underbrace{C_n^e C_e^n}_{C_e^b} \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \underbrace{C_n^e C_b^n}_{C_b^e} \\ &= C_b^n \Omega_{ie}^b \Omega_{ie}^b. \end{aligned}$$

L'expression de la pesanteur peut finalement s'écrire :

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha^n = C_e^n \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^n \ddot{\mathbf{X}}_P^e + C_b^n (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ie}^b \Omega_{ie}^b) \mathbf{L}_\alpha^b - C_b^n \mathbf{a}_\alpha^b. \quad (6.29)$$

6.1.3 Les dispositifs de gravimétrie mobile

6.1.3.1 Mesures requises en gravimétrie mobile

Les termes impliqués dans la relation 6.27 peuvent être classés en trois catégories en fonction de leur nature physique.

La première catégorie regroupe les termes qui dépendent du *mouvement d'ensemble* du porteur. Elle correspond au vecteur $\mathbf{T}_1$ qui s'exprime par :

$$\mathbf{T}_1 = C_e^n (\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e) \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^n \ddot{\mathbf{X}}_P^e. \quad (6.30)$$

Ce terme peut être entièrement déterminé à partir des mesures réalisées par le dispositif de positionnement qui équipe le porteur, tel un système de positionnement GNSS, une centrale inertielle (Inertial Navigation System (INS)), voire un système de positionnement hybride INS/GNSS. Ce dernier donne en effet position $\mathbf{X}_P^e$, vitesse $\dot{\mathbf{X}}_P^e$ et accélération $\ddot{\mathbf{X}}_P^e$ du point P , ce qui permet en outre le calcul de la matrice C_e^n , liée seulement à la position (cf Annexe A, p. 403).

La seconde catégorie correspond aux effets du *bras de levier* sur l'accélération mesurée. Elle est représentée par le vecteur T_2 donné par :

$$T_2 = C_b^n \left(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right) L_\alpha^b. \quad (6.31)$$

Le vecteur « bras de levier » L_α^b peut être obtenu par des mesures de topométrie de précision, réalisées lors de l'installation du dispositif de gravimétrie mobile dans son porteur. Il peut être également mesuré sur le plan d'ensemble du porteur équipé de son instrumentation. En outre, la détermination complète du terme T_2 nécessite des mesures de l'attitude du porteur (Fig. 6.5), c'est-à-dire les angles de roulis (η), tangage (χ) et lacet (α), pour constituer la matrice C_b^n (cf Annexe A, p. 403).

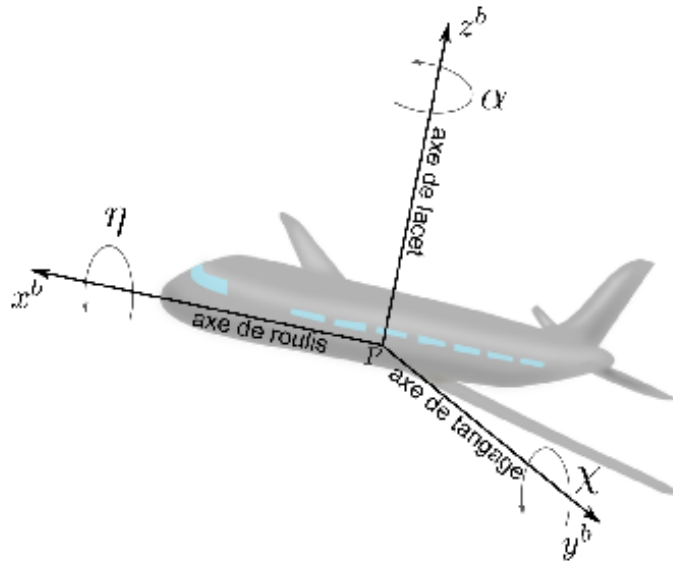


FIGURE 6.5 – Définition des angles d'attitude : roulis (η), tangage (χ), lacet (α).

Ces mesures peuvent être réalisées par une centrale inertielle de navigation, une centrale d'attitude également appelée « Attitude and Heading Reference System (AHRS) », ou un système GNSS multi-antennes. Enfin la matrice de vitesse de rotation Ω_{ib}^b se construit directement à partir des mesures de trois gyromètres à axes orthogonaux solidaires du porteur. Ces mesures peuvent être éventuellement accessibles depuis une centrale inertielle de navigation. En l'absence de ces dispositifs, il est possible de reconstituer la matrice Ω_{ib}^b à partir des angles d'attitude et des mesures de position, grâce à la relation de composition des vitesses angulaires :

$$\Omega_{ib}^b = \Omega_{nb}^b + C_n^b (\Omega_{en}^n + \Omega_{ie}^n) C_b^n. \quad (6.32)$$

Cette configuration pourrait donc s'appuyer théoriquement sur un système GNSS multi-antennes dans laquelle une antenne maîtresse servirait au positionnement.

La dernière catégorie constitue la mesure d'accélération proprement dite, réalisée par le capteur central du système gravimétrique. Elle est représentée par le vecteur T_3 donné par :

$$T_3 = C_b^n a_\alpha^b. \quad (6.33)$$

La détermination de ce terme suppose une nouvelle fois la mesure de l'attitude du véhicule nécessaire pour fixer la matrice C_b^n . En outre, le capteur d'accélération fournit ses mesures dans son propre repère s_α .

Le vecteur a_α^b se déduit donc du vecteur de force spécifique $a_\alpha^{s_\alpha}$ par la relation :

$$a_\alpha^b = C_{s_\alpha}^b a_\alpha^{s_\alpha}, \quad (6.34)$$

où $C_{s_\alpha}^b$ est la matrice de passage, non orthogonale, de repère s_α au repère b .

La matrice $C_{s_\alpha}^b$ a ses coefficients constants pour une configuration instrumentale donnée. Sa détermination suppose un étalonnage préalable qui constitue l'une des étapes clés de la réalisation d'un système de gravimétrie mobile.

La figure 6.6 résume les différentes configurations instrumentales en gravimétrie mobile.

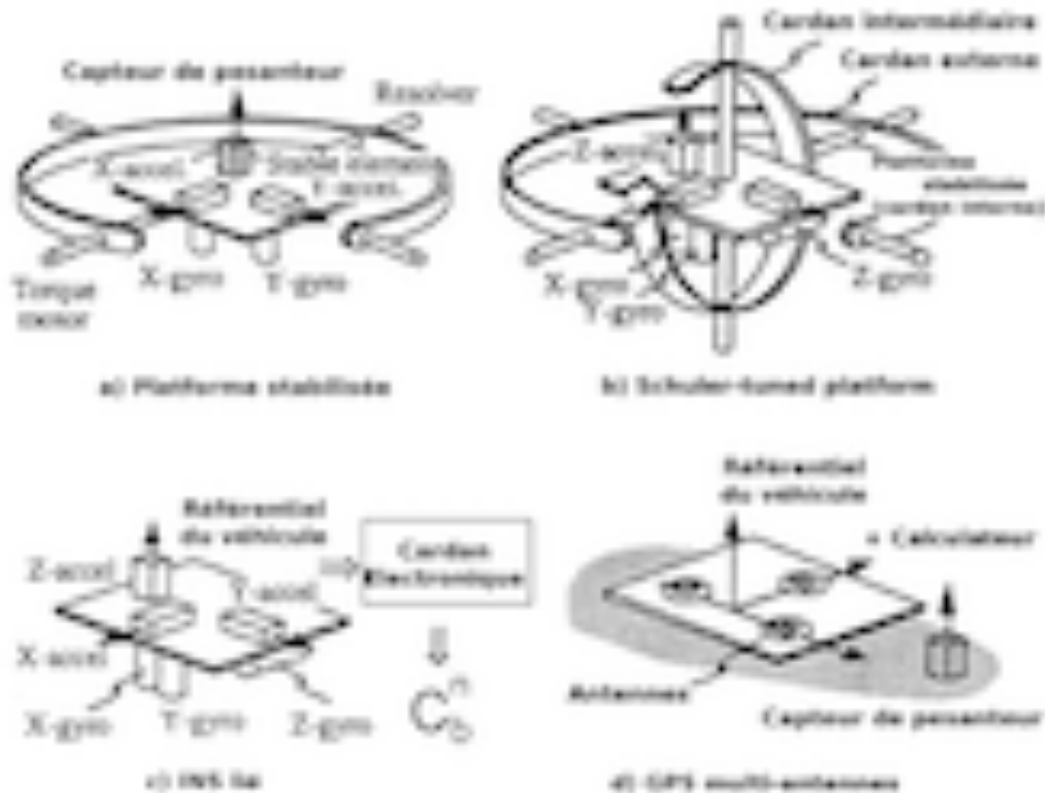


FIGURE 6.6 – Configurations instrumentales rencontrées dans les systèmes mobiles de gravimétrie. D'après SCHWARZ et WEI (1995).

Dans les cas a. et b., le capteur d'accélération est monté sur une plate-forme stabilisée, dont le but est de compenser les changements d'attitude du porteur.

Dans le cas d'un fonctionnement idéal, la plate-forme permet d'aligner les repères b et n ($b \equiv n$), si bien que la matrice C_b^n égale l'identité. La relation fondamentale de la gravimétrie mobile devient alors :

$$\mathbf{g}_\alpha^n = C_e^n (\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e) \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^n \ddot{\mathbf{X}}_P^e + (\Omega_{in}^n \Omega_{in}^n + \dot{\Omega}_{in}^n) \mathbf{L}_\alpha^b - \mathbf{a}_\alpha^n \quad (6.35)$$

Cette dernière équation ne dépend plus de l'attitude. Tous les termes qu'elle contient peuvent alors être déterminés à partir de mesures d'un système de positionnement.

En réalité, la stabilisation d'un système gravimétrique par une plate-forme comporte plusieurs inconvénients, le plus évident d'entre eux étant l'usure inévitable des pièces mécaniques qui entraîne une dégradation des performances avec le temps. En outre, le principe de la stabilisation repose sur l'utilisation d'un système asservi qui s'appuie sur des mesures inertielles issues d'accéléromètres et de gyromètres. Ces dernières sont identiques à celles réalisées dans une centrale inertielle. Par conséquent, la détermination de la matrice C_b^n est tout à fait possible à l'aide des mêmes mesures inertielles fournies par un dispositif rigidement fixé au porteur. L'avènement des calculateurs embarqués de haute performance, a rendu, aujourd'hui, l'utilisation de systèmes de navigation dits « *strapdown* » incontournable (TITTERTON et WESTON, 2004).

La situation est plus contrastée en gravimétrie mobile comme en témoigne le nombre conséquent de systèmes mobiles sur plate-forme stabilisée, tels les systèmes TAGS-6™ de ®Micro-g LaCoste et KSS31™ de ®Bodenseewerk. La question cruciale sur ce point est de déterminer l'erreur induite sur la mesure gravimétrique par un défaut de stabilisation et d'estimer l'incertitude sur la détermination de cette erreur.

Le problème de l'estimation de l'erreur de stabilisation compensée par une plate-forme stabilisée, est abordé dans Verdun et Klingelé, 2005 (acl4), à partir des données de gravimétrie scalaire aéroportée acquises lors du lever « Alpes 1998 » [Verdun et al., 2003 (acl5)]. Avant de pouvoir évoquer les conclusions de cette étude, il est nécessaire de décrire brièvement les caractéristiques du lever aéroporté proprement dit.

6.1.3.2 Le lever aérien « Alpes 1998 »

Ce lever, premier du genre en France métropolitaine, a été réalisé dans le cadre du projet « GÉOFRANCE 3D » (proj1), en étroite collaboration avec le laboratoire de géodésie et géodynamique (Geodesy and Geodynamics Lab (GGL)) de l'ETHZ. Le traitement et la validation des données acquises lors de ce lever ont été étudiés dans le cadre de ma thèse de doctorat [Verdun, 2000 (ap7)].

Le lever « Alpes 1998 » est constitué de 18 profils en long de 300 km et 16 profils transverses de 170 km, orientés respectivement dans les directions nord-sud et est-ouest (Fig. 6.7). L'ensemble couvre la majeure partie des Alpes de l'ouest sur une surface totale de 50 000 km².



FIGURE 6.7 – Profils réalisés lors du lever gravimétrique aéroporté « Alpes 1998 ». Les communes représentées sur cette carte ont abrité des stations GPS qui ont fonctionné durant l'intégralité du lever, donnant ainsi les points de référence au sol pour le positionnement relatif de l'avion.

Données topographiques issues du modèle global SRTM30.

These data are distributed by the Land Processes Distributed Active Archive Center (LP DAAC), located at USGS/EROS, Sioux Falls, SD (<http://lpdaac.usgs.gov>)

Carte produite à l'aide du logiciel GMT (WESSEL et al., 2013).

Le lever a été réalisé depuis un avion de moyenne envergure de type « DeHavilland Twin Otter™ » qui a volé à 5 100 m d'altitude à la vitesse moyenne de 280 km/h (Fig. 6.8). À bord, les mesures gravimétriques ont été réalisées à l'aide d'un gravimètre relatif marin/aérien de type « SA » fabriqué par la société @Micro-g LaCoste (Fig. 6.9), et mis en œuvre par l'un de leurs ingénieurs (Mark Halliday). Ce modèle de gravimètre est monté sur une plate-forme stabilisée à deux axes orthogonaux (Fig. 6.6a), équipée de deux gyromètres à fibre optique et deux accéléromètres électrostatiques. Les données en provenance de ces capteurs inertiels ont été également collectées durant tout le lever.



FIGURE 6.8 – DeHavilland Twin Otter™
Droits réservés ©Office Fédéral de Topographie SwissTopo.



FIGURE 6.9 – Vue du gravimètre marin/aérien de type SA™ commercialisé par la société @Micro-g LaCoste et sa plate-forme stabilisée.

Photo : Émile Klingelé (ETHZ).

En vue du positionnement et de la détermination de l'attitude, l'avion était équipé de 5 récepteurs GPS bi-fréquence dont les antennes avaient été placées sur le fuselage et les ailes (Fig. 6.10). L'ensemble des données gravimétriques et de position a été acquis à la fréquence de 1 Hz, ce qui correspond à un échantillonnage spatial d'environ un point de mesure tous les 80 m.

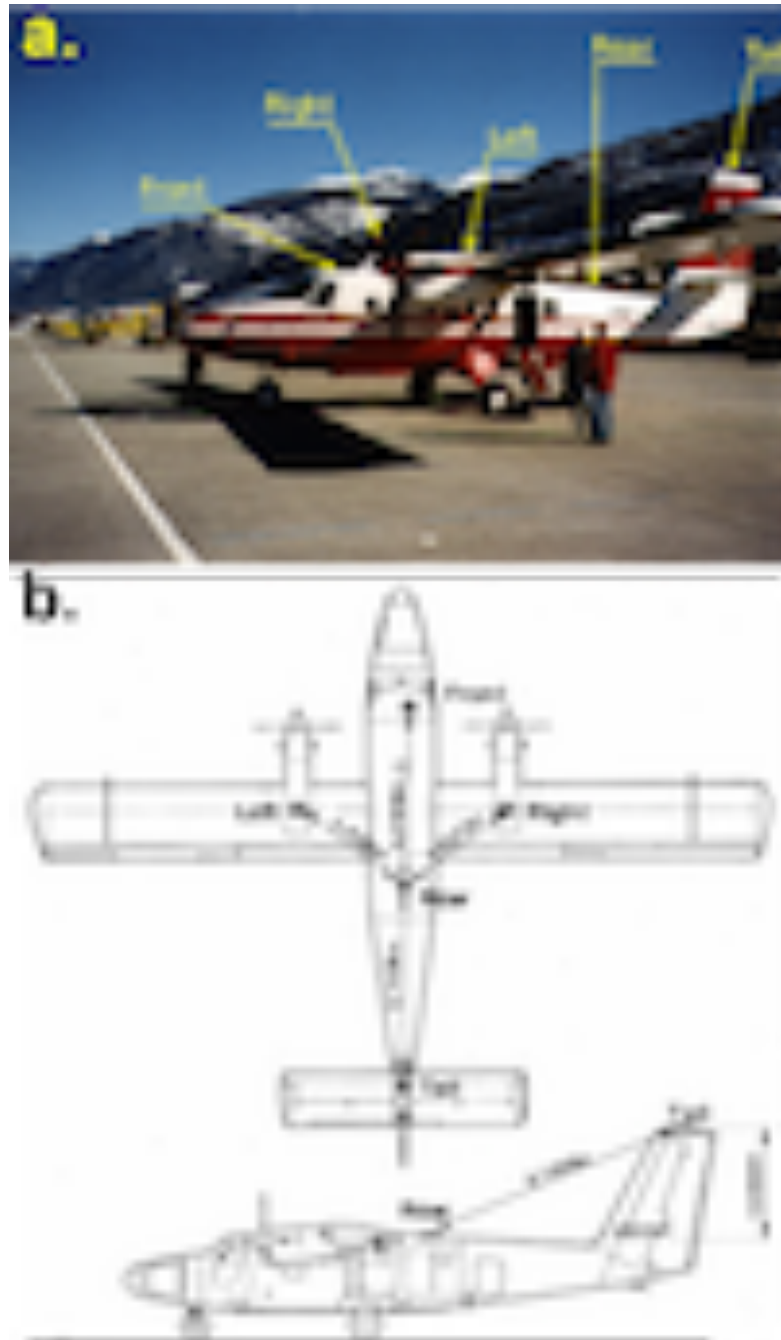


FIGURE 6.10 – Vue de l’avion DeHavilland Twin Otter™ a. utilisé pour le lever « Alpes 1998 ». Les flèches indiquent la position des antennes GPS installées sur le fuselage et les ailes. La vue b. figure les distances relatives entre les antennes qui ont permis, une fois combinées à des données d’orientation, de déterminer les coordonnées du centre de phase des antennes dans le repère s lié à l’avion.
D’après Verdun et Klingelé, 2005 (acl4).

Le traitement des données en provenance des capteurs d'accélération et de position a consisté pour l'essentiel à l'application de filtrages numériques de type passe-bas, destinés à isoler le signal géophysique du bruit de mesure. C'est cette opération qui fixe définitivement la résolution spatiale du lever en fonction de la fréquence de coupure des filtres utilisés. Un compromis doit alors être décidé entre la finesse de la résolution spatiale et le niveau de bruit toléré sur le signal géophysique. En effet, le rapport signal sur bruit se dégrade inéluctablement lorsque la bande passante du filtre s'étend vers les hautes fréquences (resp. les courtes longueurs d'onde). La plus courte longueur d'onde restituée à partir des données du lever « Alpes 1998 » est de 5,3 km. Dans tous les calculs numériques concernant le lever « Alpes 1998 » qui vont suivre, nous utiliserons les données filtrées de longueur d'onde supérieure à 5 km. Nous reviendrons plus longuement sur la problématique du filtrage des données de gravimétrie mobile dans la section 6.2.

6.1.3.3 Estimation de l'erreur de stabilisation

L'idée de base de cette étude est d'utiliser les données en provenance des capteurs inertiels de la plate-forme stabilisée, pour estimer l'erreur qui aurait été commise en cas d'absence de stabilisation. Cette situation revient à fixer rigidement le capteur d'accélération dans l'habitable du véhicule porteur. L'estimation quantitative des effets du défaut de stabilisation peut être obtenue en comparant les mesures d'accélération dans le repère n et le repère b respectivement. Plus précisément, si $\mathbf{a}^n$ et $\mathbf{a}^b$ désignent, respectivement, l'accélération mesurée dans le repère n et celle mesurée dans le repère b une fois le gravimètre stabilisé, alors $\mathbf{a}^b = \mathbf{a}^n$ en cas de stabilisation sans défaut. Autrement, l'accélération $\mathbf{a}^b$ s'exprime en fonction de la matrice de passage C_n^b et de l'accélération $\mathbf{a}^n$ par :

$$\mathbf{a}^b = C_n^b \mathbf{a}^n = \mathbf{a}^n + (C_n^b - I_3) \mathbf{a}^n.$$

L'erreur de stabilisation est donc mesurable par le vecteur $\mathbf{E}_s$ défini par :

$$\mathbf{E}_s = (C_n^b - I_3) \mathbf{a}^n. \quad (6.36)$$

Cette erreur possède trois composantes non nulles en cas de défaut de stabilisation, qui dépendent des angles d'attitude du porteur par l'intermédiaire de la matrice C_n^b . Ces angles restent proche de 0 dans des conditions normales de lever lorsque l'erreur de stabilisation reste modérée. En outre, tout défaut qui affecterait seulement l'angle de lacet n'aurait pas d'influence sur la mesure de l'accélération dans la direction verticale « U » du repère n , c'est-à-dire dans le cadre de la gravimétrie scalaire mobile. L'expression analytique de l'erreur de stabilisation dans ce cas, peut s'effectuer sans tenir compte du lacet avec une approximation au second ordre de la matrice C_n^b . Avec les notations :

$$\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^b = \begin{bmatrix} a_1^b \\ a_2^b \\ a_3^b \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^n = \begin{bmatrix} a_E^n \\ a_N^n \\ a_U^n \end{bmatrix},$$

utilisées avec l'équation 6.36 et l'expression A.4 de la matrice de passage C_n^b (cf Annexe A, p.403), il vient :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\chi^2}{2} & 0 & \chi \\ \eta\chi & -\frac{\eta^2}{2} & -\eta \\ -\chi & \eta & -\frac{\chi^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_E^n \\ a_N^n \\ a_U^n \end{bmatrix},$$

où χ et η désignent respectivement les angles de tangage et de roulis.

L'erreur de stabilisation qui affecte la mesure d'accélération dans la direction verticale s'exprime alors par :

$$E_3 = -\chi a_E^n + \eta a_N^n - \frac{1}{2} (\chi^2 + \eta^2) a_U^n. \quad (6.37)$$

L'analyse de 18 686 données acquises lors du lever « Alpes 1998 » [Verdun et Klingelé, 2005 (acl4)] a montré qu'en condition normale de lever :

$$|\chi|, |\eta| \lesssim 0,5^\circ;$$

$$|a_E^n|, |a_N^n| \lesssim 2000 \text{ mGal};$$

$$|a_U^n| \gtrsim 980500 \text{ mGal}.$$

Munie de ces valeurs, l'erreur de stabilisation verticale donnée par la relation 6.37, vaut numériquement :

$$|E_3| \sim \left(\frac{0,5\pi}{180} \right)^2 \times 980500 \sim 7 \times 10^2 \text{ mGal}.$$

L'erreur de stabilisation apparaît pour la composante verticale, comme un effet systématique de l'ordre de 10^3 mGal à corriger. La question qui se pose ensuite est celle de l'incertitude sur la détermination de cette erreur systématique, étant donné les incertitudes qui affectent les mesures d'accélération a_E^n , a_N^n , a_U^n et des angles d'attitude χ et η . En notant σ_γ^2 , la variance sur la grandeur γ et en appliquant la relation de propagation de variance sur l'équation 6.37, il vient :

$$\sigma_{E_3}^2 = (a_E^n + \chi a_U^n)^2 \sigma_\chi^2 + (a_N^n - \eta a_U^n)^2 \sigma_\eta^2 + \chi^2 \sigma_{a_E^n}^2 + \eta^2 \sigma_{a_N^n}^2 + \frac{1}{4} (\chi^2 + \eta^2) \sigma_{a_U^n}^2.$$

En supposant que les angles de roulis η et de tangage χ sont déterminés avec la même incertitude, l'écart-type sur les mesures des angles d'attitude s'exprime par :

$$\sigma_\eta = \sigma_\chi = \sqrt{\frac{\sigma_{E_3}^2 - \left(\chi^2 \sigma_{a_E^n}^2 + \eta^2 \sigma_{a_N^n}^2 + \frac{1}{4} (\chi^2 + \eta^2) \sigma_{a_U^n}^2 \right)}{(a_E^n + \chi a_U^n)^2 \sigma_\chi^2 + (a_N^n - \eta a_U^n)^2 \sigma_\eta^2}}. \quad (6.38)$$

Ainsi, pour espérer restituer l'erreur de stabilisation à 1 mGal près ($\sigma_{E_3} = 1 \text{ mGal}$) à partir de mesures des accélérations horizontales de même incertitude ($\sigma_{a_E^n} = \sigma_{a_N^n} = 1 \text{ mGal}$) et de mesures de l'accélération verticale au 100^{e} de mGal ($\sigma_{a_U^n} = 0,01 \text{ mGal}$), faut-il mesurer les angles de roulis et tangage à $0,005^\circ$ près ($\sigma_\eta = \sigma_\chi = 0,005^\circ$).

Cette condition particulièrement sévère s'assouplit modérément pour un lever de moindre résolution spatiale (Fig. 6.11).

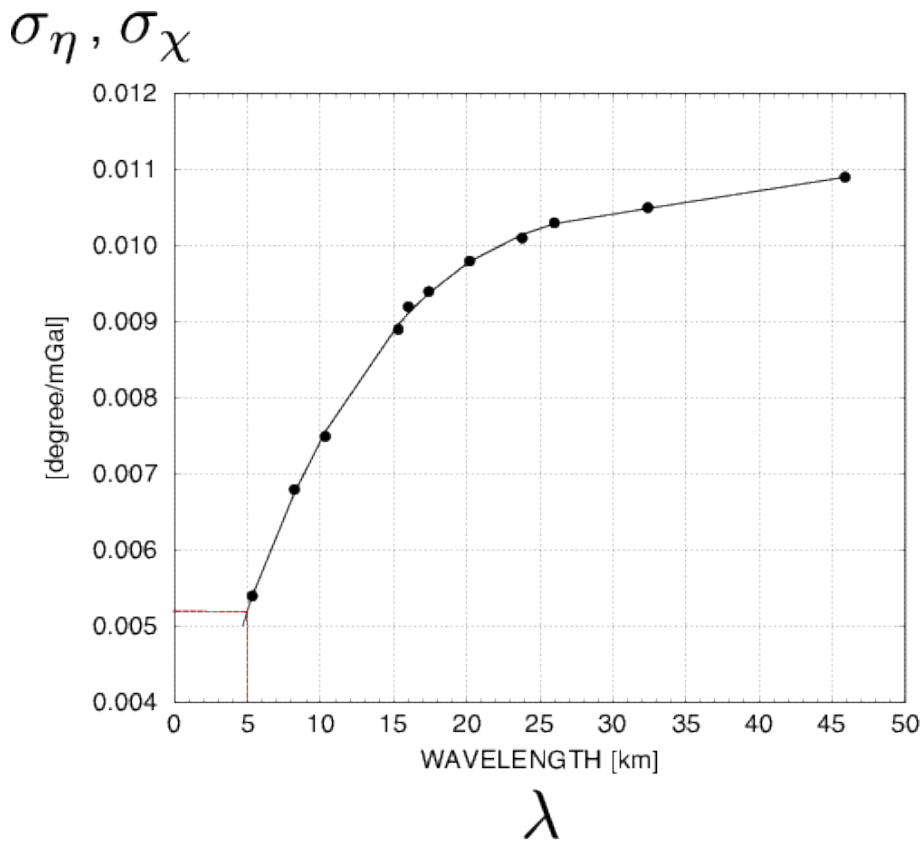


FIGURE 6.11 – Graphe de l'incertitude sur l'orientation (σ_η, σ_χ) du véhicule en fonction de la longueur d'onde du champ mesuré (λ) qui garantit une erreur de stabilisation de 1 mGal. Ce graphe confirme qu'une incertitude de 0,005° est nécessaire pour limiter l'erreur de stabilisation à 1 mGal pour une plus petite longueur d'onde spatiale restituée de 5 km. Cette condition s'assouplit modérément pour des levés de plus basse résolution.

D'après Verdun et Klingelé, 2005 (acl4).

Actuellement, les centrales d'attitude de grade « tactique » du domaine aérien, restituent l'attitude avec une incertitude de 0,05° en temps réel, ramenée à 0,02° après post-traitement des données¹. Si une telle centrale avait été utilisée pour la détermination de l'erreur de stabilisation (cf Éq. 6.37), lors du lever « Alpes 1998 », l'incertitude sur l'erreur de stabilisation aurait été de 4 mGal. Pour atteindre la même incertitude pour les longueurs d'onde supérieures à 5 km en utilisant les seules données GPS, nous avons montré que la détermination des lignes de base formées par les 5 antennes placées sur l'avion, devait être réalisée à 3 mm près (Fig. 6.12). Étant donné l'incertitude finale de l'anomalie de gravité déterminée à partir des données « Alpes 1998 », estimée à 7,7 mGal pour les longueurs d'onde supérieures à 16 km [Verdun et al., 2003 (acl5)], il est clair que la stabilisation mécanique du gravimètre aurait pu être avantageusement remplacée par une stabilisation « numérique » utilisant les données d'une centrale d'attitude de grade élevée, éventuellement combinées avec des données en provenance des récepteurs GPS.

1. Performances des systèmes inertiels de grade tactique de la série Ekinox™ commercialisées par la société ©SBG

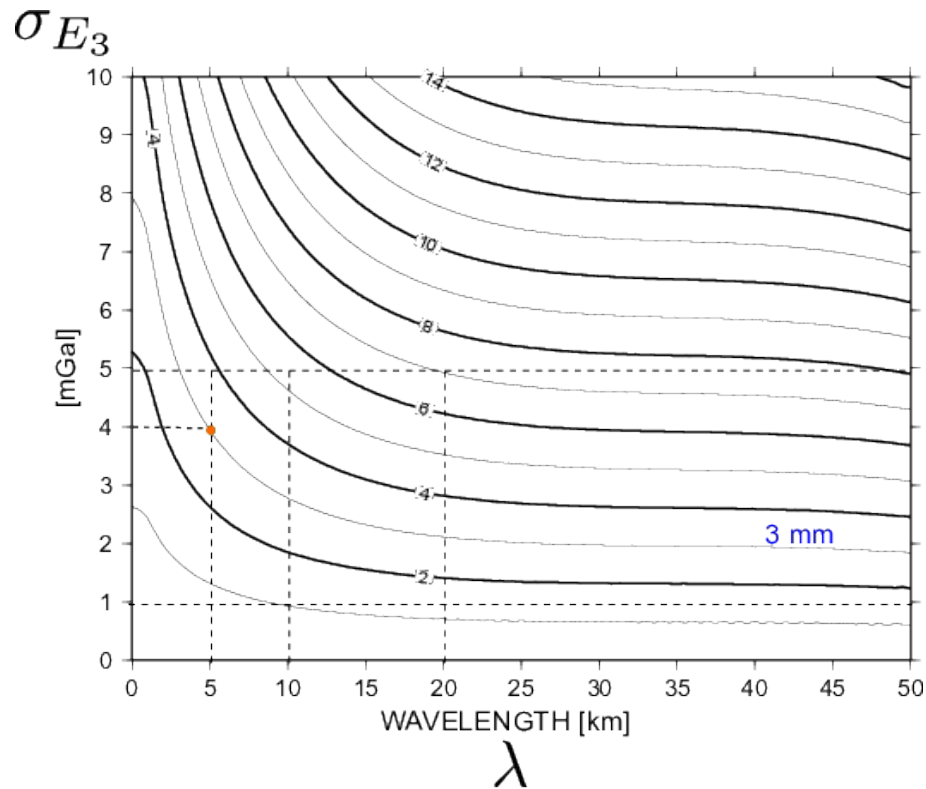


FIGURE 6.12 – Graphe donnant l’erreur de stabilisation σ_{E_3} en fonction de la longueur d’onde λ pour différentes incertitudes sur la détermination des lignes de bases formées par les antennes GPS. Cette incertitude est donnée en millimètre pour chaque courbe de l’erreur de stabilisation. Une erreur de stabilisation de 4 mGal pour les longueurs d’onde supérieures à 5 km nécessite une détermination des lignes de base sur l’avion à 3 mm près. Cette amplitude de l’erreur est théoriquement accessible en mesurant l’orientation du véhicule grâce à une centrale inertielle de haut grade.

D’après Verdun et Klingelé, 2005 (acl4).

Le principe précédemment évoqué est celui de la gravimétrie mobile inertielle de type « strapdown », illustrée par les dispositifs c. et d. (Fig. 6.6, p. 193). Dans cette configuration, le cœur du dispositif est un capteur d’accélération très sensible, à un axe en gravimétrie scalaire, ou à trois axes en gravimétrie vectorielle, rigidement fixé au véhicule porteur. La stabilisation numérique des données est alors assurée soit grâce au capteur d’une unité de mesure inertielle (Inertial Measurement Unit (IMU)) comprenant trois accéléromètres et trois gyromètres orthogonaux, soit par un système GNSS multi-antennes. Outre la simplification et l’allègement des systèmes de gravimétrie mobile comparés à leurs homologues à plate-forme stabilisée, les dispositifs « strapdown » pourraient profiter du développement des capteurs inertiels à semi-conducteur de type « Micromachined ElectroMechanical System (MEMS) », déjà largement implantés dans les systèmes inertiels de navigation, pour diminuer encore leur encombrement. Si les données acquises lors du lever « Alpes 1998 » ont montré la faisabilité de la stabilisation numérique pour la gravimétrie scalaire aéroportée, il reste à étudier le problème de l’estimation des autres erreurs systématiques (termes T_1 et T_2 donnés par les équations 6.30 (p. 191) et 6.31 (p. 192) respectivement) dans le cadre plus général de la gravimétrie vectorielle mobile. C’est ce que nous nous proposons d’aborder à présent.

6.1.4 Erreurs systématiques en gravimétrie mobile

L'une des premières questions cruciales à propos des erreurs systématiques de la gravimétrie mobile, concerne leurs amplitudes comparées à celles des signaux d'origine géophysique. Puisque ces erreurs dépendent du mouvement, elles diffèrent nécessairement suivant le type de porteur et les conditions du lever. Pour mettre en lumière ces différences d'amplitude, l'estimation d'une borne supérieure des erreurs systématiques a été menée pour quatre levers différents, dont les caractéristiques sont définies dans le tableau 6.1. La situation géographique des levers est montrée sur les figures 6.13 et 6.14.

Levers gravimétriques					
Lever	Type	Vitesse	Altitude	Capteur d'accélération	Positionnement
Alpes 1998	A	83 ms ⁻¹	5 100 m	scalaire, relatif, ®Micro-g	GNSS mode différentiel
Verdun et al., 2003 (acl5)					
Corse 2001	A	86 ms ⁻¹	300 m	scalaire, relatif, ®Micro-g	GNSS mode différentiel + centrale inertielle
DUQUENNE et al. (2002)					
S ^{te} -Maxime 2006	M	1,4 ms ⁻¹	0 m	Limo-g	GNSS mode différentiel + centrale inertielle
de Saint-Jean, 2008 (these4), De Saint-Jean et al., 2005 (acti6), Cali et al., 2007 (acti5)					
ESS-AUV 2012	SM	1,5 ms ⁻¹	-1 500m	–	Centrale inertielle + vélocimètre + liaison acoustique
©IFREMER					

TABLEAU 6.1 – Caractéristiques des levers utilisés pour l'estimation des erreurs systématiques en gravimétrie mobile (« A » = lever aérien, « M » = lever en mer, « SM » = lever sous-marin). Le système de gravimétrie mobile légère « Limo-g » utilisé dans la campagne « Sainte-Maxime 2006 » sera présenté plus en détail dans la section 6.3.



FIGURE 6.13 – Profils des campagnes de gravimétrie aérienne « Alpes 1998 » [Verdun et al., 2003 (acl5)] et « Corse 2001 » (DUQUENNE et al., 2002). Pour chaque campagne, ce sont les données de position et d'orientation acquises sur les profils P1, P2, P3 et P4 qui ont été utilisées pour l'étude des erreurs systématiques.

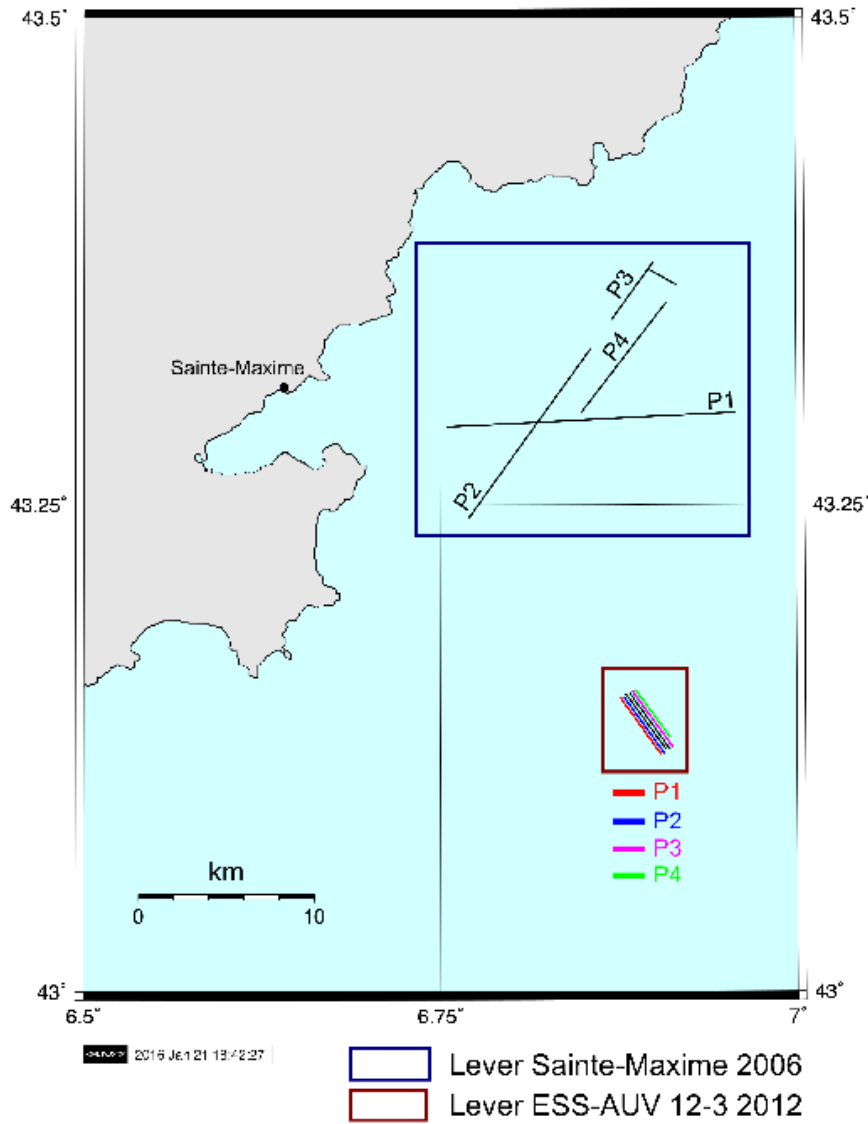


FIGURE 6.14 – Profils des campagnes de gravimétrie marine « Sainte-Maxime 2006 » et sous-marine « ESS-AUV 2012 ». À nouveau, ce sont les données de position et d’orientation acquises sur les profils P1, P2, P3 et P4 qui ont été utilisées pour l’étude des erreurs systématiques. La campagne de Sainte-Maxime a été réalisée dans le cadre de la thèse de De Saint-Jean, 2008 (these4) pour tester le système de gravimétrie mobile légère Limo-g. Le lever « ESS-AUV 2012 » est une campagne d’essai sous-marine réalisée par l’IFREMER à bord d’un sous-marin autonome (AUV).

Une étude théorique préalable, relatée dans l’annexe B (p. 405), montre que, quel que soit le lever, les amplitudes $\|T_1\|_2$ et $\|T_2\|_2$ des termes T_1 et T_2 respectivement, vérifient, à chaque instant :

$$\|T_1\|_2 \leq \underbrace{\omega_e^2 \|X_P^e\|_2 + 2\omega_e \|\dot{X}_P^e\|_2 + \|\ddot{X}_P^e\|_2}_{=M_1}; \quad (6.39)$$

$$\|T_2\|_2 \leq \underbrace{(\omega_{ib}^2 + \dot{\omega}_{ib}) \|L_\alpha^b\|_2}_{=M_2}, \quad (6.40)$$

où ω_e , ω_{ib} et $\dot{\omega}_{ib}$ désignent, respectivement, la vitesse angulaire de rotation de la Terre, ainsi que la vitesse et l’accélération angulaires de la rotation d’ensemble du véhicule porteur.

Le calcul des bornes supérieures M_1 et M_2 a été réalisé pour tous les profils des levers définis dans le tableau 6.1 (p. 202), à partir des données de position et d'orientation fournies par les systèmes de positionnement embarqués. Ce sont ensuite quatre profils par lever qui ont été sélectionnés pour illustrer les résultats (Figs. 6.13 et 6.14, pp. 203 et 204). Les graphes visibles sur les figures 6.15 (p. 206), 6.16 (p. 207), 6.17 (p. 208), 6.18 (p. 209), représentent des exemples d'évolution des termes M_1 et M_2 le long de profils acquis durant les levers. Afin d'évaluer la dispersion des valeurs de ces termes, l'histogramme des écarts entre les valeurs proprement dites et une tendance polynomiale ajustée sur l'ensemble du profil, est également représenté. La tendance polynomiale peut être considérée comme l'évolution moyenne de l'amplitude des erreurs systématiques le long de chaque profil. Tout écart à cette évolution moyenne est attribuable à des perturbations du mouvement du porteur, telles les turbulences atmosphériques sur un avion ou le clapotement sur un navire, auxquelles s'ajoute l'inévitable bruit de mesure.

L'examen attentif des graphes de l'évolution des termes M_1 et M_2 et des histogrammes des écarts d'amplitude au profil moyen, révèle la très grande incertitude avec laquelle les erreurs systématiques sont déterminées. Le tableau 6.2 indique pour chaque lever et chaque profil du lever considéré, constitué de N points, les intervalles de confiance à 95 % des écarts des erreurs systématiques au profil moyen. Les largeurs de ces intervalles s'échelonnent entre, environ 2 500 mGal pour le lever sous-marin « ESS-AUV 2012 » jusqu'à 42 000 mGal pour le lever aéroporté « Corse 2001 ».

Lever	Profil (N)	Terme M_1 (mGal)	Terme M_2 (mGal/m)
Alpes 1998	P1(4 300)	[−5929 ; +5929]	✓
	P2(3 860)	[−5815 ; +5815]	✓
	P3(1 820)	[−7 131 ; +7 131]	✓
	P4(1 410)	[−7 466 ; +7 466]	✓
Corse 2001	P1(2 022)	[−19 161 ; +19 161]	[−363 ; +363]
	P2(2 494)	[−20 863 ; +20 863]	[−435 ; +435]
	P3(3 093)	[−16 235 ; +16 235]	[−324 ; +324]
	P4(2 492)	[−15 481 ; +15 481]	[−326 ; +326]
Sainte-Maxime 2006	P1(4 343)	[−8 203 ; +8 203]	[−852 ; +852]
	P2(3 246)	[−10 954 ; +10 954]	[−801 ; +801]
	P3(1 055)	[−10 900 ; +10 900]	[−783 ; +783]
	P4(2 188)	[−9 499 ; +9 499]	[−586 ; +586]
ESS-AUV 2012	P1(2 241)	[−1 313 ; +1 313]	[−459 ; +459]
	P2(2 791)	[−1 371 ; +1 371]	[−466 ; +466]
	P3(2 781)	[−1 208 ; +1 208]	[−409 ; +409]
	P4(2 791)	[−1 317 ; +1 317]	[−461 ; +461]

TABLEAU 6.2 – Intervalles de confiance à 95 % de l'écart des termes M_1 et M_2 à leur profil moyen modélisé par une tendance polynomiale. Cet intervalle rend compte de la dispersion des valeurs de ces erreurs lorsqu'elles sont estimées à partir des mesures de position et d'orientation du porteur.

(a) Terme M_1 , borne supérieure de $\|T_1\|$.(b) Terme M_1 , borne supérieure de $\|T_1\|$.

FIGURE 6.15 – Graphes de l'évolution du terme M_1 sur les profils P1 (Fig. 6.15a) et P3 (Fig. 6.15b) de la campagne aéroportée « Alpes 1998 ». Les courbes des tendances polynomiales sont représentées en bleu. Les histogrammes représentés sur ces deux mêmes figures, montrent la distribution des écarts entre le terme M_1 et sa tendance polynomiale. Une approximation par une distribution gaussienne est également donnée, définie à partir de la moyenne μ et l'écart-type σ estimés.

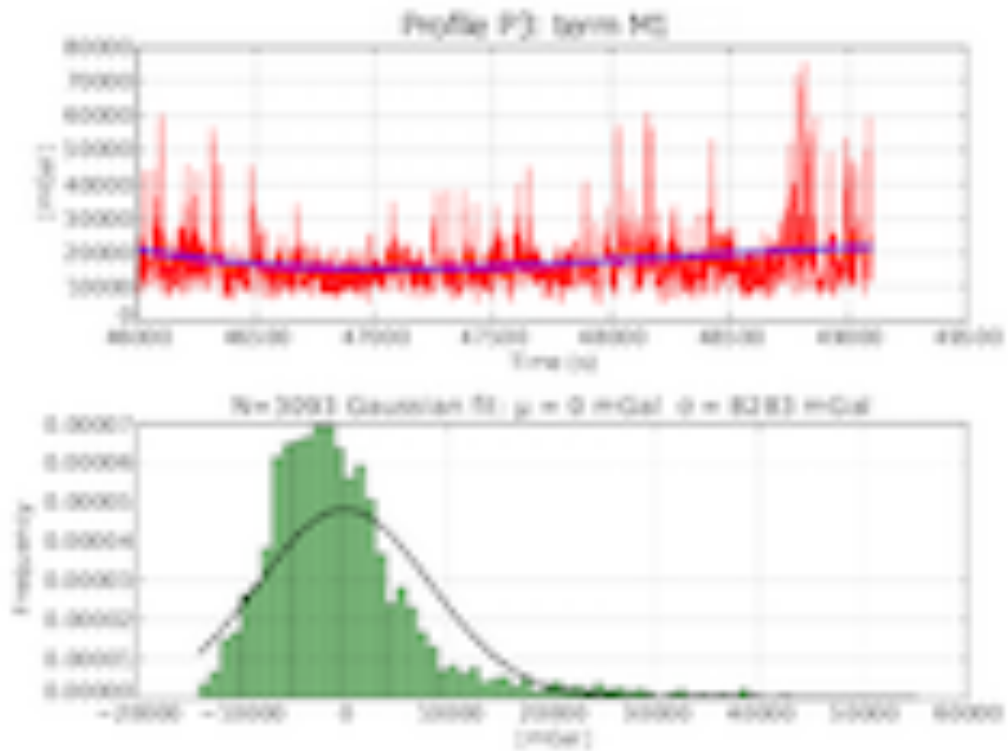
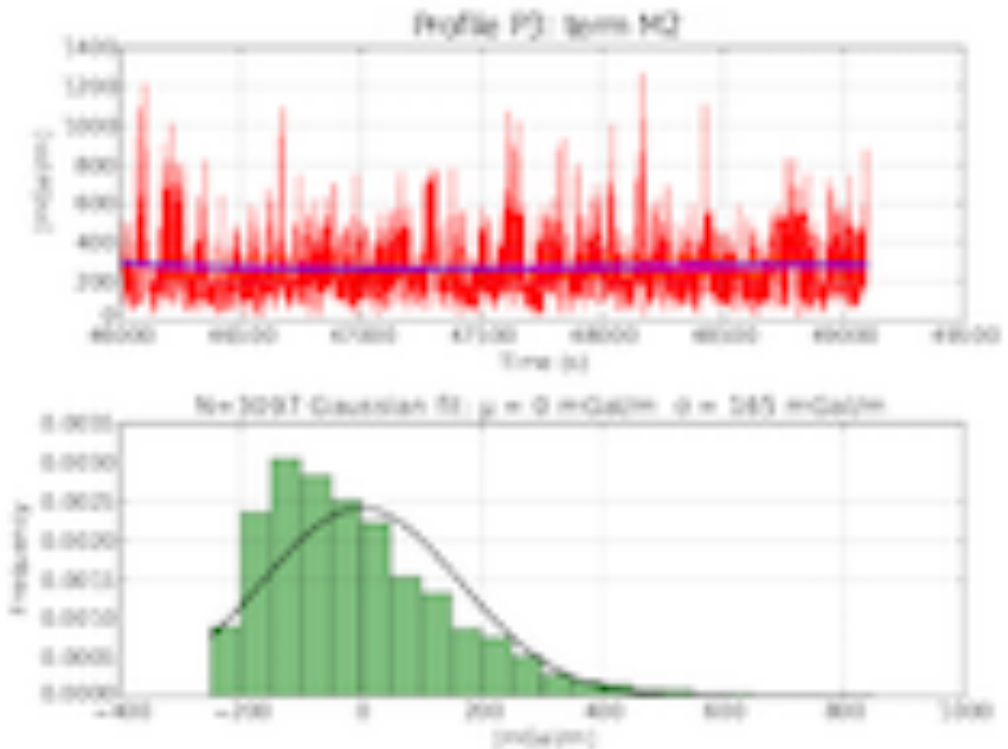
(a) Terme M_1 , borne supérieure de $\|T_1\|$.(b) Terme M_2 , borne supérieure de $\|T_1\|$.

FIGURE 6.16 – Graphes de l'évolution des termes M_1 (Fig. 6.16a) et M_2 (Fig. 6.16b), estimés le long du profil P3 de la campagne aéroportée « Corse 2001 ». Les courbes des tendances polynomiales sont représentées en bleu. Les histogrammes représentés sur ces deux mêmes figures, montrent la distribution des écarts entre les termes M_1 et M_2 et leurs tendances polynomiales. Une approximation par une distribution gaussienne est également donnée, définie à partir de la moyenne μ et l'écart-type σ estimés.

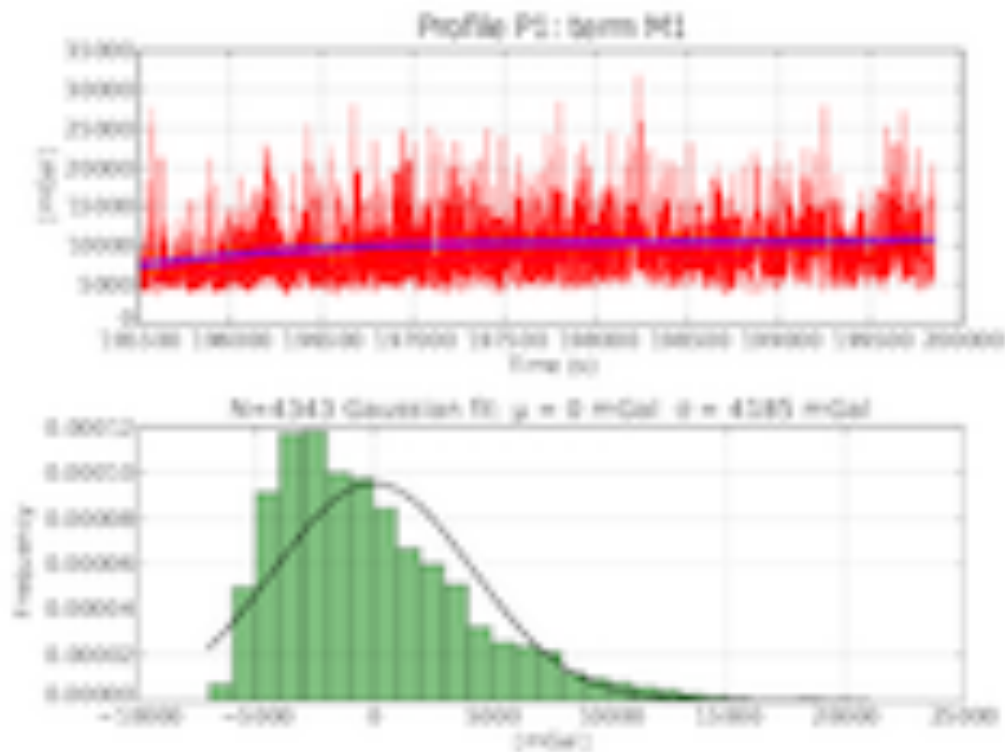
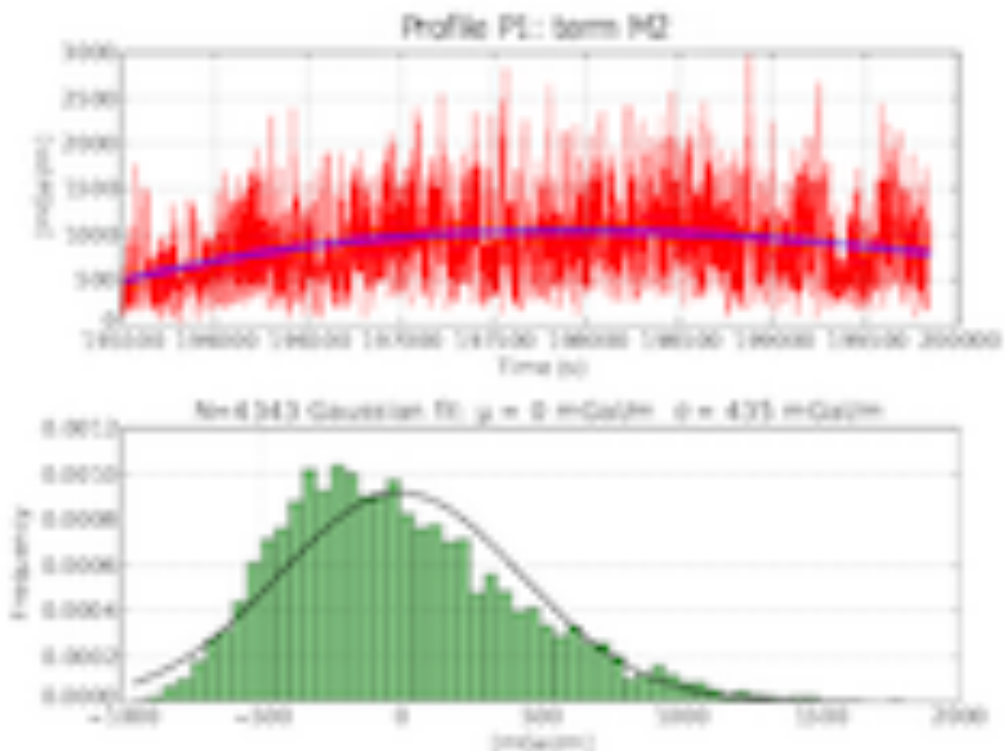
(a) Terme M_1 , borne supérieure de $\|T_1\|$.(b) Terme M_2 , borne supérieure de $\|T_1\|$.

FIGURE 6.17 – Graphes de l'évolution des termes M_1 (Fig. 6.17a) et M_2 (Fig. 6.17b), estimés le long du profil 1 de la campagne marine « Sainte-Maxime 2006 ». Les courbes des tendances polynomiales sont représentées en bleu. Les histogrammes représentés sur ces deux mêmes figures, montrent la distribution des écarts entre les termes M_1 et M_2 et leurs tendances polynomiales. Une approximation par une distribution gaussienne est également donnée, définie à partir de la moyenne μ et l'écart-type σ estimés.

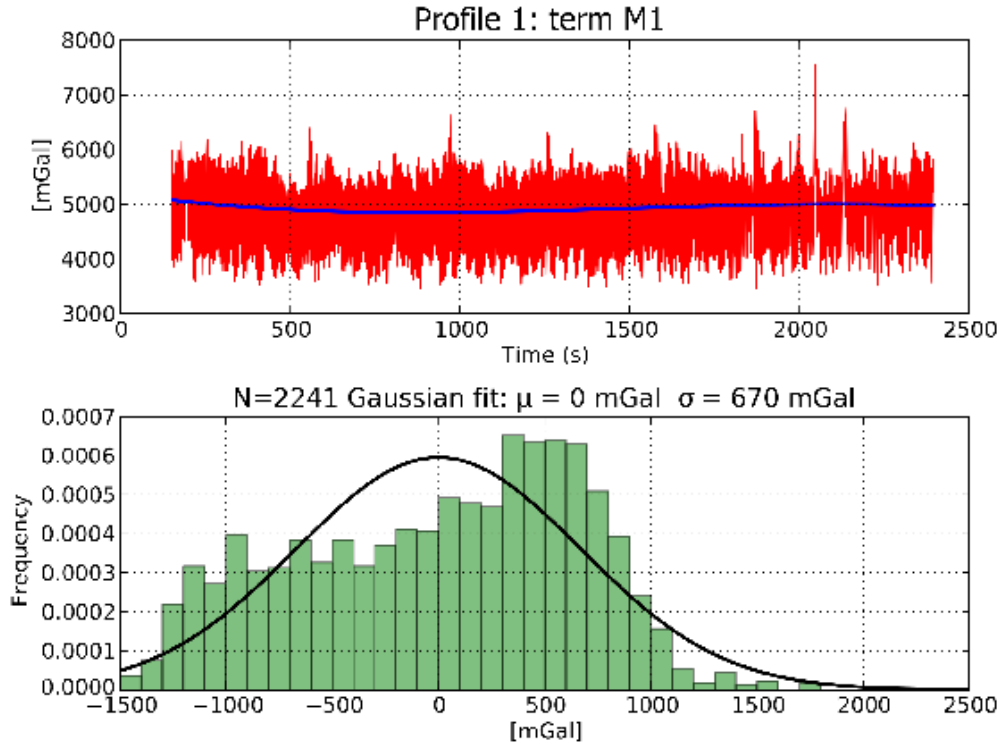
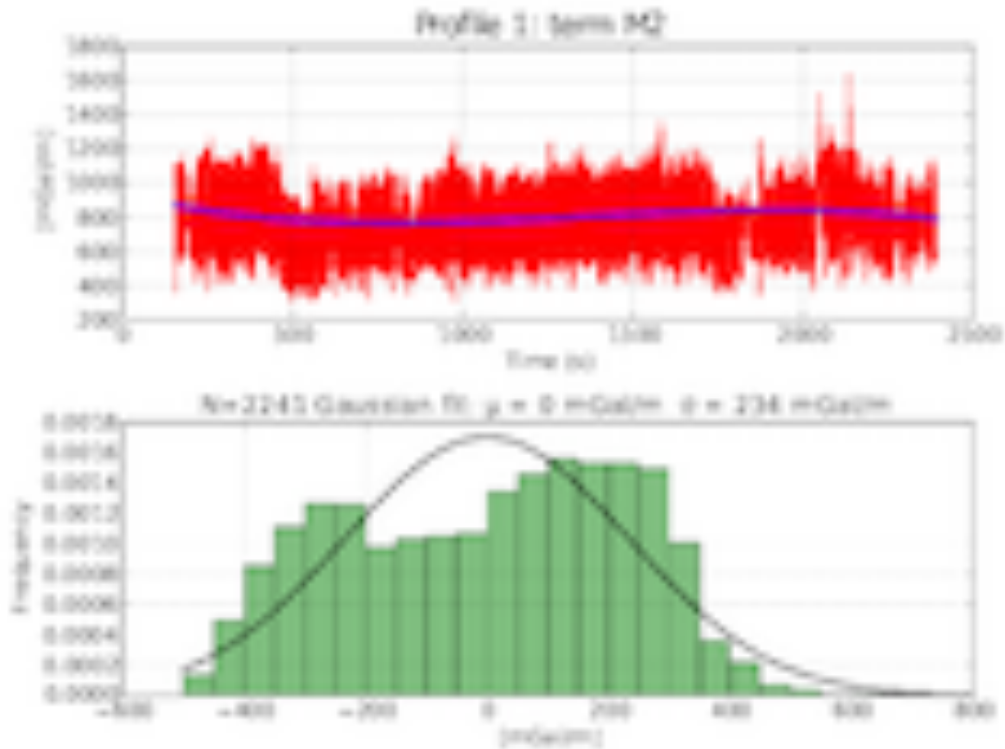
(a) Terme M_1 , borne supérieure de $\|T_1\|$.(b) Terme M_2 , borne supérieure de $\|T_2\|$.

FIGURE 6.18 – Graphes de l'évolution des termes M_1 (Fig. 6.18a) et M_2 (Fig. 6.18b), estimés le long du profil P1 de la campagne sous-marine « ESS-AUV 2012 ». Les courbes des tendances polynomiales sont représentées en bleu. Les histogrammes représentés sur ces deux mêmes figures, montrent la distribution des écarts entre les termes M_1 et M_2 et leurs tendances polynomiales. Une approximation par une distribution gaussienne est également donnée, définie à partir de la moyenne μ et l'écart-type σ estimés.

Ces résultats, confirmés par l'analyse de tous les autres profils, illustrent de façon patente, le très défavorable rapport signal sur bruit rencontré lors du traitement des données de gravimétrie mobile. Le terme « bruit » doit être ici entendu dans une acception assez large qui inclut, outre le bruit de mesure, toutes les perturbations du mouvement du porteur à l'origine d'accélération qui brouillent la détermination des erreurs systématiques sur les mesures gravimétriques. Un simple retrait des erreurs systématiques des mesures d'accélération issues du système gravimétrique (cf Éq. 6.33, p. 193), conduirait inévitablement à un brouillage de ces dernières. Il est clair qu'avec un tel niveau d'incertitude, l'estimation des erreurs systématiques apparaît comme le facteur limitant du traitement des données. Toute la complexité du traitement de données de gravimétrie mobile, consiste donc en la séparation des accélérations parasites d'origine cinématique et instrumentale, de l'accélération gravitationnelle. Avant de décrire plus en détail les méthodes de traitement qui permettent cette séparation, nous nous proposons d'examiner plus finement les erreurs aléatoires qui affectent les mesures de position et d'orientation d'un véhicule porteur.

6.1.5 L'imbroglia des erreurs aléatoires

La réalisation d'un bilan d'erreur exhaustif en gravimétrie mobile, est une tâche plutôt ardue. En premier lieu, nous avons vu précédemment (cf §6.1.4) que les erreurs systématiques sur les mesures d'accélération doivent être estimées à partir de données de position et d'orientation, elles-mêmes affectées d'erreurs aléatoires. En second lieu, les perturbations de mouvement subies par le porteur, induisent des accélérations parasites dont la distribution peut être elle-même aléatoire. La séparation des sources de bruit s'avère donc difficile, et ce d'autant plus que les gammes spectrales des bruits d'origine cinématique et instrumentale, ne sont pas nécessairement disjointes.

Malgré ces difficultés, il est possible de réaliser une analyse du bruit suivant une stratégie somme toute assez simple. Tout d'abord, le capteur gravimétrique, quelle que soit sa technologie, constitue avant tout un capteur d'accélération dont les caractéristiques peuvent être déterminées à partir d'un banc d'essais, qui comporte notamment des expériences statiques et dynamiques. Ensuite, les systèmes de positionnement et d'orientation sont, pour la plupart, des dispositifs multi-capteurs. Les données fournies résultent donc d'un processus de calcul qui repose sur des algorithmes de fusion multi-capteurs, lequel fournit également une erreur formelle associée à chaque donnée. Cette dernière s'interprète comme la barre d'erreur ultime qui intègre toutes les erreurs aléatoires associées aux mouvements du porteur et aux mesures des capteurs. Ainsi, en étudiant l'évolution de cette erreur formelle sur un profil, est-il possible de modéliser un bruit global qui tienne compte de tous les phénomènes aléatoires qui ont perturbé la détermination d'une grandeur donnée. Renoncer à modéliser séparément les sources du bruit, revient à envisager à la fois le porteur, le type de lever et les systèmes de positionnement et d'orientation embarqués dans leur globalité. Le modèle de bruit qui en résulte a donc valeur pour cet ensemble, et peut être intégré par la suite dans un processus de traitement des données gravimétriques. Cette démarche comporte l'avantage indéniable de rendre le choix des méthodes de traitement de données moins dépendants des technologies utilisées pour la mesure de la position et l'orientation du porteur.

Pour illustrer cette démarche sur un exemple simple, la figure 6.19 présente un graphe de l'écart-type d'Allan (ALLAN, 1966, TEHRANI, 1983) de trois capteurs d'accélération en fonction du temps d'intégration [Roussel et al., 2015 (act1)]. Dans un premier temps, l'analyse de ce graphe permet d'identifier la nature des bruits qui affectent le signal étudié, puis, dans

un deuxième temps, d'estimer les grandeurs caractéristiques du niveau de bruit. Les trois types de bruits identifiés sur ce graphe, bruit blanc, bruit de scintillation (« flicker noise ») et marche aléatoire, résultent de la combinaison de plusieurs phénomènes physiques tels les effets de température ou le bruit des composants électroniques. Point n'est besoin d'opérer une séparation plus fine des sources de bruit pour commencer à mettre en œuvre des méthodes de traitement, puisque ces dernières utilisent seulement la nature et le niveau comme seules caractéristiques d'un bruit.

L'analyse des graphes de l'écart-type d'Allan peut être menée, de la même façon, non plus seulement sur le signal d'un capteur mais sur celui issu d'un système intégré comprenant un processus de traitement. Le système intégré le plus emblématique des systèmes de leviers mobiles demeure la centrale inertielle de navigation couplée à un récepteur GNSS ou centrale inertielle « hybride ». Ce système fournit la position et l'attitude du véhicule porteur à partir de la combinaison optimale de données inertielles et GNSS qui peut être « serrée » ou « lâche », selon que les données intégrées dans la combinaison sont natives ou pré-traitées.

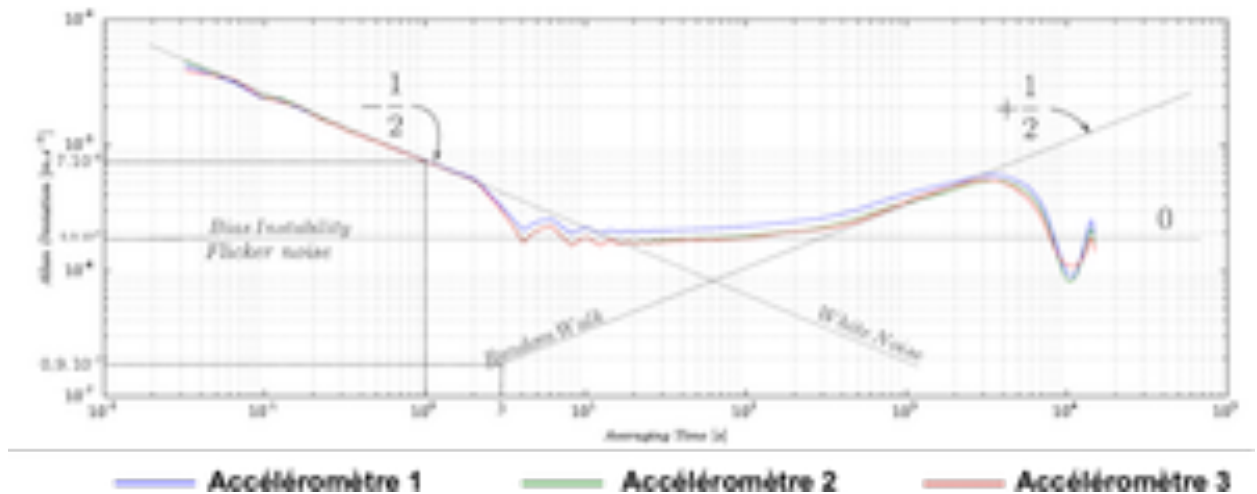


FIGURE 6.19 – Graphes de l'écart-type d'Allan de trois accéléromètres électrostatiques du type QA 3000™ de chez @Honeywell [Roussel et al., 2015 (acti1)]. L'analyse de ces graphes montre la présence de trois tendances linéaires de pentes $-1/2$, 0 et $+1/2$, qui caractérisent respectivement un bruit blanc, un bruit de scintillation et une marche aléatoire du premier ordre. Les valeurs remarquables pointées en ordonnées donnent une estimation des niveaux de bruit. Les graphes signalent également une remarquable similarité des trois accéléromètres du point de vue des bruits de sortie.

Le constructeur s'attache à évaluer la barre d'erreur finale en fonction des données en jeu et du mode de traitement (Tab. 6.3). En revanche, il est rare d'obtenir de lui une caractérisation des bruits et leurs niveaux respectifs, si bien qu'à défaut d'autre indication, le bruit de sortie est supposé blanc. Étant donné la complexité du bilan d'erreur pour les centrales inertielles hybrides, l'analyse de l'écart-type d'Allan est la méthode idoine pour quiconque souhaite obtenir une caractérisation des bruits d'un système à partir des seuls signaux de sortie.

Performances de la centrale inertielle PHINS™	
<i>Incertitude sur la position</i>	
Mode inertiel non assisté à 2 min./5 min.	3 m/20 m
Hybridation avec un récepteur GNSS	3 fois meilleure que celle obtenue avec le récepteur GNSS seul
Hybridation avec une liaison acoustique sous-marine ultra-courte/longue	3 fois meilleure que celle obtenue avec la liaison ultra-courte/longue seule
Hybridation avec un vélocimètre à effet Doppler	0,1 % de la distance parcourue
<i>Incertitude sur le cap</i>	
Hybridation avec un récepteur GNSS	$(0,01 / \cos \varphi)^\circ$ où φ désigne la latitude (Erreur Moyenne Quadratique (EMQ))
Hybridation avec une liaison acoustique ou un vélocimètre Doppler	$(0,02 / \cos \varphi)^\circ$ (EMQ)
<i>Incertitude sur le roulis et le tangage</i>	
Mode inertiel non assisté	0,01° (EMQ)
<i>Incertitude sur le pilonnement</i>	
Mode hybride complet	2,5 cm (EMQ)

TABLEAU 6.3 – Performances de la centrale inertielle PHINS™ commercialisée par @IXBLUE, extraites de sa fiche technique. Les incertitudes sur la position et les angles d'attitude sont représentées par une erreur absolue ou une erreur quadratique moyenne. Ces dernières s'affinent en passant du mode non assisté, où seules les données inertielles sont prises en compte, au mode hybride combinant les données issues d'autres capteurs tel un récepteur GNSS. Le post-traitement de données redondantes issues, par exemple, de la réoccupation de profils, permet également de diminuer l'incertitude de position et d'orientation. Les liaisons acoustiques sous-marines sont propres au positionnement des véhicules sous-marins. Elles peuvent être ultra-courtes (Ultra-Short BaseLine (USBL)) ou longues (Long BaseLine (LBL)). La présence d'un vélocimètre (ou « Doppler Velocity Log (DVL) ») améliore encore sensiblement la qualité du positionnement. Ce tableau indique également que l'incertitude qui affecte le cap dépend de la latitude et donc de la position du lever.

Droits réservés ©IXBLUE.

6.2 Estimation optimale de la gravité

6.2.1 Un problème de filtrage

Le problème du traitement des données en gravimétrie mobile revient finalement à extraire une accélération d'origine gravitationnelle à partir de mesures de grandeurs cinématiques – position, vitesse et accélération de rappel – et d'orientation – angles d'attitude – bruitées et redondantes. Quelle que soit la configuration instrumentale (Fig. 6.6, p. 193), l'équation 6.27 (p. 191) montre que l'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}_\alpha^n$ est liée aux grandeurs cinématiques et d'orientation par une relation *non linéaire implicite*, de la forme :

$$\mathbf{g}_\alpha^n - \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}, \quad (6.41)$$

où $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ et $\mathbf{T}_3$ sont définis respectivement par les équations 6.30 (p. 191), 6.31 (p. 192), 6.33 (p. 193), et $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.

Cette équation constitue en fait *l'équation d'observation* en chaque point de mesure, dans tout processus d'estimation de l'accélération gravitationnelle à partir de mesures issues d'un lever dynamique. Soient N le nombre total de points de mesure et n le nombre de mesures réalisées en chaque point. Si $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{Nn}$ désignent respectivement le vecteur des p paramètres recherchés – comprenant notamment les composantes de l'accélération gravitationnelle – et celui des Nn mesures disponibles, l'ensemble des N équations d'observation 6.41 peuvent se synthétiser en relation unique de la forme :

$$\mathcal{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{M}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{3N}}, \quad (6.42)$$

où $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^{3N}}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^{3N}$. La redondance des mesures se traduit ici par l'inégalité $3N > p$.

Malgré une apparente diversité, les méthodes numériques qui permettent la résolution d'un tel problème peuvent être classées dans la catégorie des méthodes de *filtrage*. Dans son acception commune, le filtrage consiste dans l'élimination de bruits qui affectent le signal utile. Une classification possible des méthodes de filtrage répartit ces dernières en trois catégories selon l'approche mise en œuvre pour la réduction du bruit, à savoir, lorsque le filtre :

1. opère une mise en forme du spectre du signal par élimination des gammes de fréquence qui concentrent le plus fort niveau de bruit;
2. réalise une estimation optimale des paramètres d'intérêt – en l'occurrence le vecteur $\mathbf{Y}$ – à partir de la minimisation d'une fonction-coût telle l'estimation par moindres carrés;
3. permet une élimination optimale du bruit à partir des propriétés statistiques du signal utile et des bruits de mesure.

Ces trois approches ont été étudiées dans le cadre de mes recherches sur le traitement des données de gravimétrie mobile (Tab. 6.4, p. 214 ci-après) et une synthèse des principaux résultats est proposée ci-après.

Approche	Paragraphe	Publications
1	§6.2.2	Verdun et al., 2002 (acl7) Verdun et al., 2003 (acl5)
2	§§6.2.3.1	Abassi et al., 2007 (acl3) Li et al., 2010 (acti3)
3	§§6.2.3.2 et §6.3.3	Cali et al., 2007 (acti5) Verdun et al., 2013 (acti2) Roussel et al., 2015 (acti1)

TABLEAU 6.4 – Récapitulatif des approches du filtrage utilisées en gravimétrie mobile.

6.2.2 Le classique filtrage passif

Le filtrage passif linéaire a été utilisé dans les tout premiers traitement de données en gravimétrie marine et aérienne, ses variantes étudiées dans une abondante littérature (entre autres exemples : ANNECCHIONE et al. (2006), BELL et al. (1999), CHILDERS et al. (1999), KLINGELÉ et al. (1997)), et encore aujourd'hui, il demeure présent dans tous les processus opérationnels de traitement de données mis en œuvre suite aux levers de gravimétrie mobile (HWANG et al., 2007, JORDAN et al., 2009, JUNG et al., 2013). Dans cette première approche, tout filtre linéaire se définit fondamentalement par sa *réponse en fréquence* qui donne précisément, pour chaque composante spectrale du signal, le facteur de pondération appliqué par le filtre. De nombreuses réalisations de filtre analogique émanent directement des techniques utilisées en électronique analogique et en radio-électricité – tels les filtres RC, de Butterworth, de Bessel, de Tchebychev –, si bien qu'il est assez aisé de concevoir un filtre linéaire qui respecte un gabarit donné, qu'il soit de type passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande. Il est également assez facile d'obtenir une réalisation numérique d'un filtre analogique utilisable avec des signaux échantillonnés. Plus précisément, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite des échantillons du signal étudié, l'expression de la suite des échantillons du signal filtré $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'obtient à partir de l'équation aux différences suivante :

$$\sum_{k=0}^p a_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^q b_k x_{n-k}, \quad \text{avec } a_0 = 1, \quad (6.43)$$

où a_k , $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et b_k , $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$ sont deux ensembles de coefficients qui définissent le filtre de façon univoque.

Une méthode de calcul des coefficients a_k et b_k à partir d'un gabarit de la réponse en fréquence est donné dans Verdun et al., 2002 (acl7). Le traitement de données consiste ensuite à l'application d'un ou plusieurs filtres numériques identiques à l'ensemble des mesures qui permettent de reconstituer les termes T_1 , T_2 et T_3 de l'équation 6.41. De ces traitements résultent une estimation de l'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}_\alpha^n$ dans laquelle les bruits ont été atténués. Ce filtrage s'opère donc point par point à partir de signaux régulièrement échantillonnés en temps. Il convient tout particulièrement au traitement de données acquises sur des profils habituellement rencontrés en gravimétrie marine et aéroportée.

Pour illustrer cette méthode de traitement, la figure 6.20 représente les graphes des réponses en fréquence du filtre exponentiel développé à l'occasion du lever aéroporté « Alpes 1998 » (Fig. 6.7, p. 195). Si f désigne la fréquence réduite², la réponse en fréquence $\mathcal{H}(f)$ d'un tel filtre s'exprime par :

$$\mathcal{H}(f) = e^{-af}, \quad (6.44)$$

où a est un coefficient de réglage du filtre (Tab. 6.5) lié à la vitesse de lever V (ms^{-1}), la fréquence d'échantillonnage F_S (Hz) et la résolution spatiale³ du lever $\mathcal{R}$ (m) par [Verdun et al., 2002 (acl7)] :

$$a = \frac{6F_S}{V} \mathcal{R}. \quad (6.45)$$

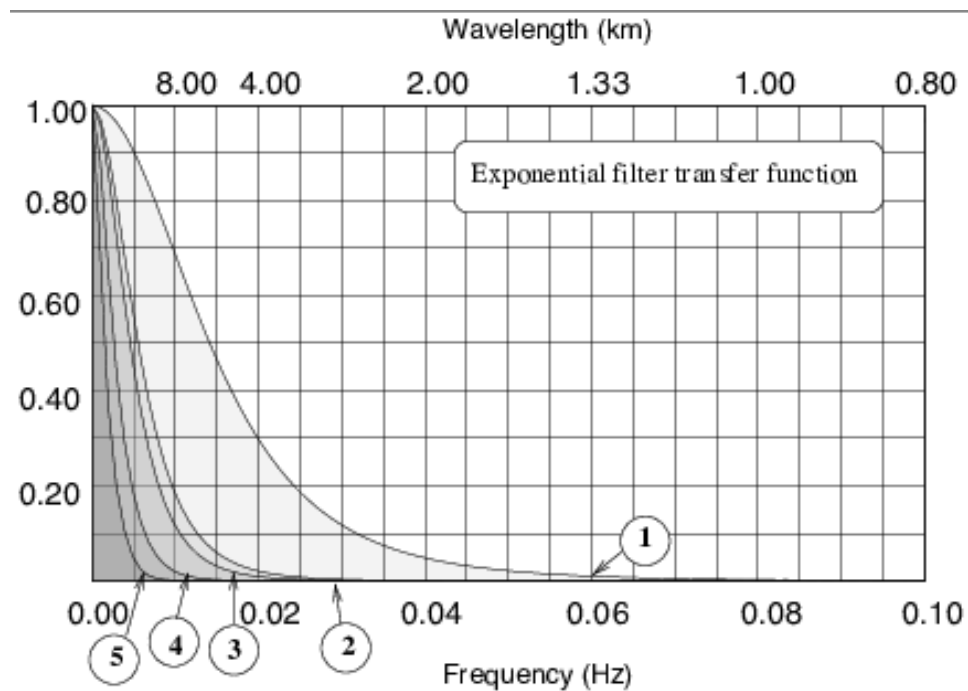


FIGURE 6.20 – Graphe des réponses en fréquence des filtres exponentiels mis au point pour le traitement des données du lever aérien « Alpes 1998 » [Verdun et al., 2002 (acl7)]. Il s'agit de filtres à réponse impulsionnelle infinie entièrement définis par les coefficients a_k et b_k de l'équation 6.43. Par exemple, les suites $a_{0,1,2,3} = \{1,000; -2,752; 2,522; -0,770\}$ et $b_{0,1,2} = 10^{-3} \{3,573; -6,309; 3,097\}$ définissent le filtre n°3 donnant une résolution finale de 3,1 km.

Filtre	1	2	3	4	5
Hauteur $h_{\text{éq}}$ (km)	1,0	2,5	3,0	8,0	16,0
Résolution (km)	1,1	2,6	3,1	5,2	8,4
Valeur de a	82,5	195,0	232,5	390,0	630,0

TABLEAU 6.5 – Propriétés des filtres exponentiels 1 à 5 dont les réponses en fréquence sont représentées sur la figure 6.20. L'application d'un filtre exponentiel sur une anomalie gravimétrique revient à en réaliser un prolongement vers le haut dont la hauteur $h_{\text{éq}}$ est d'autant plus haute que la bande passante du filtre est étroite, c'est-à-dire que la résolution est fine [Verdun et al., 2002 (acl7)].

2. La fréquence réduite est le rapport de la fréquence par la fréquence d'échantillonnage
3. Elle correspond à la moitié de la plus courte longueur d'onde restituée.

Les réponses numérotées de 1 à 5 correspondent à des filtres passe-bas dont la bande passante est de plus en plus étroite, ce qui revient à atténuer une bande de fréquences hautes de plus en plus large. En admettant que l'avion s'est déplacé à une vitesse quasiment constante – en l'occurrence 80 m/s pour le lever « Alpes 1998 » –, il est possible de traduire l'échelle des fréquences en une échelle de longueurs d'onde spatiales qui permet d'apprécier l'étendue de la coupure opérée par le filtre vers les courtes longueurs d'onde. Les trois cartes de l'anomalie de Bouguer (Fig. 6.22, p. 217) déduites des mesures aéroportées filtrées pour trois résolutions différentes montrent très clairement l'atténuation des structures due à l'application de filtres à bande passante de plus en plus étroite.

Le choix de la bande passante des filtres est une étape particulièrement cruciale dans le traitement des données gravimétriques aéroportées (Fig. 6.21). Un premier élément de réponse quantitatif repose sur le fait que le signal gravitationnel haute fréquence observable en vol correspond à l'effet de la topographie. Un calcul direct de cet effet à partir d'un M.N.T. à l'altitude de vol suivi de son analyse spectrale permet aisément de fixer la borne inférieure de la gamme de longueurs d'onde atteignables, étant entendu que la borne supérieure demeure naturellement limitée par l'extension du lever.

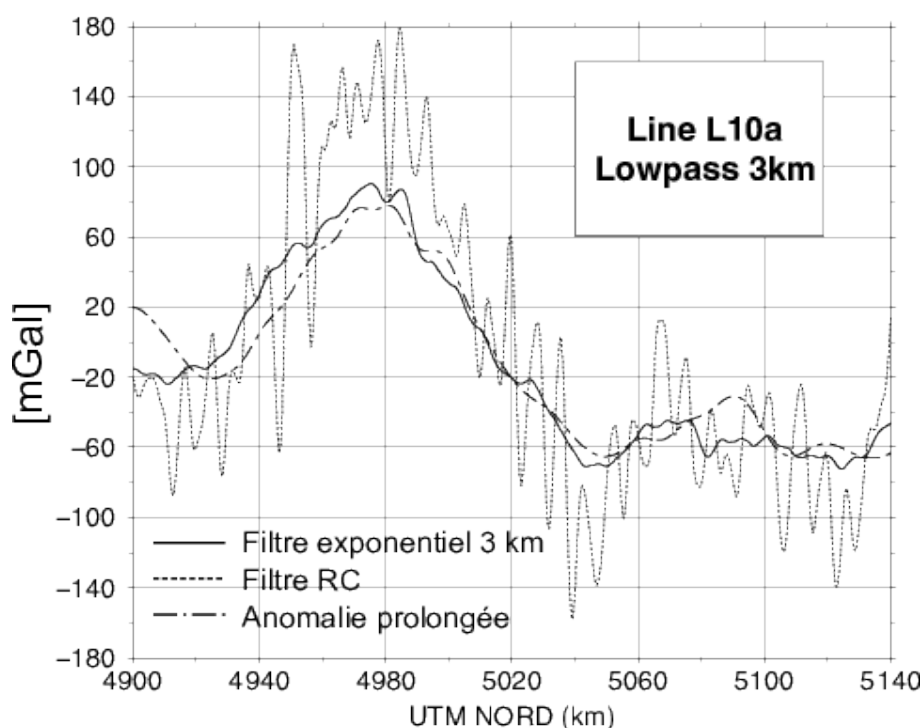


FIGURE 6.21 – Exemple de filtrage sur l'anomalie à l'air libre réalisé sur le profil L10 du lever « Alpes 1998 » à l'altitude de 5 270 m (cf 6.7, p. 195). Le filtre RC proposé par KLINGELÉ et al. (1997) n'est ici pas suffisamment sélectif, puisque l'anomalie résultante comporte des oscillations de courte période incompatibles avec les variations de l'anomalie sol prolongée à l'altitude de vol. Cette dernière ne doit pas être considérée comme une référence absolue de par la piètre restitution des courtes longueurs d'onde sur les cartes gravimétriques produites sur les régions montagneuses. En revanche, le domaine spectral de l'anomalie observable à cette altitude est assez bien respecté. C'est clairement le filtre exponentiel à 3 km de résolution qui restitue le mieux le spectre de l'anomalie à cette altitude.

D'après Verdun et al., 2002 (acl7).

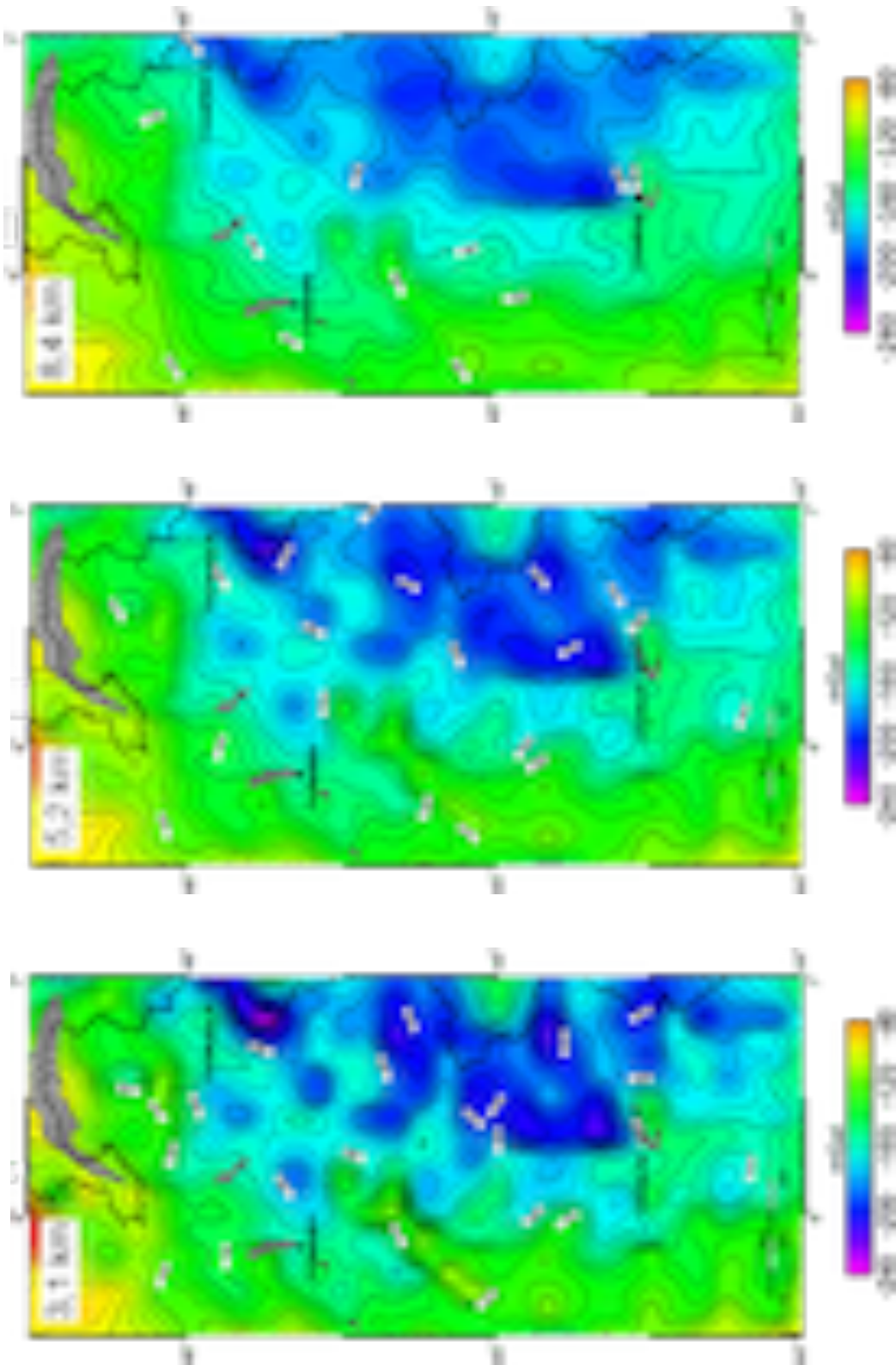


FIGURE 6.22 – Cartes de l'anomalie de Bouguer à l'altitude de 5 270 m établies à partir des données gravimétriques du lever aéroporté « Alpes 1998 » [Verdun et al., 2003 (ac15)] et calculées à différentes résolutions correspondant aux filtres n°3, 4 et 5 (Fig. 6.20 et Tab. 6.5) [Verdun, 2000 (ap7)]. La comparaison des cartes de gauche à droite permet d'apprécier le niveau d'atténuation des plus courtes longueurs d'onde lorsque la bande passante du filtre se rétrécit.

Un deuxième élément d'une importance capitale, consiste à tenir compte de la propre bande passante du capteur d'accélération qui opère fondamentalement comme un filtre passe-bas. L'effet d'un filtre dont la bande passante serait plus large que celle du capteur d'accélération serait alors quasi-nul. Considérons par exemple le gravimètre aérien/marin de ®Micro-g utilisé lors du lever « Alpes 1998 » (Fig. 6.23, p. 219). Le capteur de ce dernier est formé d'un fléau articulé qui porte la masse d'épreuve, suspendu à un ressort de longueur à vide nulle. Une fois le gravimètre stabilisé, il mesure une accélération de rappel a_U^n dans la direction U du repère de navigation n qui s'exprime, selon LACOSTE (1967), par :

$$a_U^n = (\ddot{B} + 2\mu\omega_0\dot{B} + \omega_0^2(1 - \varepsilon \|\ddot{\mathbf{X}}_h^e\|) B) - S - a_{\text{bas}}^n, \quad (6.46)$$

où S est la tension du ressort, a_{bas}^n , la valeur de référence de l'accélération gravitationnelle mesurée au point de départ, B , la position verticale du fléau, $\ddot{\mathbf{X}}_h^e$, la composante de l'accélération de l'avion dans la direction du fléau. Les quantités ω_0 , μ et ε sont des constantes liées à la fabrication du capteur. Le facteur sans dimension ε traduit un couplage entre l'accélération horizontale du porteur et le mouvement du fléau.

Dans ce cas précis, à partir de l'équation 6.41 projetée dans la direction U , il vient :

$$g_U^n = T_{1U} + T_{2U} - T_{3U} = T_{1U} + T_{2U} - a_U^n.$$

La relation qui donne l'accélération gravitationnelle g_U^n du capteur en négligeant le terme de bras de levier ($T_{2U} = 0$) s'écrit donc :

$$g_U^n = T_{1U} + S + a_{\text{bas}}^n - (\ddot{B} + 2\mu\omega_0\dot{B} + \omega_0^2(1 - \varepsilon \|\ddot{\mathbf{X}}_h^e\|) B), \quad (6.47)$$

où T_{1U} , composante du vecteur $\mathbf{T}_1$ dans la direction U , comprend les accélérations verticale, centrifuge et d'Eötvös.

Si le porteur est immobile à la surface de la Terre, alors le terme $S + a_{\text{bas}}^n$ est égale à g_U^n diminuée de l'accélération centrifuge. Le gravimètre mesure alors directement la pesanteur. En cas de mouvement, la tension du ressort contient, outre le terme de mouvement d'ensemble T_{1U} complet, une contribution liée au mouvement du fléau qui s'exprime comme une équation différentielle du second ordre en B . L'étude expérimentale des spectres des signaux a révélé que le support fréquentiel du spectre du terme T_{1U} , déduit des mesures GNSS, était beaucoup plus étendu que celui de la tension du ressort S (Fig. 6.24, p. 220), ce qui signifie qu'une part non négligeable des composantes spectrales du signal T_{1U} sont hors de la bande passante du gravimètre. Par conséquent, l'équation 6.47 écrite pour les quantités préalablement filtrées à l'aide d'un filtre passe-bas dont la bande passante reproduirait celle du spectre de la tension S , ne doit plus contenir que les termes au contenu fréquentiel comparable à celui de S .

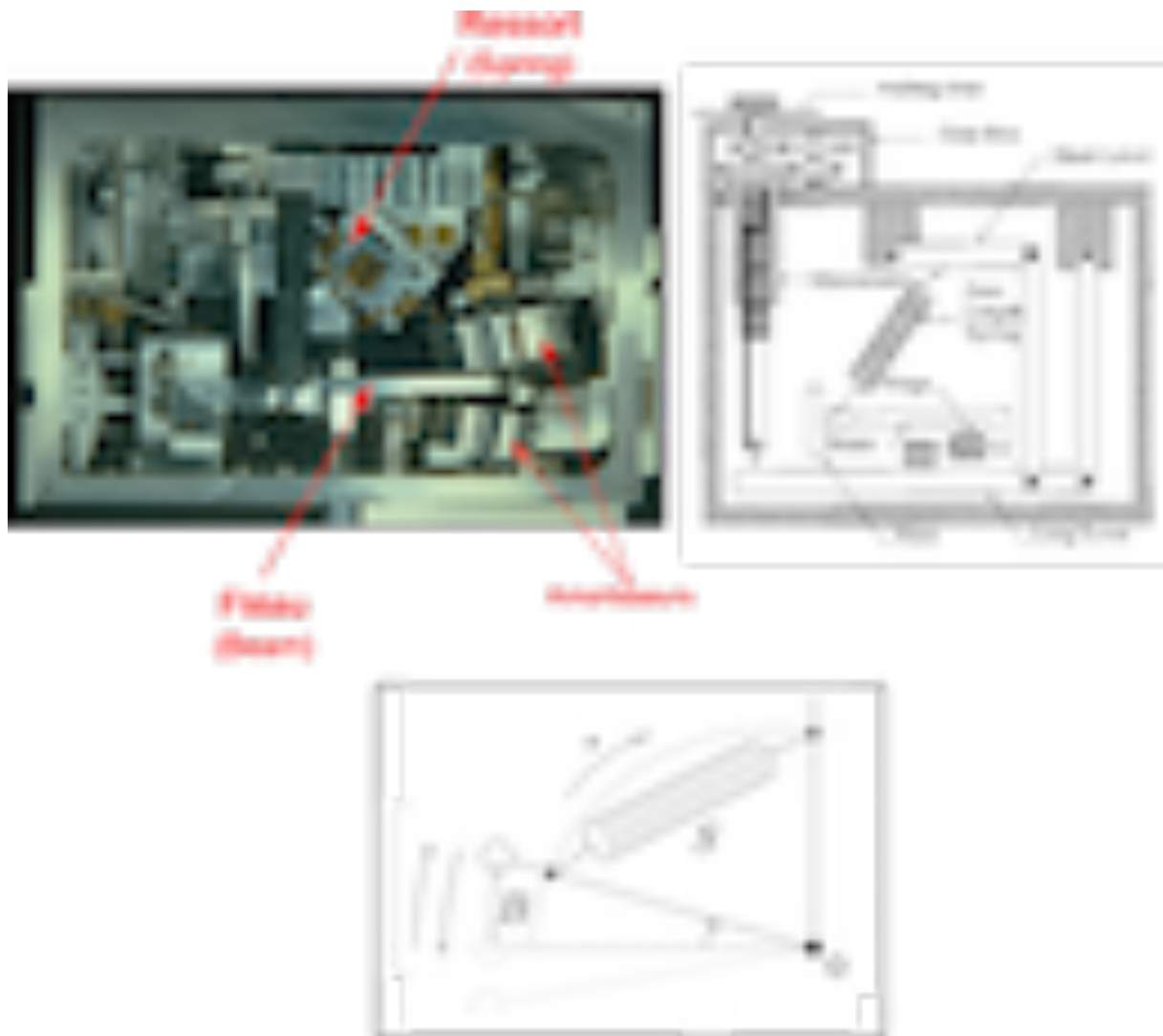


FIGURE 6.23 – Vues en coupe du capteur implanté sur le gravimètre aérien/marin SATM commercialisé par ©Micro-g LaCoste. La sensibilité de ce peson à ressort est particulièrement élevée de par l'utilisation d'un ressort incliné, de longueur à vide nulle [Verdun, 2000 (ap7)]. La tension du ressort S et la position du fléau B sont des grandeurs fondamentales de l'équation d'observation 6.46 qui sont numérisées et enregistrées par le gravimètre (LACOSTE, 1967). Un système d'amortisseurs permet d'arrêter les oscillations du peson pour stabiliser la mesure.

Droits réservés ©Micro-g LaCoste et VALLIANT (1991).

En notant $\overline{B}$, $\overline{S}$, $\overline{\ddot{X}_h^e}$ les versions filtrées respectives des signaux B , S et $\ddot{X}_h^e$, l'étude expérimentale des spectres a montré que :

$$\varepsilon \left\| \overline{\ddot{X}_h^e} \right\| \ll 1.$$

Une fois simplifiée, l'équation 6.47 s'écrit :

$$\ddot{\overline{B}} + 2\mu\omega_0\dot{\overline{B}} + \omega_0^2\overline{B} = \overline{T_{1U}} + \overline{S} + a_{\text{bas}}^n - \overline{g_U^n}. \quad (6.48)$$

Cette dernière montre que le fléau se comporte comme un oscillateur amorti, de pulsation propre ω_0 , de coefficient d'amortissement μ qui serait forcé par le terme $\overline{T_{1U}} + \overline{S} + a_{\text{bas}}^n - \overline{g_U^n}$. Un forçage significatif conduisant à des valeurs non négligeables de B suppose que le spectre du terme de forçage se situe au voisinage de la fréquence de résonance $\omega_0/2\pi$ de l'oscillateur. Cette fréquence s'est révélée beaucoup trop haute comparée aux fréquences des signaux gravitationnels mesurables à l'altitude de lever alpin (Fig 6.25). Ainsi, pour ce lever à haute altitude, le gravimètre de @Micro-g opère-t-il un filtrage naturel des accélérations qui préserve l'essentiel des signaux géophysiques mesurables à cette altitude. La grande leçon à tirer de cette expérience est que le réglage d'un filtre adapté à un lever gravimétrique doit nécessairement prendre en compte les conditions de lever et la réponse fréquentielle du capteur d'accélération.

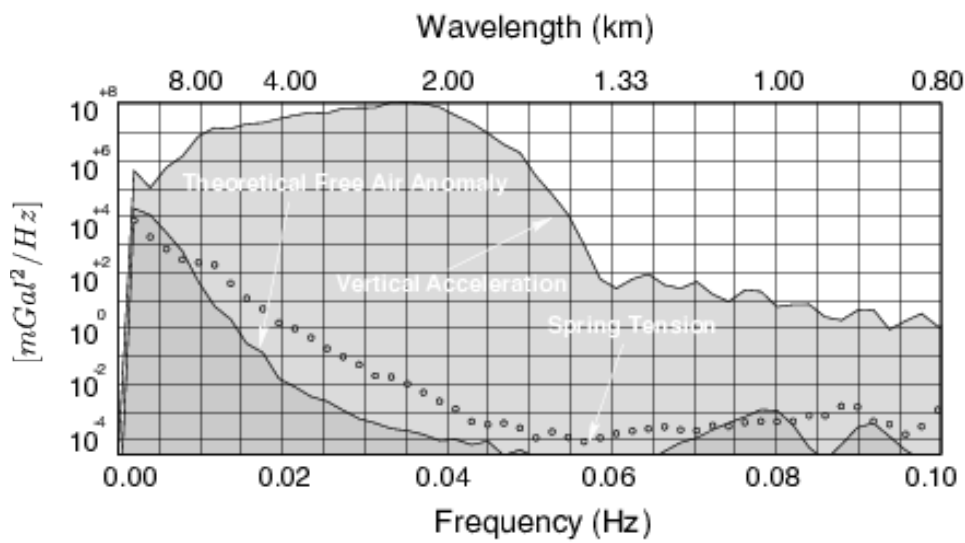


FIGURE 6.24 – Spectres de la tension du ressort S diminuée de sa valeur statique, de l'accélération verticale et de l'anomalie à l'air libre déduite des mesures réalisées au sol par prolongement vers le haut. Toutes ces grandeurs ont été mesurées sur le profil L10 du lever « Alpes 1998 ». L'accélération verticale est un terme prépondérant de la quantité T_{1U} . Cette figure montre très clairement que la bande passante de la tension du ressort est bien plus étroite que celle de l'accélération verticale, de sorte que le gravimètre opère naturellement un filtrage des hautes fréquences. Cette bande passante apparaît par ailleurs légèrement moins étendue que celle de l'anomalie à l'air libre déduite d'un prolongement vers le haut. Il faut donc admettre que ce type d'instrument atténue irrémédiablement le signal géophysique observable le long du profil.

D'après Verdun et al., 2002 (acl7).

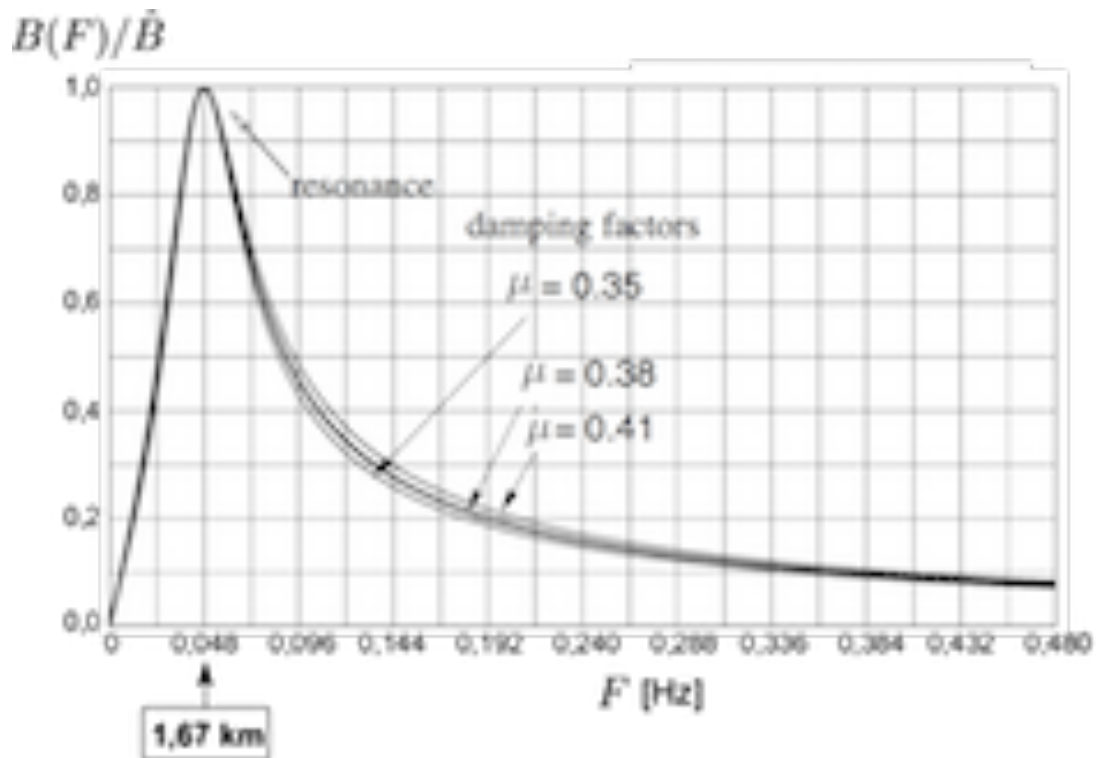


FIGURE 6.25 – Réponse en fréquence du fléau déduit de l'équation 6.48 après identification des paramètres caractéristiques du capteur (pulsation propre ω_0 et coefficient d'amortissement μ). Le terme $B(F)$ désigne l'amplitude de la réponse à une excitation sinusoïdale de fréquence F ; $\hat{B}$ correspond à l'amplitude maximale de cette réponse. Le rapport $B(F)/\hat{B}$ est maximum pour une fréquence de 0,048 Hz, qui correspond à une longueur d'onde mesurée de 1,67 km. D'après le spectre de la tension du ressort représenté sur la figure 6.24, il est clair que la fréquence de résonance à 0,048 Hz supérieure à la plus haute fréquence atteignable par le gravimètre. L'excitation du fléau s'avère inopérante dans la bande passante du gravimètre, si bien que l'amplitude de ses oscillations demeure négligeable.

D'après Verdun et al., 2002 (acl7).

Le choix d'un filtre aurait pu également être conditionné par l'optimisation d'un critère mêlant la qualité du lever à sa résolution spatiale. La qualité du lever peut être estimée de deux façons différentes en évaluant :

1. soit l'incertitude de mesure qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à l'accélération gravitationnelle;
2. soit l'erreur de mesure qui caractérise les différences entre les valeurs mesurées de l'accélération gravitationnelle et des valeurs de référence.

L'incertitude de mesure s'obtient, par exemple, à partir de la distribution des écarts aux points de croisement des profils de mesure, comme réalisé lors du lever «Alpes 1998» (Fig. 6.26).

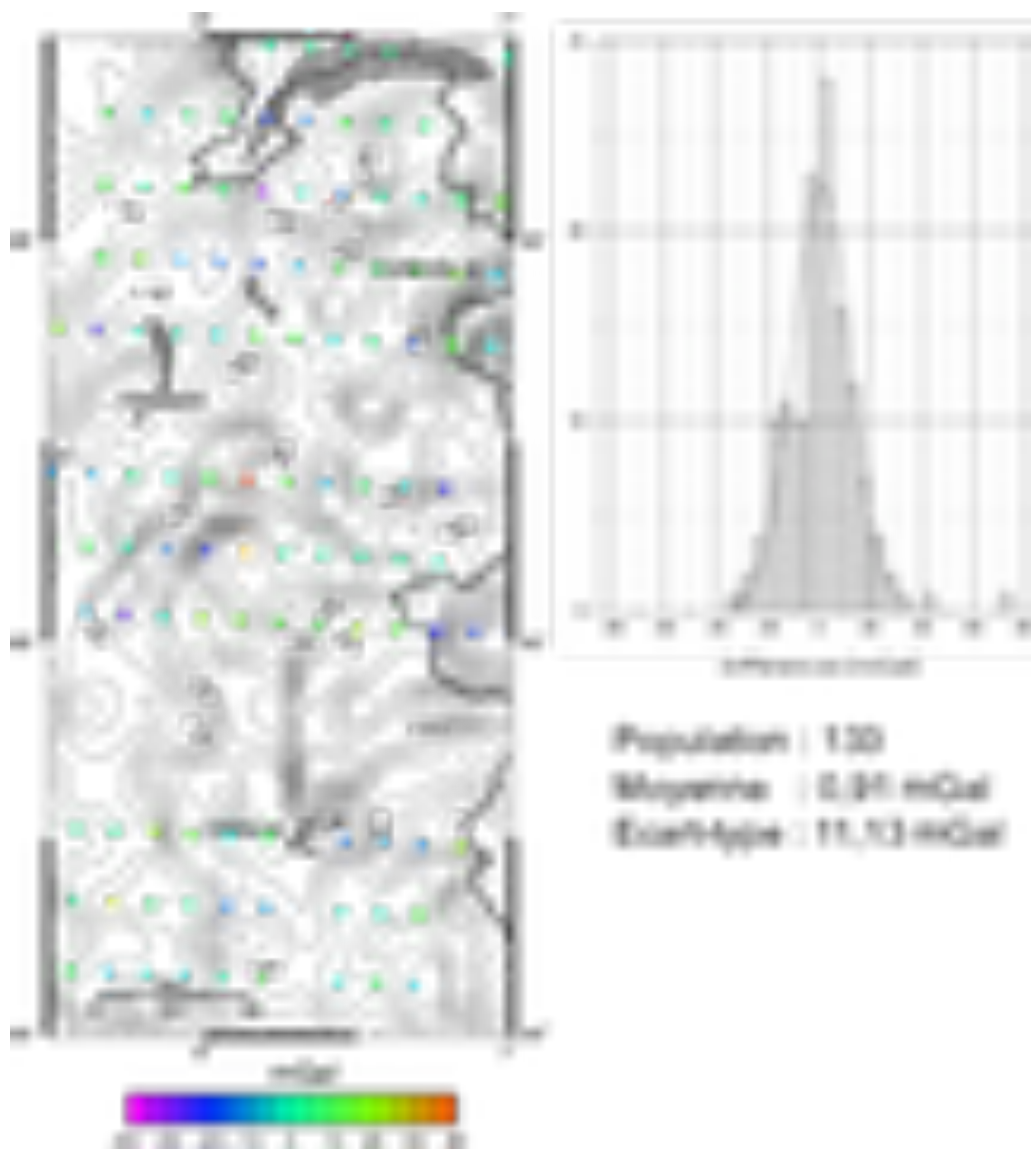
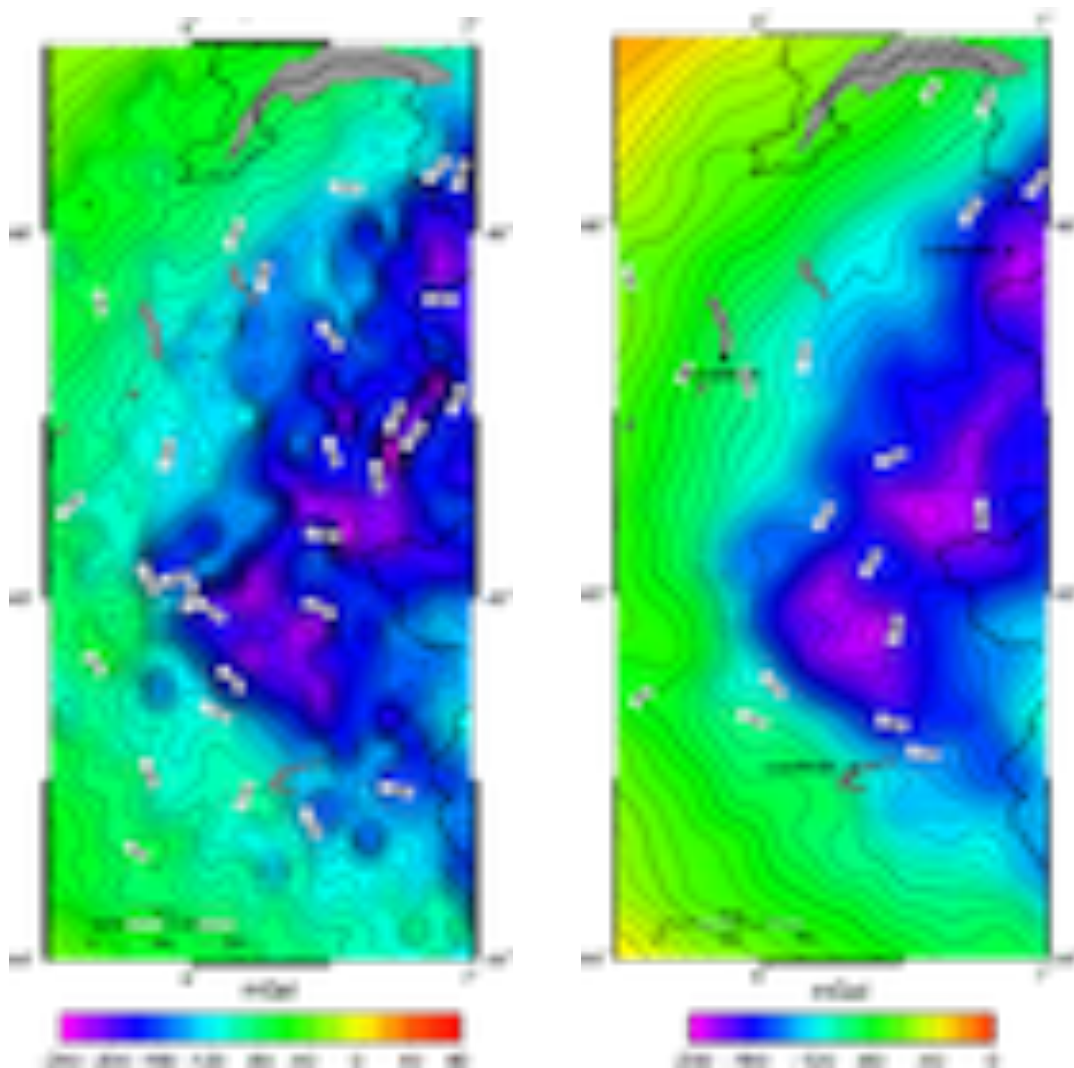


FIGURE 6.26 – Carte des écarts aux points de croisement dont l'étude statistique permet de d'évaluer l'incertitude de mesure du lever gravimétrique aérien. Chaque profil a été corrigé d'un biais et d'une tendance linéaire. Les écarts cartographiés ici sont ceux obtenus après application d'une procédure de minimisation globale des différences lignes/traverses (MITTAL, 1984). La résolution spatiale de la carte est de 5,4 km (Tab. 6.5, p. 6.5).

D'après Verdun, 2000 (ap7).

Les données de référence nécessaires à l'évaluation de l'erreur de mesure, peuvent prendre la forme de profils d'étalonnage ou bien être constituées de valeurs issues de modèles de géopotential complétées, le cas échéant, par des mesures complémentaires ramenées à la hauteur d'acquisition (Fig. 6.27).



(a) Anomalie de Bouguer déduite des mesures gravimétriques au sol.

D'après Masson et al., 1999 (acl8).

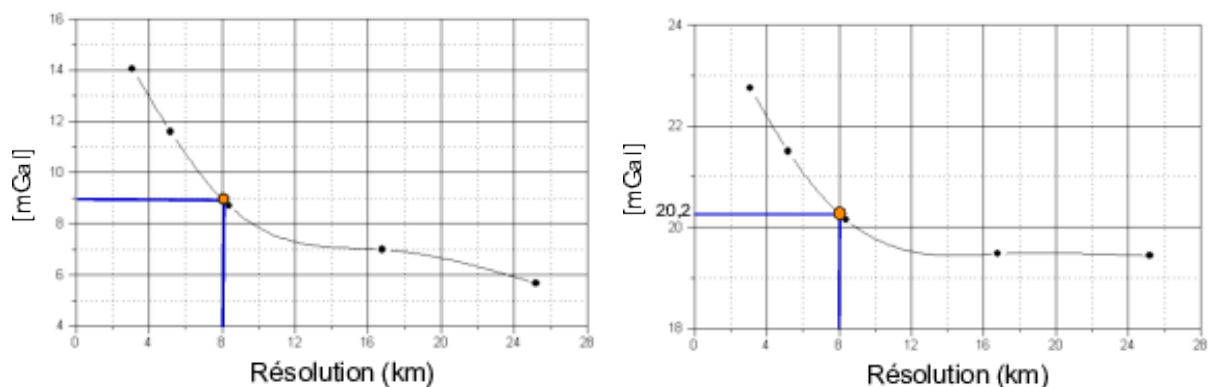
(b) Anomalie de Bouguer après prolongement vers le haut à 5 270 m d'altitude.

D'après Verdun, 2000 (ap7).

FIGURE 6.27 – Exemple de production des données gravimétriques de référence (Fig. 6.27b) par prolongement vers le haut de données gravimétriques acquises au sol (Fig. 6.27a). Ce type de production suppose une très bonne couverture au sol, ce qui fut le cas pour le lever « Alpes 1998 ». La constitution d'une zone d'étalonnage au voisinage de la région du lever, est un préalable indispensable en vue de l'estimation de l'erreur de mesure.

D'une manière générale, l'incertitude et l'erreur de mesure croissent de façon monotone lorsque la résolution s'affine (Figs. 6.28a et 6.28b) de sorte que le choix d'une bande passante adaptée repose sur un compromis dicté par les applications envisagées.

En fin de compte, la démarche mise en œuvre revient à régler un filtre passif de mise en forme de spectre, de sorte que l'atténuation du bruit de mesure soit la plus optimale possible et altère modérément le signal géophysique. De ce constat est né l'intérêt suscité par les méthodes de filtrage optimal pour le traitement des données de gravimétrie mobile. Ce changement de paradigme permet, comme nous allons le voir, une approche plus rationnelle de l'extraction des signaux géophysiques des mesures de gravimétrie mobile, notamment de par la prise en compte de propriétés statistiques des signaux.



(a) Évolution de l'incertitude de mesure pour le lever « Alpes 1998 » en fonction de la résolution spatiale de l'anomalie produite.

(b) Évolution de l'erreur de mesure pour le lever « Alpes 1998 » en fonction de la résolution spatiale de l'anomalie produite.

FIGURE 6.28 – Les graphes ci-dessus représentent respectivement l'évolution de l'incertitude de mesure (Fig. 6.28a) et l'erreur de mesure (Fig. 6.28b) pour le lever « Alpes 1998 ». Ces dernières ont été obtenues à partir de l'étude statistique des écarts aux points de croisement et des écarts à la référence pour différents filtrages à résolution de plus en plus fine. Ces graphes montrent, par exemple, qu'avec une résolution spatiale de 8 km, l'incertitude et l'erreur de mesure atteignent respectivement 9,0 mGal et 20,2 mGal. Indéniablement, la production d'une carte d'anomalie à haute résolution se réalise aux dépens de l'incertitude et l'erreur de mesure. *D'après Verdun, 2000 (ap7).*

6.2.3 Le puissant filtrage optimal

6.2.3.1 Approche globale

6.2.3.1.1 Cas de la gravimétrie scalaire

L'idée fondamentale de cette approche a été développée originellement dans Abassi, 2006 (these5) pour les données du lever « Alpes 1998 », et ses résultats publiés dans Abassi et al., 2007 (acl3). Revenons à l'équation d'observation 6.47 (p. 218) du gravimètre aérien/marin écrite sous une forme légèrement différente, à savoir :

$$\ddot{B} + 2\mu\omega_0\dot{B} + \omega_0^2 B = T_{1U} + S + a_{\text{bas}}^n + CC - g_U^n, \quad (6.49)$$

où la grandeur $CC = \omega_0^2 \varepsilon \|\ddot{\mathbf{X}}_h^e\|$, homogène à une accélération, désigne le terme de *couplage transverse* ou « cross-coupling ». Le terme de couplage transverse CC fait partie des observables numérisées et enregistrées par le système gravimétrique.

Ainsi écrite, l'équation 6.49 décrit le mouvement du fléau, c'est-à-dire l'évolution de la grandeur B , comme celui d'un oscillateur amorti dont le terme de forçage contient l'accélération gravitationnelle recherchée g_U^n . En suivant une méthode décrite notamment dans ZWILLINGER (1998), il est possible d'exprimer analytiquement la solution en B de l'équation 6.49 en fonction du terme de forçage. Soient t_a et t_b les instants respectifs de début et de fin des mesures, la relation qui permet d'exprimer la quantité B , solution de 6.49, à un instant $t \in [t_a; t_b]$ quelconque s'écrit :

$$B(t) = \tilde{B}(t) + \int_{t_a}^{t_b} H(t, \tau) B(\tau) d\tau, \quad (6.50)$$

où les termes $\tilde{B}(t)$ et $H(t, \tau)$ sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t) = & B(t_a) + \int_{t_a}^{t_b} \Theta(t, \tau) (t - \tau) [T_{1U}(\tau) + S(\tau) + a_{\text{bas}}^n + CC(\tau) - g_U^n(\tau)] d\tau \\ & + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} \left[B(t_b) - B(t_a) - \int_{t_a}^{t_b} (t_b - \tau) [T_{1U}(\tau) + S(\tau) + a_{\text{bas}}^n + CC(\tau) - g_U^n(\tau)] d\tau \right], \\ \text{avec} \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\Theta(t, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_a \leq \tau \leq t, \\ 0 & \text{si } t < \tau \leq t_b, \end{cases} \quad (6.52)$$

et

$$H(t, \tau) = \begin{cases} \frac{t - t_b}{t_b - t_a} [2\mu\omega_0 + \omega_0^2(t_a - \tau)] & \text{si } t > \tau, \\ \frac{t - t_a}{t_b - t_a} [2\mu\omega_0 + \omega_0^2(t_b - \tau)] & \text{si } t < \tau. \end{cases} \quad (6.53)$$

Étant donné que tout lever de gravimétrie mobile est d'extension limitée, le spectre des effets gravitationnels observables possède une limite de basse fréquence (resp. de grande longueur d'onde) en deçà de laquelle aucun effet gravitationnel ne peut être restitué. En considérant un lever dont l'extension spatiale serait de $\Delta^\circ \times \Delta^\circ$, le plus bas degré harmonique réputé observable $L_{\min}$ égale $180^\circ / \Delta$, ce qui donnerait, par exemple, $L_{\min} = 45$ pour un lever de $4^\circ \times 4^\circ$.

L'accélération gravitationnelle g_U^n peut donc se décomposer en deux contributions gravitationnelles aux spectres disjoints :

$$g_U^n = g_{BF}^n + \delta g^n, \quad (6.54)$$

où g_{BF}^n contient les contributions gravitationnelles « basse fréquence » jusqu'au degré harmonique L_{min} et δg^n est une perturbation de gravité formée de contributions de degré supérieur à L_{min} .

Muni de la décomposition 6.54 et des relations 6.51, 6.52 et 6.53, il vient, tous calculs faits, une relation intégrale qui lie la perturbation δg^n aux quantités observables T_{1U} , S , CC à l'instant t qui s'écrit :

$$\int_{t_a}^{t_b} W(t, \tau) \delta g^n(\tau) d\tau = f(t), \quad (6.55)$$

où

$$\begin{aligned} f(t) = & \int_{t_a}^{t_b} W(t, \tau) [T_{1U}(\tau) + S(\tau) + a_{bas}^n + CC(\tau) - g_{BF}^n(\tau)] d\tau + \int_{t_a}^{t_b} H(t, \tau) B(\tau) d\tau \\ & + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} [B(t_b) - B(t_a) - (B(t) - B(t_a))], \end{aligned} \quad (6.56)$$

et

$$W(t, \tau) = \begin{cases} t - \tau - \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (t_b - \tau) & \text{si } t_a \leq \tau \leq t, \\ -\frac{t - t_a}{t_b - t_a} (t_b - \tau) & \text{si } t < \tau \leq t_b. \end{cases} \quad (6.57)$$

Ainsi, pour chaque profil acquis entre les instants t_a et t_b , la perturbation de gravité δg^n obéit-elle à une équation intégrale de Fredholm de première espèce de noyau W . L'accélération gravitationnelle g_U^n s'obtient donc en ajoutant à la solution δg^n de l'équation intégrale de Fredholm, la contribution basse fréquence g_{BF}^n issue, par exemple, d'un modèle de géopotential. Cette formulation élégante du problème de la gravimétrie mobile scalaire recèle néanmoins un écueil que révèle l'étude théorique de l'équation intégrale de Fredholm : la détermination de la perturbation $\delta g^n(t)$ pour $t \in [t_a; t_b]$ par l'équation 6.55 est un *problème inverse mal posé* (cf Annexe C, p. 409). C'est pourquoi cette détermination exige d'opérer une *régularisation* que nous allons expliquer à présent.

Supposons à présent que l'acquisition de données le long de chaque profil, ait été réalisée régulièrement dans le temps avec la période T . Soient $t_1, t_2, \dots, t_l = t_1 + (l-1)T$, les l instants d'échantillonnage sur un profil donné. L'équation 6.55 exprimée en chaque instant d'échantillonnage avec $t_1 = t_a$ et $t_l = t_b$, s'écrit :

$$\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \quad \int_{t_1}^{t_l} W(t_i, \tau) \delta g^n(\tau) d\tau = f(t_i). \quad (6.58)$$

Cette équation indique que le second membre $f(t_i)$ s'exprime comme une somme discrète et finie d'intégrales, de la forme :

$$f(t_i) = \sum_{k=1}^{l-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} W(t_i, \tau) \delta g^n(\tau) d\tau, \quad i \in \llbracket 1, l \rrbracket.$$

À l'aide d'une méthode d'intégration numérique – telles les méthodes du rectangle, du point milieu, du trapèze ou de Simpson – il est possible d'exprimer la relation précédente sous la forme d'une combinaison linéaire des perturbations de gravité $\delta g^n(t_k)$ pour $k \in \llbracket 1, l \rrbracket$. En appliquant, par exemple, la méthode du trapèze, il vient successivement :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} W(t_i, \tau) \delta g^n(\tau) d\tau \approx \frac{T}{2} [W(t_i, t_k) \delta g^n(t_k) + W(t_i, t_{k+1}) \delta g^n(t_{k+1})],$$

d'où

$$f(t_i) = \frac{T}{2} W(t_i, t_1) \delta g^n(t_1) + T \sum_{k=2}^{l-1} W(t_i, t_k) \delta g^n(t_k) + \frac{T}{2} W(t_i, t_l) \delta g^n(t_l).$$

En remarquant que $W(t_i, t_1) = W(t_i, t_l) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$, la relation précédente peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$f(t_i) = [T W(t_i, t_2) \dots T W(t_i, t_k) \dots T W(t_i, t_{l-1})] \begin{bmatrix} \delta g^n(t_2) \\ \vdots \\ \delta g^n(t_k) \\ \vdots \\ \delta g^n(t_{l-1}) \end{bmatrix}.$$

Cette dernière relation reste valable à tout instant t_i de mesure, à l'exception des instants t_1 et t_l pour lesquels $W(t_1, t_k) = W(t_l, t_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, l \rrbracket$. Ainsi, pour le profil considéré, hormis les valeurs aux extrémités, les perturbations de gravité $\delta g^n(t_2), \dots, \delta g^n(t_{l-1})$ satisfont-elles l'équation matricielle :

$$T \begin{bmatrix} W(t_2, t_2) & \dots & \dots & \dots & W(t_2, t_{l-1}) \\ \vdots & \ddots & W(t_j, t_k) & & \vdots \\ \vdots & & W(t_k, t_k) & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ W(t_{l-1}, t_2) & \dots & \dots & \dots & W(t_{l-1}, t_{l-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta g^n(t_2) \\ \vdots \\ \delta g^n(t_k) \\ \vdots \\ \delta g^n(t_{l-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_k) \\ \vdots \\ f(t_{l-1}) \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

pour $(j, k) \in \llbracket 2, l-1 \rrbracket^2$.

L'équation 6.59 constitue la forme discrète d'une équation de Fredholm de première espèce dont la résolution repose sur un problème mal posé. Par conséquent, l'équation 6.59 n'admet pas de solution exacte, mais seulement des solutions approximatives obtenues par des méthodes ad hoc.

Pour formuler ce problème d'approximation pour l'intégralité d'un lever constitué de r profils, il convient de considérer, en premier lieu, un profil quelconque α comportant $l(\alpha)$ points de mesures réalisés aux instants $t_1, t_2, \dots, t_{l(\alpha)}$. Soient A_α la matrice carrée de dimension $(l(\alpha) - 2) \times (l(\alpha) - 2)$ dont le terme général est $T W(t_i, t_j)$ pour $(i, j) \in \llbracket 2, l(\alpha) - 1 \rrbracket^2$, $\mathbf{Y}_\alpha$ et $\mathbf{M}_\alpha$ les vecteurs de $\mathbb{R}^{l(\alpha)-2}$ qui contiennent respectivement les perturbations $\delta g^n(t_2), \dots, \delta g^n(t_{l(\alpha)-1})$ recherchées et les quantités mesurées $f(t_2), \dots, f(t_{l(\alpha)-1})$. Si $\mathbf{Y}_\alpha$ constitue une solution approximative de l'équation 6.59, alors il satisfait l'équation :

$$A_\alpha \mathbf{Y}_\alpha + \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \mathbf{M}_\alpha, \quad (6.60)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$ représente l'erreur d'approximation pour le profil α .

La relation 6.60 se généralise simplement à l'ensemble du lever qui comporte au total :

- r profils;
- $n = \sum_{\alpha=1}^r l(\alpha)$ points de mesures.

Soient, en effet, le vecteur $\mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_r]^T$ des perturbations de gravité recherchées et $\mathbf{M} = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_r]^T$, celui des mesures sur l'ensemble des profils, de même dimension $n-2r$ que $\mathbf{Y}$. Si A désigne matrice carrée $(n-2r) \times (n-2r)$ définie par :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & (0) & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & A_r \end{bmatrix}, \quad (6.61)$$

alors le problème de l'estimation du vecteur $\mathbf{Y}$ s'exprime par l'équation matricielle :

$$A\mathbf{Y} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}, \quad (6.62)$$

où le vecteur d'erreur s'écrit $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_r]^T$.

L'approche ainsi formulée conduit effectivement à une détermination *globale* de la perturbation de gravité sur l'ensemble du lever, excepté pour les points d'entrée et de sortie de chaque profil exclus de l'estimation. En l'état, la matrice A présente un défaut de rang, ce dernier étant inférieur à $n-2r$, c'est-à-dire au nombre de paramètres $\delta g_\alpha^n(t_k)$, $k \in \llbracket 2, l(\alpha) - 1 \rrbracket$; $\alpha \in \llbracket 1, r \rrbracket$ à déterminer. Pour rendre ce problème d'estimation conforme à celui du *modèle linéaire généralisé* (cf Annexe D, p. 413), il faut se donner, en plus, une estimation a priori de la solution $\mathbf{Y}$ sous la forme de la réalisation d'une variable aléatoire vectorielle caractérisée par sa matrice de covariance. Soient I_{n-2r} la matrice identité de dimension $(n-2r) \times (n-2r)$ et $\mathbf{0}_{n-2r}$, le vecteur nul de dimension $n-2r$. La prise en compte de cette estimation a priori revient à modifier la formulation du problème en ajoutant $n-2r$ équations d'observations supplémentaires, comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A \\ I_{n-2r} \end{bmatrix}}_{A'} \mathbf{Y} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{Y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{0}_{n-2r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}'}. \quad (6.63)$$

À présent, le rang de la matrice A' égale $n-2r$ et $\boldsymbol{\varepsilon}'$ représente la variable aléatoire vectorielle qui caractérise l'erreur d'estimation, si bien que l'équation $A'\mathbf{Y} + \boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{M}'$ correspond véritablement à un modèle linéaire généralisé.

La détermination d'une estimation de $\mathbf{Y}$ par moindres carrés suppose la connaissance a priori de la matrice de covariance de $\boldsymbol{\varepsilon}'$ (cf Annexe D, p. 413). Soit Σ une telle matrice; cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$\Sigma = \mathbb{V}(\boldsymbol{\varepsilon}') = \begin{bmatrix} \sigma_{0,M}^2 Q_M & 0 \\ 0 & \sigma_{0,Y}^2 Q_Y \end{bmatrix}, \quad (6.64)$$

où $\sigma_{0,M}^2 Q_M$ et $\sigma_{0,Y}^2 Q_Y$ désignent respectivement les matrices de covariance, de dimension $(n-2r) \times (n-2r)$ des $(n-2r)$ mesures et de l'estimation a priori des $(n-2r)$ paramètres.

La matrice Σ est donc de dimension $4(n-2r) \times (n-2r)$. Les réels positifs $\sigma_{0,M}$ et $\sigma_{0,Y}$, a priori inconnus, permettent une mise à l'échelle arbitraire des matrices de covariance sans modification de l'estimateur. Ils constituent les *facteurs unitaires de variance*.

L'estimateur $\hat{Y}$ des moindres carrés généralisés (cf Annexe D, p. 413) s'exprime par :

$$\hat{Y} = (A'^T \Sigma^{-1} A')^{-1} A'^T \Sigma^{-1} M',$$

et sa matrice de covariance vérifie :

$$\mathbb{V}(\hat{Y}) = (A'^T \Sigma^{-1} A')^{-1}.$$

En explicitant les expressions de $\hat{Y}$ et $\mathbb{V}(\hat{Y})$ compte tenu de l'équation 6.63, il résulte, tous calculs faits :

$$\hat{Y} = (A^T Q_M^{-1} A + \mu^2 Q_Y^{-1})^{-1} A^T Q_M^{-1} M \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\sigma_{0,M}}{\sigma_{0,Y}}; \quad (6.65)$$

$$\mathbb{V}(\hat{Y}) = \sigma_{0,M}^2 (A^T Q_M^{-1} A + \mu^2 Q_Y^{-1})^{-1}. \quad (6.66)$$

À ce stade, la détermination de la perturbation de gravité par la méthode globale requiert deux ingrédients essentiels :

1. le calcul des matrices de covariance Q_M et Q_Y ;
2. le calcul du paramètre de régularisation μ de l'équation 6.65.

6.2.3.1.2 Fixation des matrices de covariance

Le calcul de la matrice Q_M repose sur la forme discrète de l'expression de la fonction $f(t)$ donnée par l'équation 6.56 (p. 226). Pour le profil α et pour tout i de l'intervalle entier $\llbracket 2, l(\alpha) - 1 \rrbracket$, il vient en effet :

$$\begin{aligned} f(t_i) &= T \sum_{k=2}^{l(\alpha)-1} W(t_i, t_k) [T_{1U}(t_k) + S(t_k) + a_{\text{bas}}^n + CC(t_k) - g_{BF}^n(t_k)] + T \sum_{k=2}^{l(\alpha)-1} H(t_i, t_k) B(t_k) \\ &+ \frac{t_i - t_1}{t_{l(\alpha)} - t_1} [B(t_{l(\alpha)}) - B(t_1) - (B(t_i) - B(t_1))], \end{aligned} \quad (6.67)$$

puisque d'après l'équation 6.53 (p. 225), $H(t_i, t_1) = H(t_i, t_{l(\alpha)}) = 0$ pour $i \in \llbracket 2, l(\alpha) - 1 \rrbracket$.

L'écriture matricielle de la relation précédente donne ensuite :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_i) \\ \vdots \\ f(t_{l(\alpha)-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_\alpha} = \mathbf{A}_\alpha \left(\begin{bmatrix} T_{1U}(t_2) \\ \vdots \\ T_{1U}(t_i) \\ \vdots \\ T_{1U}(t_{l(\alpha)-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S(t_2) \\ \vdots \\ S(t_i) \\ \vdots \\ S(t_{l(\alpha)-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CC(t_2) \\ \vdots \\ CC(t_i) \\ \vdots \\ CC(t_{l(\alpha)-1}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{BF}^n(t_2) \\ \vdots \\ g_{BF}^n(t_i) \\ \vdots \\ g_{BF}^n(t_{l(\alpha)-1}) \end{bmatrix} \right) \\ \dots + E_\alpha \begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_i) \\ \vdots \\ B(t_{l(\alpha)-1}) \\ B(t_{l(\alpha)}) \end{bmatrix}$$

où E_α est la matrice de dimension $(l(\alpha) - 2) \times l(\alpha)$ dont le terme général égale $\partial f(t_i) / \partial B(t_j)$ pour $(i, j) \in \llbracket 2, l(\alpha) - 1 \rrbracket \times \llbracket 1, l(\alpha) \rrbracket$.

En supposant les grandeurs impliquées statistiquement indépendantes, la formule de propagation de la variance permet d'exprimer la matrice de covariance Q_{M_α} des mesures $\mathbf{M}_\alpha$ du profil α par :

$$Q_{M_\alpha} = \mathbf{A}_\alpha \left(Q_{T_{1U}} + Q_S + Q_{a_{\text{bas}}^n} + Q_{CC} + Q_{g_{BF}^n} \right) \mathbf{A}_\alpha^T + E_\alpha Q_B E_\alpha^T, \quad (6.68)$$

où $Q_{T_{1U}}$, Q_S , $Q_{a_{\text{bas}}^n}$, Q_{CC} , $Q_{g_{BF}^n}$ et Q_B désignent les matrices de covariance respectives des grandeurs T_{1U} , S , a_{bas}^n , CC , g_{BF}^n et B . Ainsi construite, la matrice Q_{M_α} est de dimension $(l(\alpha) - 2) \times (l(\alpha) - 2)$.

Le tableau 6.6 récapitule les méthodes utilisées dans Abassi, 2006 (these5) et Abassi et al., 2007 (acl3) pour déterminer les matrices de covariance qui entrent dans l'expression de Q_{M_α} .

Matrice de covariance	Méthode d'obtention
$Q_{T_{1U}}$	Simulation de Monte-Carlo à partir d'une structure de covariance
Q_S	Données « constructeur » ; matrice diagonale
Q_{CC}	Données « constructeur » ; matrice diagonale
$Q_{g_{BF}^n}$	Modèle de géopotential
Q_B	Données « constructeur » ; matrice diagonale

TABLEAU 6.6 – Tableau récapitulatif des méthodes d'obtention des matrices de covariance des mesures, impliquées dans l'équation 6.68.

Trois de ces matrices (Q_S , Q_{CC} et Q_B) sont fixées directement grâce aux incertitudes de mesure publiées dans les notices du constructeur. Les mesures sont ici supposées non corrélées et d'égale variance, ce qui rend les trois matrices diagonales. La détermination de la matrice $Q_{T_{1U}}$ demeure plus délicate de par la dépendance non linéaire qui existe entre la grandeur T_{1U} et les paramètres du mouvement de l'avion, en l'occurrence sa position, sa vitesse et son accélération (cf Éq. 6.30, p. 191). Une première méthode analytique consiste à calculer formellement la relation de propagation de variance qui permet d'exprimer la variance du terme T_{1U} en fonction de celles des coordonnées du point positionné attaché au porteur. Une seconde méthode utilise directement les mesures de position pour identifier la structure de covariance qui les régit. Muni de cette covariance, il est possible de simuler numériquement des mesures de position et d'en déduire de nombreux tirages de la variable T_{1U} (Fig. 6.29).

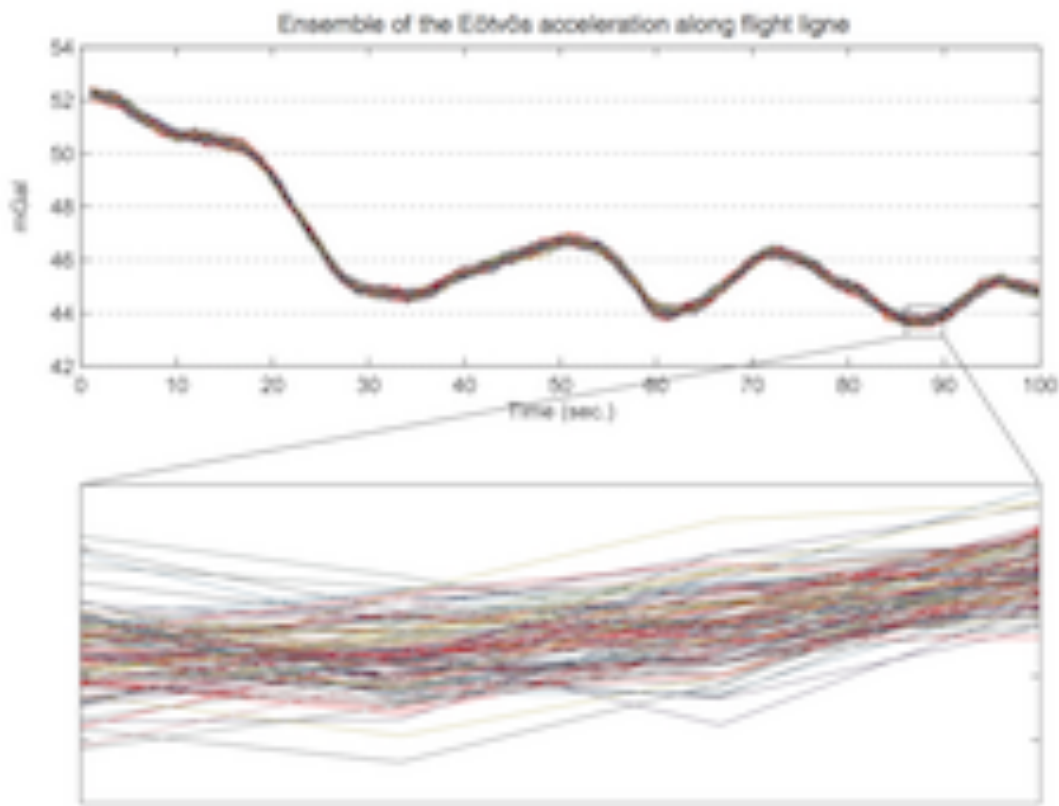


FIGURE 6.29 – Tirages aléatoires de l'accélération d'Eötvös, l'une des contributions au terme T_{1U} , sur un profil du lever « Alpes 1998 ». Cette simulation suppose l'identification préalable de la structure de covariance des données de position qui entrent dans le calcul de l'accélération d'Eötvös. Une fois générées sur ordinateur, les données de position sont utilisées dans la formule de l'accélération d'Eötvös pour en produire des simulations.

D'après Abassi et al., 2007 (acl3).

La matrice de covariance $Q_{T_{1U}}$ s'estime ensuite de façon empirique à partir de ces tirages. Le nombre de tirage doit être tel qu'il garantisse une incertitude sur la détermination empirique de la matrice $Q_{T_{1U}}$ compatible avec celle des données « constructeur » sur la capteur d'accélération.

Cette méthode du type Monte-Carlo possède deux avantages sur la méthode analytique : en premier lieu, elle fournit une matrice de covariance plus fidèle à la réalité expérimentale du lever et, en second lieu, elle permet assez simplement de prendre en compte les covariances croisées entre les mesures de position.

Finalement, la matrice de covariance Q_M pour l'ensemble du lever, s'obtient à partir des matrices de covariance Q_{M_α} des r profils sous la forme :

$$Q_M = \begin{bmatrix} Q_{M_1} & & & \\ & Q_{M_2} & (0) & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & Q_{M_r} \end{bmatrix}. \quad (6.69)$$

La matrice de covariance Q_M est de dimension $(n - 2r) \times (n - 2r)$. Il convient de noter qu'en l'état, cette dernière ne tient pas compte directement d'éventuelles corrélations spatiales entre les différents profils du lever. En fait, la considération des corrélations spatiales va découler de l'utilisation d'un modèle de géopotential pour le calcul de la contribution basse fréquence g_{BF}^n et sa matrice de covariance $Q_{g_{BF}^n}$. Il en sera de même, comme nous allons voir ci-après, pour l'estimation de la matrice de covariance Q_Y de la perturbation de gravité recherchée.

L'utilisation d'un modèle de géopotential dans le cadre du lever aérien « Alpes 1998 » suppose tout d'abord les mesures gravimétriques ramenées sur une sphère. Cette transformation s'effectue assez aisément par prolongement à partir, par exemple, d'une estimation du gradient vertical de gravité à l'altitude de vol. Avec cette hypothèse, chaque mesure peut être repérée sur la sphère par sa longitude λ et sa colatitude sphérique θ (Fig. 6.30) sur une sphère de rayon donné. La contribution gravitationnelle g_{BF}^n s'exprime alors uniquement en fonction de λ et θ par :

$$g_{BF}^n(\lambda, \theta) = g_0^n + \Delta g_{BF}^n(\lambda, \theta), \quad (6.70)$$

où g_0^n correspond à la valeur constante de la gravité sur la sphère et $\Delta g_{BF}^n(\lambda, \theta)$ est une anomalie de gravité qui contient les contributions harmoniques de degré supérieur ou égal à deux.

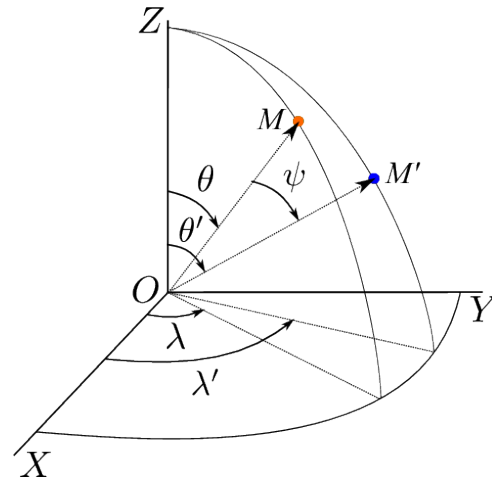


FIGURE 6.30 – Coordonnées sphériques (longitude λ ; colatitude sphérique θ) et angle formé par deux rayons-vecteurs sur la sphère (ψ).

Une seconde hypothèse simplificatrice consiste à supposer l'homogénéité et l'isotropie des covariances spatiales de la gravité (stationnarité spatiale). Dans ce cas, la fonction de covariance ne dépend pas du point de mesure mais seulement de la séparation entre les points de mesure (homogénéité) et, en outre, elle ne dépend pas de l'azimut du point de mesure (isotropie). Soit ψ l'angle qui sépare les rayons-vecteurs de deux points $M(\lambda, \theta)$ et $M'(\lambda', \theta')$ de la sphère (Fig. 6.30, p. 232) ; alors, la fonction de covariance homogène et isotrope C_{BF} de l'anomalie de gravité basse fréquence s'exprime, selon HOFMANN-WELLENHOF et MORITZ (2005), par :

$$C_{BF}(\Delta g_{BF}^n(M), \Delta g_{BF}^n(M')) = C_{BF}(\psi) = \sum_{l=2}^{L_{min}} C_l P_l(\cos \psi), \quad (6.71)$$

où les coefficients C_l pour $l \in [2, L_{min}]$ sont déduits du modèle de géopotential de l'anomalie de gravité par :

$$C_l = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-l}^{+l} |\Delta g_l^m|^2, \quad (6.72)$$

où les quantités Δg_l^m représentent les coefficients de degré l et d'ordre m donnés par le modèle de géopotential.

Les coefficients C_l sont appelés *variances par degré* puisqu'ils représentent chacun la contribution à la fonction de covariance au degré considéré (Fig. 6.31).

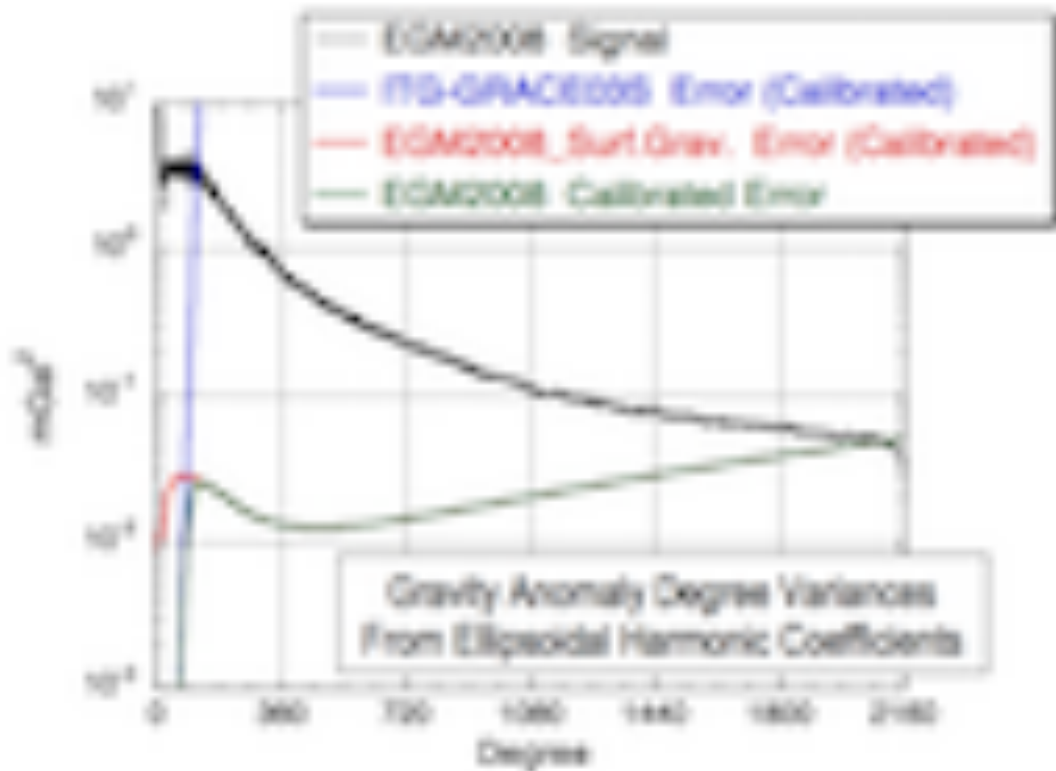


FIGURE 6.31 – Variances par degré de l'anomalie de gravité donnée par le modèle de géopotential EGM 2008 (Tab. 5.1, p. 130), représentées par la courbe en trait noir continu. La diminution de l'amplitude de ces variances entre les plus bas et les plus hauts degrés harmoniques atteint quasiment deux ordres de grandeurs. Ce sont donc les contributions à l'anomalie de plus courte longueur d'onde qui présentent également les covariances spatiales les plus faibles.

D'après PAVLIS *et al.* (2012).

Ainsi, la donnée d'un modèle de géopotential permet-elle de définir complètement la matrice de covariance Q_{BF} impliqué dans le processus de calcul. En effet, si M_i et M_j sont deux points de coordonnées respectives (λ_i, θ_i) et (λ_j, θ_j) , alors le terme (i, j) de la matrice Q_{BF} est donné par :

$$(Q_{BF})_{ij} = (Q_{BF})_{ji} = C_{BF}(\Delta g_{BF}^n(M_i), \Delta g_{BF}^n(M_j)) = C_{BF}(\psi_{ij}) \quad (6.73)$$

où l'angle ψ_{ij} vérifie l'équation 3.50 (p. 60) :

$$\cos \psi_{ij} = \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\lambda_i - \lambda_j).$$

Des exemples de calculs qui utilisent des fonctions de covariance non isotropes sont donnés dans Abassi, 2006 (these5). Il est clair qu'aucune assimilation des données aériennes n'étant opérée jusqu'à présent, la qualité de la restitution des basses fréquences dépend donc directement de celle du modèle de géopotential employé.

L'estimation de la matrice de covariance Q_Y demeure le point le plus délicat puisqu'il s'agit de déterminer une structure de covariance spatiale a priori du champ δg^n , que les données aériennes doivent justement restituer. En outre, les levés aériens sont en général réalisés sur les régions d'intérêt faiblement couvertes par des mesures de gravimétrie terrestre, telles les régions montagneuses. Les modèles de géopotential, même de très haut degré, y sont inéluctablement mal déterminés, bien qu'ils puissent recouvrir le cas échéant la gamme des longueurs d'onde restituées par le levé aérien. Nous avons évalué à $L_{min} = 45$ le degré minimum accessible du levé « Alpes 1998 ». Par ailleurs, le degré maximum L_{max} est déterminé par la distance moyenne qui sépare les profils de mesure considérée comme le pas d'échantillonnage spatial. En estimant ce dernier à 11 km soit environ $0,1^\circ$, il en résulte une plus petite longueur d'onde restituable de 22 km, soit $0,2^\circ$, qui correspond à un degré harmonique maximum de $360^\circ/0,2$, c'est-à-dire $L_{max} = 1800$. Un modèle tel EGM 2008 (Tab. 5.1, p. 5.1) inclut très confortablement la gamme $[L_{min}; L_{max}] = [45; 1800]$ si bien que la fonction de covariance spatiale pourrait être estimée pour ce modèle à l'aide des relations 6.71 et 6.72 pour les degrés l étendus de L_{min} à L_{max} . À l'époque du levé « Alpes 1998 » où le modèle EGM 2008 n'était pas encore disponible, Abassi et al., 2007 (acl3) ont proposé une méthode semi-empirique d'extrapolation de la fonction de covariance pour les hauts degrés harmoniques, qui peut être utilisée encore aujourd'hui pour pallier les déficiences locales des modèles de géopotentials globaux. Cette méthode commence par évaluer, sur une grille régulière couvrant la zone de levé, les perturbations de gravité $\delta g_{N_k}^n$ issues d'un modèle de géopotential pour les degrés harmoniques compris entre L_{min} et $L_{min} + N_k$ où N_k est un entier tel que $L_{min} + N_k$ soit inférieur ou égal au plus haut degré harmonique du modèle. Autrement dit, si $\mathcal{G}$ désigne la grille de la zone de levé, il vient :

$$\forall P(\lambda, \theta) \in \mathcal{G}, \quad \delta g_{N_k}^n(P) = \sum_{l=L_{min}}^{L_{min}+N_k} \delta g_l^m Y_l^m(\lambda, \theta). \quad (6.74)$$

où δg_l^m sont les coefficients du modèle géopotential de la perturbation de gravité.

Puis, une estimation de la fonction de covariance locale C_k dans la gamme spectrale définie par les degrés harmoniques de l'intervalle $[L_{min}; L_{min} + N_k]$, est déterminée à l'aide d'une relation de covariance empirique de la forme :

$$C_k(\psi) = \frac{1}{m(\psi)} \sum_{(P,Q) \in \mathcal{M}(\psi)^2} \delta g_{N_k}^n(P) \delta g_{N_k}^n(Q), \quad (6.75)$$

où $\mathcal{M}(\psi)$ désigne l'ensemble des points de la grille G tels que $|\widehat{(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_Q)} - \psi| < \varepsilon$, ε étant un réel positif, et $m(\psi)$, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{M}(\psi)$.

L'ensemble des graphes des fonctions $C_k(\psi)$ forme un nuage de points sur lequel un modèle de covariance va pouvoir être ajusté (Fig. 6.32). Cette méthode revient donc à estimer les paramètres d'une fonction de covariance analytique, homogène et isotrope, à partir des valeurs de la perturbation de gravité déterminée spécifiquement sur la zone de lever. C'est une modélisation plus fidèle de la réalité des covariances spatiales de la gravité qui est obtenue de cette manière et fixe définitivement les éléments de ma matrice de covariance Q_Y .

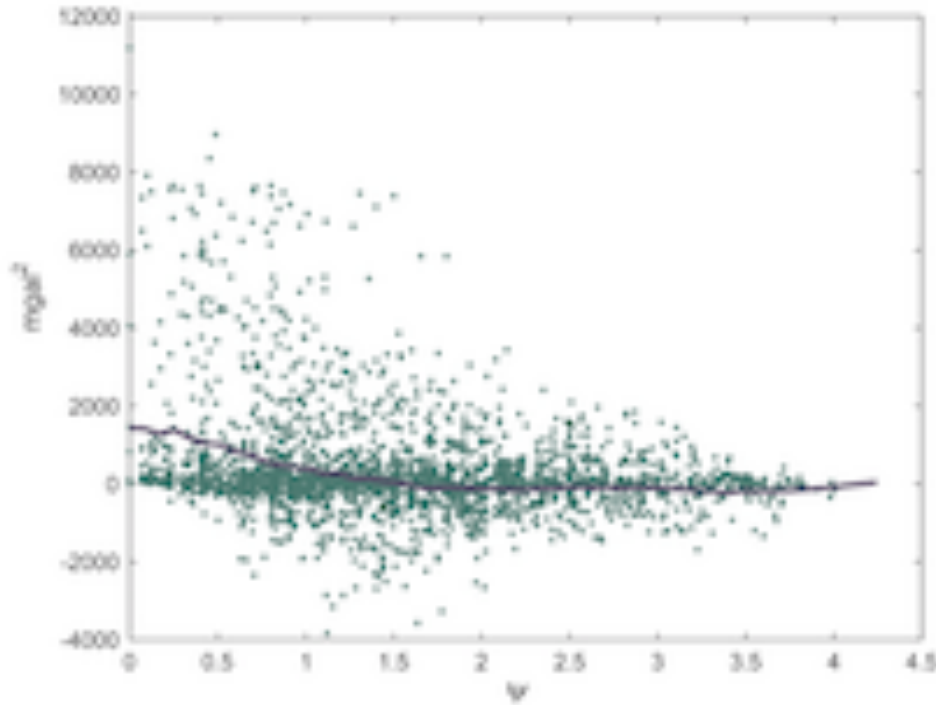


FIGURE 6.32 – Nuage de points formé par les estimations empiriques de la fonction de covariance locale $C_k(\psi)$ en fonction de l'angle ψ . Le modèle de covariance analytique ajusté sur ce nuage (courbe en trait continu) s'exprime par : $\hat{C}(\psi) = C_0 e^{-\alpha|\psi|} \cos(\omega\psi)$ où C_0 , α et ω sont des réels positifs qui définissent complètement le modèle analytique. Ce modèle constitue une extrapolation locale de la fonction de covariance à tous les degrés harmoniques.

D'après Abassi et al., 2007 (acl3).

6.2.3.1.3 Choix du paramètre de régularisation

Une fois déterminées les matrices de covariance, il reste à estimer les facteurs unitaires de variance $\sigma_{0,Y}^2$ et $\sigma_{0,M}^2$ dont le rapport apparaît dans la relation 6.65 (p. 229) par l'intermédiaire du facteur μ^2 . Ce dernier contrôle le degré de lissage de l'estimation $\hat{Y}$ qui est d'autant plus proche de sa détermination a priori que le facteur μ est grand. Réciproquement, l'estimation $\hat{Y}$ est d'autant plus proche de celle des moindres carrés sans contrainte – c'est-à-dire non régularisés – que la valeur du facteur μ^2 est faible. Le problème de la détermination du facteur μ revient à estimer les facteurs unitaires de variance. Plusieurs méthodes peuvent être employées pour cette tâche telle la méthode d'Helmert (SILLARD, 2001). Une autre interprétation du facteur μ découle très simplement du calcul de la quantité $\epsilon'^T \Sigma^{-1} \epsilon'$ à partir de l'équation 6.64 qui donne, tous calculs faits :

$$\epsilon'^T \Sigma^{-1} \epsilon' = \frac{1}{\sigma_{0,M}^2} (M - AY)^T Q_M^{-1} (M - AY) + \frac{1}{\sigma_{0,Y}^2} Y^T Q_Y^{-1} Y. \quad (6.76)$$

En appelant $\|\dots\|_{Q_M^{-1}}$ et $\|\dots\|_{Q_Y^{-1}}$ les normes induites respectivement par les matrices définies positives Q_M^{-1} et Q_Y^{-1} , la quantité $\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}'$ peut alors s'écrire :

$$\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}' = \frac{1}{\sigma_{0,M}^2} \left(\|M - A\mathbf{Y}\|_{Q_M^{-1}}^2 + \mu^2 \|\mathbf{Y}\|_{Q_Y^{-1}}^2 \right) = T_\mu(\mathbf{Y}). \quad (6.77)$$

La quantité $\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}'$ apparaît donc comme une fonction $T_\mu(\mathbf{Y})$ du vecteur $\mathbf{Y}$ paramétrée par μ dont la solution des moindres carrés $\hat{\mathbf{Y}}_\mu$, donnée par 6.65 (p. 229), est précisément un minimum de la fonction $T_\mu(\mathbf{Y})$:

$$T_\mu(\hat{\mathbf{Y}}_\mu) = \min_{\mathbf{Y}} \left(\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}' \right).$$

L'expression de $T_\mu(\mathbf{Y})$ est l'analogue formelle, à un facteur multiplicatif près, de la fonctionnelle de Tichonov évoquée à propos de l'équation de Fredholm (cf Annexe C, Éq. C.2, p. 411). Le paramètre μ y joue le rôle du paramètre de régularisation d'un problème inverse mal posé. Une méthode possible pour fixer une valeur raisonnable du paramètre μ est due à MOROZOV (1984). Elle consiste concrètement à choisir la valeur μ_r de μ pour laquelle :

$$\|M - A\hat{\mathbf{Y}}_{\mu_r}\|_{Q_M^{-1}} = \|\hat{\mathbf{Y}}_{\mu_r}\|_{Q_Y^{-1}}.$$

Dans ce cas, la norme du vecteur des résidus $M - A\hat{\mathbf{Y}}_\mu$ suivant la métrique de l'espace des observations est égale à la norme du vecteur des paramètres $\hat{\mathbf{Y}}_\mu$ suivant la métrique de l'espace des paramètres. Cette méthode est également appelée *méthode de la courbe « L »* de par l'allure de la courbe de l'évolution de $\|\hat{\mathbf{Y}}_\mu\|_{Q_Y^{-1}}$ en fonction de μ qui s'apparente à la lettre L (Fig. 6.33).

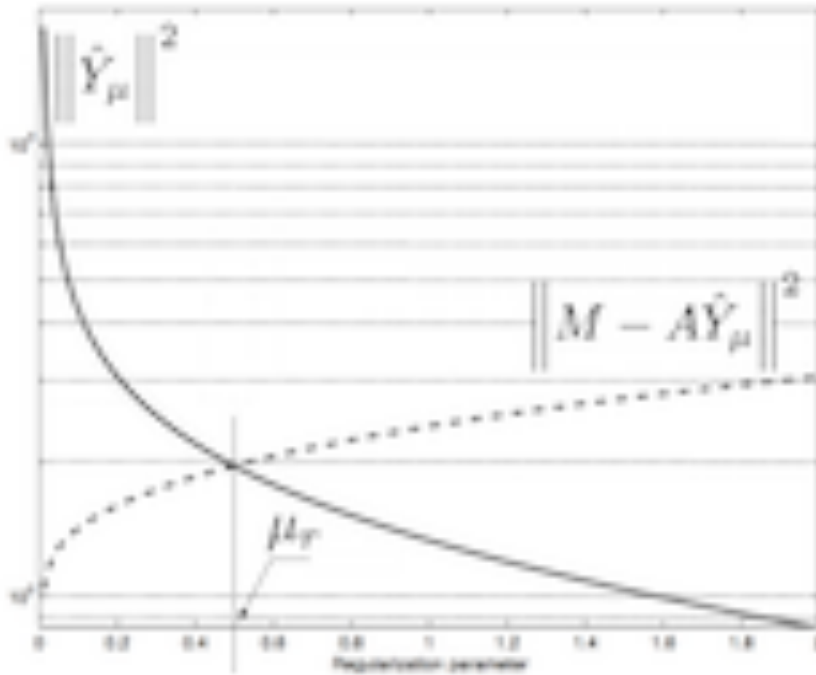


FIGURE 6.33 – Graphes de l'évolution des quantités $\|M - A\hat{\mathbf{Y}}_\mu\|_{Q_M^{-1}}$ et $\|\hat{\mathbf{Y}}_\mu\|_{Q_Y^{-1}}$ en fonction du paramètre de régularisation μ . L'abscisse de l'intersection de ces deux graphes correspond à la valeur optimale du paramètre μ selon le critère de Morozov.

D'après Abassi et al., 2007 (acl3).

6.2.3.1.4 Traitement du lever « Alpes 1998 »

Un exemple de restitution de la perturbation de gravité sur les Alpes par cette méthode globale est donnée en figure 6.34.

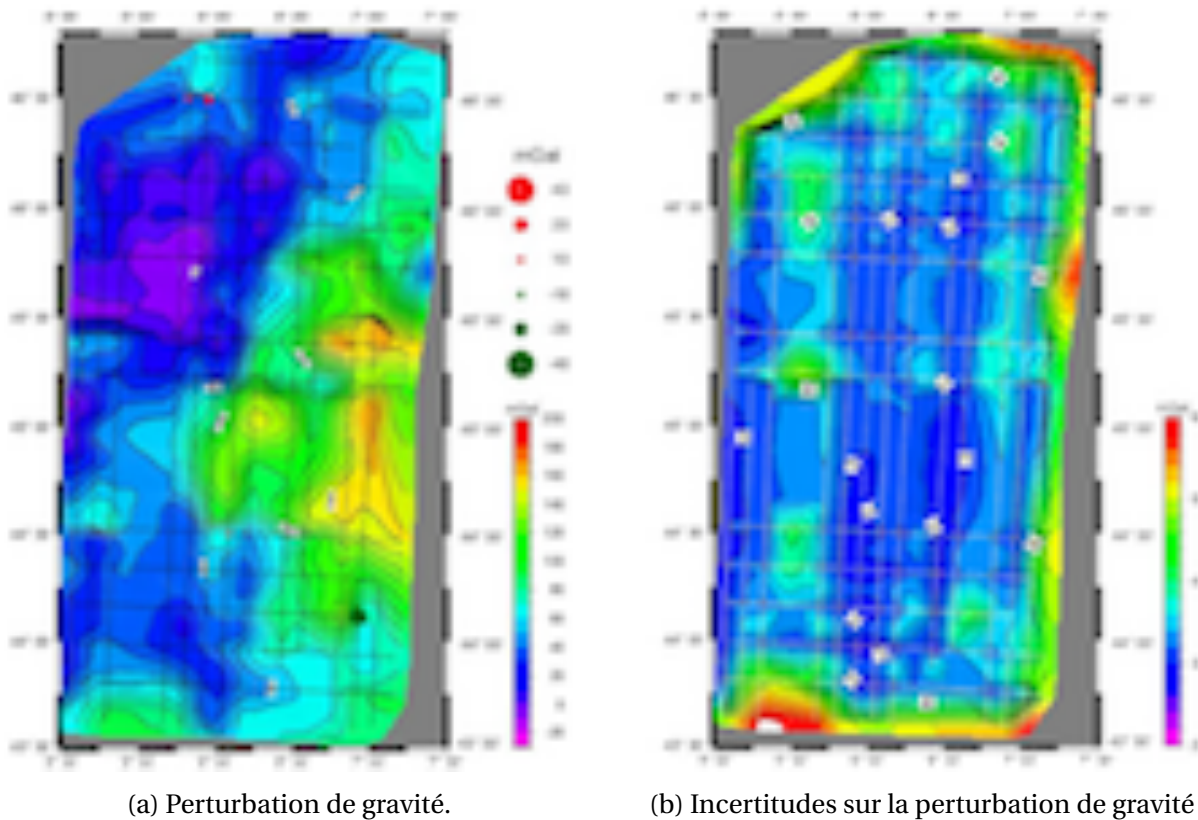
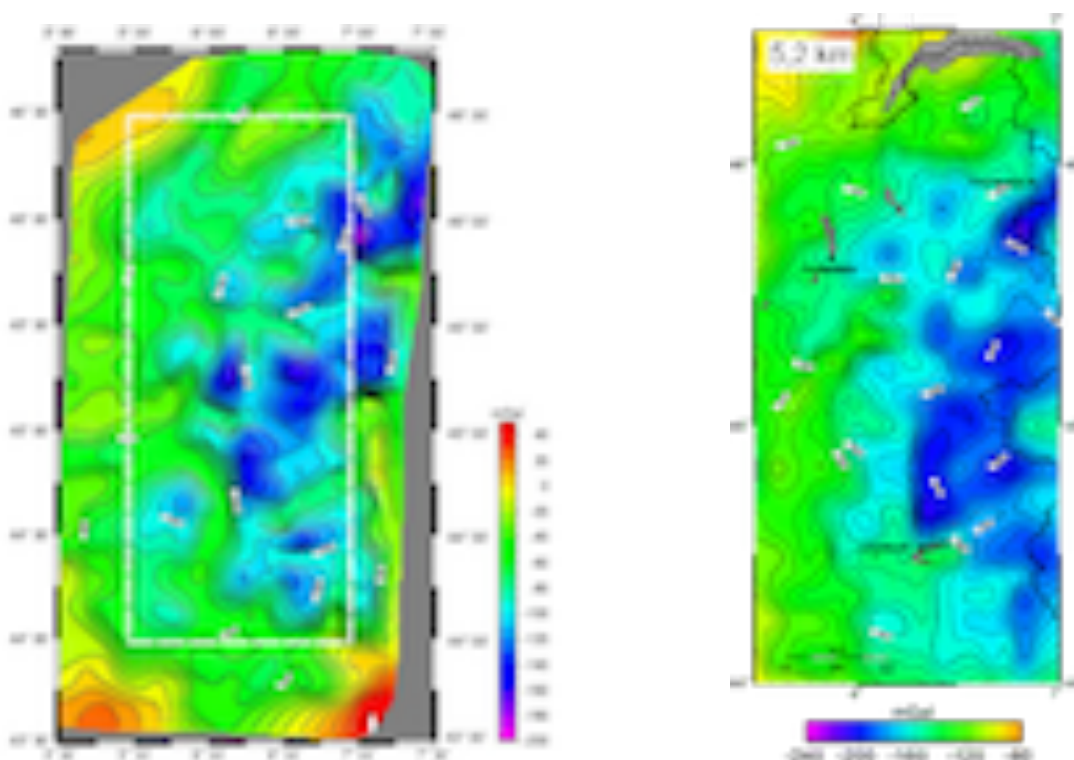


FIGURE 6.34 – Carte de la perturbation de gravité (Fig. 6.34a) calculée suivant l’approche globale sur les Alpes à partir des données du lever aérien « Alpes 1998 », dont les profils sont représentés par des traits continus noirs. La méthode de régularisation d’Helmert a été employée pour fixer les facteurs unitaires de variance. Cette dernière a donné un écart-type des écarts aux points de croisement plus faible (2,73 mGal) que celui obtenu avec la méthode de régularisation de Morozov (5,04 mGal). Seuls trois cercles colorés indiquent des points de croisement dont l’écart absolu est supérieur à 10 mGal. La carte représentée sur la figure 6.34b montre les incertitudes formelles de la perturbation de gravité déduites de la matrice de covariance a posteriori (Éq. 6.66, p. 229). Hormis à la frontière, les incertitudes formelles restent inférieures à 5 mGal sur l’ensemble du lever.

D’après Abassi, 2006 (*these5*).

La comparaison de l’incertitude, définie d’après les écarts aux points de croisement, obtenue par filtrage passif et par l’approche globale révèle très clairement la supériorité de la seconde. Pour espérer 5 mGal d’incertitude par filtrage passif, il faudrait dégrader la résolution au-delà de 26 km (Fig. 6.28a, p. 224), alors que la résolution spatiale de la perturbation représentée figure 6.34a, dont l’incertitude est voisine de 3 mGal est de l’ordre de 10 km. Indéniablement, le filtrage passif conduit à des résultats plus dispersés que l’approche globale, ce qui s’explique assez aisément en examinant le mode de réglage de l’élimination du bruit dans les deux cas. En effet, le filtrage passif requiert de fixer grossièrement une bande passante dans laquelle l’atténuation croît progressivement des basses aux hautes fréquences. A contrario, l’approche globale exige la donnée d’un paramètre de régularisation calculé rigoureusement suivant un critère de minimisation de l’erreur d’estimation. La précision du réglage est donc sans conteste meilleure dans le cas de l’approche globale.

La supériorité de l'approche globale sur le filtrage passif, quoique prévisible, n'a pas encore été démontrée à partir de l'analyse de l'erreur de mesure, évaluée par comparaison à des données de référence. Une simple confrontation de la perturbation de gravité, déterminée par l'approche globale et corrigée de la topographie (Fig. 6.35a), et de l'anomalie de Bouguer à 5,2 km de résolution (Fig. 6.35b), déterminée par filtrage passif, montre une bonne adéquation des motifs qu'il faudrait encore quantifier par un calcul de corrélation. Au-delà de ces seules considérations sur la qualité de la restitution d'un lever aérien, l'une des avancées notables permise par l'approche globale consiste en la formulation rigoureuse des équations d'observations de la gravimétrie scalaire aérienne, sous une forme adéquate pour l'assimilation dans un modèle de géopotential. En fait, il suffirait d'écrire les égalités impliquant la perturbation de gravité haute fréquence δg^n (Éq. 6.54 et 6.55, p. 226), non plus en terme de valeurs ponctuelles mais à partir d'une décomposition en harmoniques sphériques limitées aux seuls degrés accessibles au lever. Fort des techniques numériques mises au point pour la détermination des modèles de géopotential de très haut degré, il est finalement assez aisé de prendre en compte les données gravimétriques aériennes au même titre que les données acquises à terre et de mettre en œuvre les mêmes procédures de validation. La question légitime qui émerge à ce stade est celle d'une possible généralisation de cette approche globale à d'autres systèmes gravimétriques. Comme nous allons voir ci-après, cette généralisation est possible au prix de quelques raffinements.



(a) Perturbation de gravité corrigé de l'effet de la topographie obtenue par l'approche globale.

(b) Anomalie de Bouguer obtenue à l'aide du filtrage passif à la résolution spatiale de 5,2 km.

FIGURE 6.35 – Perturbation de gravité corrigée de l'effet de la topographie et l'anomalie de Bouguer sur la même zone (cadre en traits blancs interrompus sur la figure 6.35a). Ces deux quantités ne sont pas d'égales valeurs. Néanmoins, de nettes corrélations spatiales apparaissent assez clairement sur les deux cartes, ce qui permet de conclure à une bonne adéquation entre les deux restitutions.

D'après Abassi, 2006 (these5) et Verdun, 2003 (acl5).

6.2.3.1.5 Généralisation à la gravimétrie mobile vectorielle

La généralisation de l'approche globale à la gravimétrie mobile vectorielle, a été abordée dans les travaux de Li, 2011 (these3), et publiée dans Li et al., 2010 (acti3). Considérons à nouveau l'équation d'observation de l'accélération de la pesanteur $\bar{\mathbf{g}}^n$ par gravimétrie mobile (Éq. 6.29, p. 191), écrite sous une forme qui met en exergue les vecteurs position, vitesse et accélération du porteur, comme suit :

$$C_e^n \ddot{\mathbf{X}}_P^e + 2C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^n \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{X}_P^e = \bar{\mathbf{g}}^n - C_b^n \left(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ie}^b \Omega_{ie}^b \right) \mathbf{L}^b + C_b^n \mathbf{a}^b.$$

En négligeant le terme $C_e^n \dot{\Omega}_{ie}^e \mathbf{X}_P^e$ (cf Annexe B, p. 405) et en multipliant chaque membre par la matrice C_n^e , inverse de C_e^n , il vient une autre forme de l'équation d'observation de la gravimétrie mobile :

$$\ddot{\mathbf{X}}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e = C_n^e \bar{\mathbf{g}}^n - C_n^e C_b^n \left(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ie}^b \Omega_{ie}^b \right) \mathbf{L}^b + C_n^e C_b^n \mathbf{a}^b. \quad (6.78)$$

Comme effectué précédemment pour l'accélération gravitationnelle (Éq. 6.54, p. 226), il est possible de décomposer l'accélération de la pesanteur en une contribution basse fréquence $\bar{\mathbf{g}}_{BF}^n$ et une perturbation inconnue de la pesanteur $\delta \bar{\mathbf{g}}^n$, comme suit :

$$\bar{\mathbf{g}}^n = \bar{\mathbf{g}}_{BF}^n + \delta \bar{\mathbf{g}}^n. \quad (6.79)$$

En combinant l'équation 6.79 à l'équation d'observation de la gravimétrie mobile 6.78, il vient la relation suivante [Li et al., 2010 (acti3)] :

$$\ddot{\mathbf{X}}_P^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e = C_n^e \delta \bar{\mathbf{g}}^n + \mathbf{F}^e, \quad (6.80)$$

où le terme $\mathbf{F}^e$ s'exprime par :

$$\mathbf{F}^e = C_n^e \bar{\mathbf{g}}_{BF}^n - C_n^e C_b^n \left(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b - \Omega_{ie}^b \Omega_{ie}^b \right) \mathbf{L}^b + C_n^e C_b^n \mathbf{a}^b. \quad (6.81)$$

Cette formulation suggère que le vecteur position $\mathbf{X}_P^e$ du porteur satisfait une équation différentielle du second ordre (Éq. 6.80), dont le second membre dépend de la perturbation de pesanteur recherchée $\delta \bar{\mathbf{g}}^n$, et d'un terme composite $\mathbf{F}^e$ (Éq. 6.81) comprenant les contributions respectives :

- de l'accélération de la pesanteur basse fréquence $\bar{\mathbf{g}}_{BF}^n$;
- du bras de levier $\mathbf{L}^b$;
- de l'accélération de rappel, issue du capteur d'accélération $\mathbf{a}^b$.

La dépendance explicite de la matrice C_n^e avec la position du porteur (cf Annexe B, p. 405) rend tout le second membre de l'équation différentielle 6.80 dépendant du vecteur $\mathbf{X}_P^e$. L'équation 6.80 établit donc une relation non linéaire entre le vecteur position $\mathbf{X}_P^e$ et ses dérivées première et seconde.

En reprenant la méthode de ZWILLINGER (1998), déjà utilisée pour la gravimétrie mobile aérienne (cf §§6.2.3.1.1, p. 225), une expression intégrale du vecteur position $\mathbf{X}_P^e(t)$ mesurée à l'instant t , compris entre les instants de mesure t_a et t_b , est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_P^e(t) = & \mathbf{X}_P^e(t_a) + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (\mathbf{X}_P^e(t_b) - \mathbf{X}_P^e(t_a)) + \int_{t_a}^{t_b} W(t, \tau) C_n^e(\tau) \delta \bar{\mathbf{g}}^n(\tau) d\tau \cdots \\ & + \int_{t_a}^{t_b} W(t, \tau) \mathbf{F}^e(\tau) d\tau + \int_{t_a}^{t_b} H(t, \tau) \mathbf{X}_P^e(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (6.82)$$

où les noyaux intégraux W et H sont les matrices 3×3 qui s'expriment respectivement par :

$$W(t, \tau) = \begin{cases} \left[t - \tau - \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (t_b - \tau) \right] I_3 & \text{pour } t_a \leq \tau < t, \\ -\frac{t - t_a}{t_b - t_a} (t_b - \tau) I_3 & \text{pour } t \leq \tau \leq t_b, \end{cases} \quad (6.83)$$

$$H(t, \tau) = \begin{cases} 2 \frac{t - t_b}{t_b - t_a} \Omega_{ie}^e & \text{pour } \tau < t, \\ 2 \frac{t - t_a}{t_b - t_a} \Omega_{ie}^e & \text{pour } \tau > t. \end{cases} \quad (6.84)$$

En isolant dans l'équation 6.82 le terme dépendant de la perturbation de pesanteur $\delta \bar{\mathbf{g}}^n$, il vient une équation, analogue vectorielle de l'équation 6.55 (p. 226) qui s'écrit :

$$\int_{t_a}^{t_b} W(t, \tau) C_n^e(\tau) \delta \bar{\mathbf{g}}^n(\tau) d\tau = \mathbf{f}(t), \quad (6.85)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) = & \mathbf{X}_P^e(t) - \mathbf{X}_P^e(t_a) - \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (\mathbf{X}_P^e(t_b) - \mathbf{X}_P^e(t_a)) \cdots \\ & - \int_{t_a}^{t_b} W(t, \tau) \mathbf{F}^e(\tau) d\tau - \int_{t_a}^{t_b} H(t, \tau) \mathbf{X}_P^e(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Une simple analyse des termes impliqués dans l'équation 6.85, montre qu'hormis la perturbation de pesanteur $\delta \bar{\mathbf{g}}^n$, toutes les autres quantités peuvent être soit directement mesurées, soit déduites de quantités mesurables ou à partir de modèles (Tab. 6.7, p. 241). Le problème de l'estimation des trois composantes de la perturbation de pesanteur se ramène donc à la résolution d'une équation intégrale vectorielle, semblable à celle réalisée pour la gravimétrie scalaire aérienne (cf §§6.2.3.1.1, p. 225), abstraction faite du terme mesuré C_n^e présent dans le noyau intégrale de l'équation 6.85. Cette différence minime érige l'équation 6.85 en une relation implicite entre les observations et les paramètres à déterminer, en l'occurrence, les trois composantes du vecteur $\delta \bar{\mathbf{g}}^n$.

Quantité	Capteur/méthode de mesure
X_p^e, C_n^e	Système GNSS ou/et INS
Ω_{ib}^b, C_b^n	Gyromètres ou/et INS
a^b	Capteur d'accélération
L^b	Mesures de topométrie
$\bar{g}_{BF}^n$	Modèle de géopotentiel

TABLEAU 6.7 – Origine des différentes quantités impliquées dans l'équation d'observation de la gravimétrie vectorielle (Éq. 6.85, p. 240). L'utilisation d'une plate-forme stabilisée permettrait de confondre les repère n et b aux erreurs de stabilisation près. En particulier, la matrice C_b^n serait égale à la matrice identité I_3 .

La discrétisation de l'équation 6.85 (p. 240) pour un ensemble de profils donnés, conduit à la formulation d'un problème non linéaire général de la forme $\mathcal{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{M}) = \mathbf{0}$ (Éq. 6.42, p. 213). La résolution de ce problème peut s'effectuer aisément, en suivant une démarche analogue à celle conduite pour la gravimétrie scalaire aérienne, via la formulation mixte des moindres carrés. L'annexe E (p. 417) récapitule la méthode à utiliser dans cette formulation, lorsque la relation entre observations et paramètres inconnus est non linéaire.

Comparé à la gravimétrie scalaire, le nombre de paramètres à estimer en gravimétrie vectorielle est multiplié par un facteur trois, ce qui peut être assez conséquent. Par exemple, en supposant que les 8 120 km du lever « Alpes 1998 » aient été parcourus à la vitesse de 80 m/s avec une fréquence d'échantillonnage de 1 Hz, le nombre de points de mesure aurait alors atteint la valeur 8 120 000/80 soit 101 500. C'est donc un total de $3 \times 101\,500 = 304\,500$ paramètres qu'il aurait fallu déterminer pour obtenir les trois composantes de la pesanteur sur l'intégralité du lever. Bien que la puissance des calculateurs actuels nous assure de pouvoir employer l'approche globale avec succès pour la plupart des levers, toute approche qui permet de limiter le nombre d'opérations arithmétiques mérite d'être privilégiée en vue des calculs numériques. C'est l'un des arguments forts en faveur de l'approche récursive du filtrage dont il est question ci-après.

6.2.3.2 Approche récursive

L'approche récursive du filtrage en gravimétrie mobile a été initiée dans le travail de De Saint-Jean, 2008 (these4). Elle a été publiée notamment dans Cali et al., 2007 (acti5), 2010 (do1), et présentée dans Cali et al., 2005 (com14), 2009 (com10), et De Saint-Jean et al., 2007 (com12).

6.2.3.2.1 Principe général

L'approche récursive du filtrage permet l'estimation séquentielle d'un ensemble de paramètres à un instant donné, à partir des seules observations acquises jusqu'à cet instant. Cette approche a été initialement développée pour les systèmes de positionnement dynamique qui doivent fonctionner naturellement en temps réel. Les paramètres à estimer et les observations apparaissent donc sous la forme d'échantillons acquis à des instants fixés, mesurés sur la même base de temps. Considérons un profil gravimétrique débuté à l'instant t_a et terminé à l'instant t_b . Soient $t_1 = t_a, t_2, \dots, t_k, \dots, t_l = t_b$, les l instants d'échantillonnage pour lesquels les observations sont disponibles. Le vecteur des observations à l'instant t_k , $k \in \llbracket 1; l \rrbracket$, noté $\mathbf{M}_k$, est défini par :

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}(t = t_k), \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l. \quad (6.87)$$

De la même façon, le vecteur des paramètres à l'instant t_k , communément appelé *vecteur d'état*, noté $\mathbf{Y}_k$, est défini par :

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}(t = t_k), \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l. \quad (6.88)$$

À chaque instant d'échantillonnage, il existe une relation qui lie les observations aux paramètres dont une forme très générale s'écrit :

$$\mathbf{M}_k = F_k(\mathbf{Y}_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l, \quad (6.89)$$

où F_k est une fonction d'observation, qui dépend éventuellement du temps, et $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ représente l'erreur de mesure à l'instant t_k .

L'erreur de mesure $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ se modélise par une variable aléatoire vectorielle, si bien que la suite $(\boldsymbol{\varepsilon}_k)_k$ correspond à un processus aléatoire, appelé également *bruit de mesure*. Cette formulation conduit inévitablement à considérer la suite des vecteurs $(\mathbf{M}_k)_k$ comme un processus aléatoire.

Le problème de l'estimation des vecteurs $\mathbf{Y}_k$ avec la relation 6.89 revient à évaluer des valeurs de paramètres, avec une bonne approximation, à partir d'observations indirectes et bruitées. Le défi s'avère difficile à relever en gravimétrie mobile où le rapport signal sur bruit est particulièrement défavorable. Aussi, pour renforcer notre connaissance des paramètres, la relation 6.89 doit être complétée par un modèle de l'évolution temporelle du vecteur des paramètres. La forme générale de modèle peut s'exprimer par la relation de récurrence :

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \Phi_{k:k+1}(\mathbf{Y}_k) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l-1, \quad (6.90)$$

où $\mathbf{Y}_{k+1}$ et $\mathbf{Y}_k$ sont les vecteurs des paramètres mesurés respectivement aux instants t_{k+1} et t_k , $\Phi_{k:k+1}$ représente une fonction de transition de $\mathbf{Y}_k$ entre les instants t_k et t_{k+1} et $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ correspond à une erreur de modélisation la transition entre $\mathbf{Y}_k$ et $\mathbf{Y}_{k+1}$. Le processus aléatoire $(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)_k$ est appelé communément *bruit de modèle* ou *bruit de transition*.

En définitive, la formulation du problème de l'estimation du vecteur d'état $\mathbf{Y}_k$ se présente, à chaque instant t_k , sous la forme du système d'équations stochastiques suivant :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \mathbf{Y}_{k+1} &= \Phi_{k:k+1}(\mathbf{Y}_k) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \\ \mathbf{M}_k &= F_k(\mathbf{Y}_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k \end{cases} \quad (6.91)$$

Si $\bar{\mathbf{Y}}_k$ désigne un estimateur du vecteur d'état $\mathbf{Y}_k$ et $e_k(\bar{\mathbf{Y}}_k) = \mathbf{Y}_k - \bar{\mathbf{Y}}_k$, l'erreur d'estimation, le choix de l'estimateur optimal peut être celui qui minimise la norme de l'erreur selon une métrique induite sur l'espace des variables aléatoires vectorielles. Une telle norme s'exprime sous la forme :

$$\|e_k(\bar{\mathbf{Y}}_k)\|_{S_k} = \sqrt{\mathbb{E}(e_k^T S_k e_k)}, \quad (6.92)$$

où S_k est une matrice symétrique, définie et positive dont l'interprétation sera précisée dans l'annexe F (p. 421).

La détermination de l'estimateur optimal $\hat{\mathbf{Y}}_k$ se ramène donc à la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) : \min_{\bar{\mathbf{Y}}_k} \|e_k(\bar{\mathbf{Y}}_k)\|_{S_k} \quad \text{avec} \quad \|e_k(\bar{\mathbf{Y}}_k)\|_{S_k} = \sqrt{\mathbb{E}(e_k^T S_k e_k)}. \quad (6.93)$$

La résolution du problème $(\mathcal{P})$ peut prendre quatre formes différentes selon la nature du système $(\mathcal{S})$ et des bruits de mesure et de modèle.

1. Si, d'une part, les fonctions $\Phi_{k:k+1}$ et F_k sont des applications linéaires et, d'autre part, les bruits $(\boldsymbol{\varepsilon}_k)_k$ et $(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k)_k$ sont blancs, gaussiens et non corrélés, autrement dit, si :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_k &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R_k), \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q_k), \\ \mathbb{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_k \boldsymbol{\varepsilon}_j^T\right) &= R_k \delta_{kj} \quad \text{avec } \delta_{kj} = 0 \text{ pour } k \neq j \text{ et } \delta_{kk} = 1, \\ \mathbb{E}\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^T\right) &= Q_k \delta_{kj} \\ \mathbb{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_k \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^T\right) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

alors le *filtre de Kalman* fournit la solution du problème $(\mathcal{P})$ par filtrage linéaire des mesures $\mathbf{M}_k$.

2. Si les bruits ne sont plus supposés gaussiens alors, avec les mêmes hypothèses que précédemment, le filtre de Kalman est le seul filtre linéaire qui répond au problème $(\mathcal{P})$.
3. Si, de plus, les bruits de mesure et de modèle sont corrélés ou colorés, des modifications substantielles dans la formulation conduisent au filtre de Kalman à *bruits corrélés ou colorés*.
4. Enfin, si au moins l'une des fonctions parmi $\Phi_{k:k+1}$ et F_k est non linéaire, il faut employer une extension du filtre de Kalman au cas de systèmes stochastiques non linéaires, tel le *filtre de Kalman étendu*.

Les résultats essentiels relatifs au filtrage de Kalman et son extension aux systèmes non linéaires sont donnés dans l'annexe F (p. 421).

La mise en œuvre pratique du filtre de Kalman requiert quelques « ingrédients », notamment la fixation préalable des matrices de covariance R_k et Q_k des bruits de mesure et de modèle respectivement. En fait, le degré de lissage du vecteur d'état dépend fortement des valeurs contenues dans ces matrices. Dans le cas limite où la matrice R_k serait nulle et non la matrice Q_k , l'estimation du vecteur d'état ne tiendrait pas compte du modèle d'évolution, donnant les paramètres avec un degré de lissage nul. Dans le cas limite inverse ($Q_k = 0$, $R_k \neq 0$), l'estimation du vecteur d'état reposerait sur le seul modèle d'évolution, ce qui rendrait les mesures inutiles et le degré de lissage maximal. Ainsi, le contrôle du degré de lissage dans l'approche récursive s'effectue-t-il par le choix des deux matrices R_k et Q_k . Ces dernières jouent donc un rôle complètement analogue à la bande passante dans le filtrage classique et au rapport μ rencontré dans l'approche globale. Nous nous proposons, ci-après, d'illustrer l'application du filtre de Kalman en gravimétrie mobile vectorielle, à partir des données acquises en Méditerranée lors du lever marin « Sainte-Maxime 2006 » déjà évoqué au §6.1.4 (cf Tab. 6.1, p. 202 et Fig. 6.14, p. 204).

6.2.3.2.2 Exemple du lever marin « Sainte-Maxime 2006 »

Le lever « Sainte-Maxime 2006 » (Fig. 6.36) avait pour objectif de tester en mer le système de gravimétrie mobile vectorielle « Limo-g », qui sera décrit plus en détail au §6.3.2 (p. 279). Les profils qui composent le lever ont été choisis pour coïncider avec un assortiment issu de la campagne de gravimétrie marine « GM01 » (Fig. 6.38, p. 245) menée par le SHOM (LEQUENTREC-LALANCETTE et al., 2006), qui a aimablement fourni les mesures gravimétriques correspondantes.

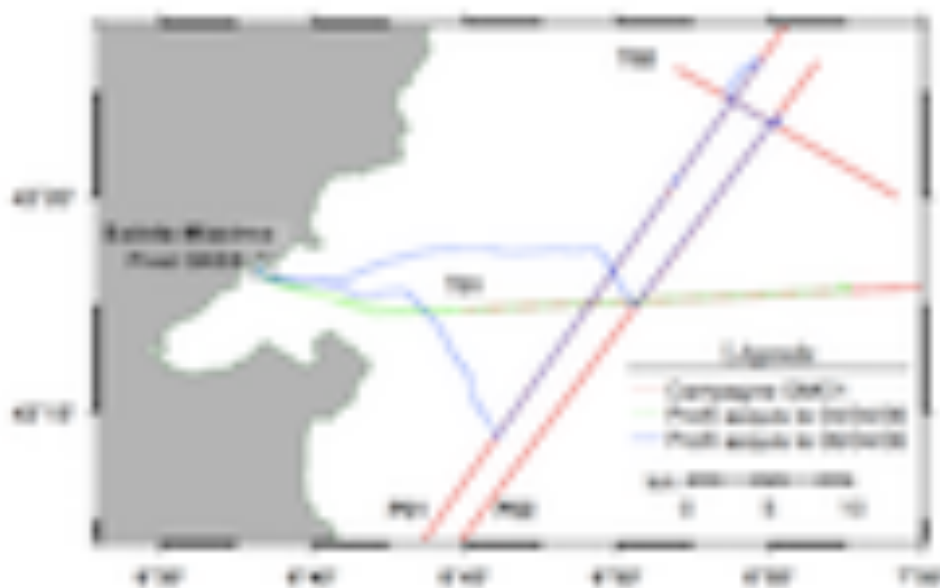


FIGURE 6.36 – Profils réalisés lors de la campagne « Sainte-Maxime 2006 » à bord d'une vedette hydrographique du SHOM équipée du système gravimétrique « LIMO-g ». Le port de mouillage, situé à Sainte-Maxime (83), a accueilli un récepteur GNSS bi-fréquence pour réaliser le positionnement différentiel de la vedette. Le lever comprend quatre profils au total qui se superposent partiellement aux profils P01, P02, T01 et T02 de la campagne GM01 du SHOM. La vitesse moyenne de navigation avait été fixée à 5 km/h.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Les données acquises par le système au cours de cette campagne ont permis notamment de mettre en œuvre un filtre de Kalman pour la gravimétrie mobile et d'en d'éprouver les performances en conditions réelles. Les illustrations de ce processus de traitement concerneront dorénavant le profil d'étude, défini sur la figure 6.37, qui consiste en une portion du profil T01 d'environ 8 km de longueur.

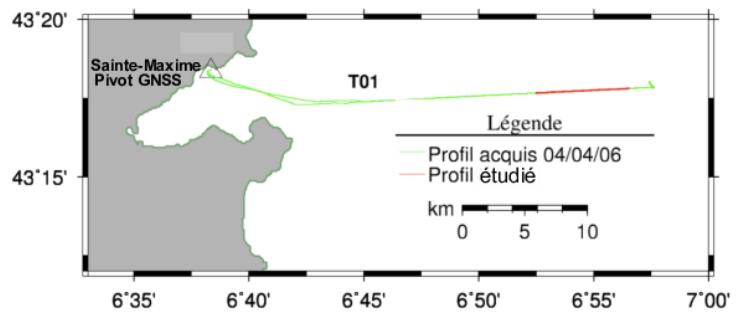


FIGURE 6.37 – Profil d'étude pour expérimenter le filtre de Kalman, constitué d'une portion du profil T01 d'environ 8 km de longueur.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

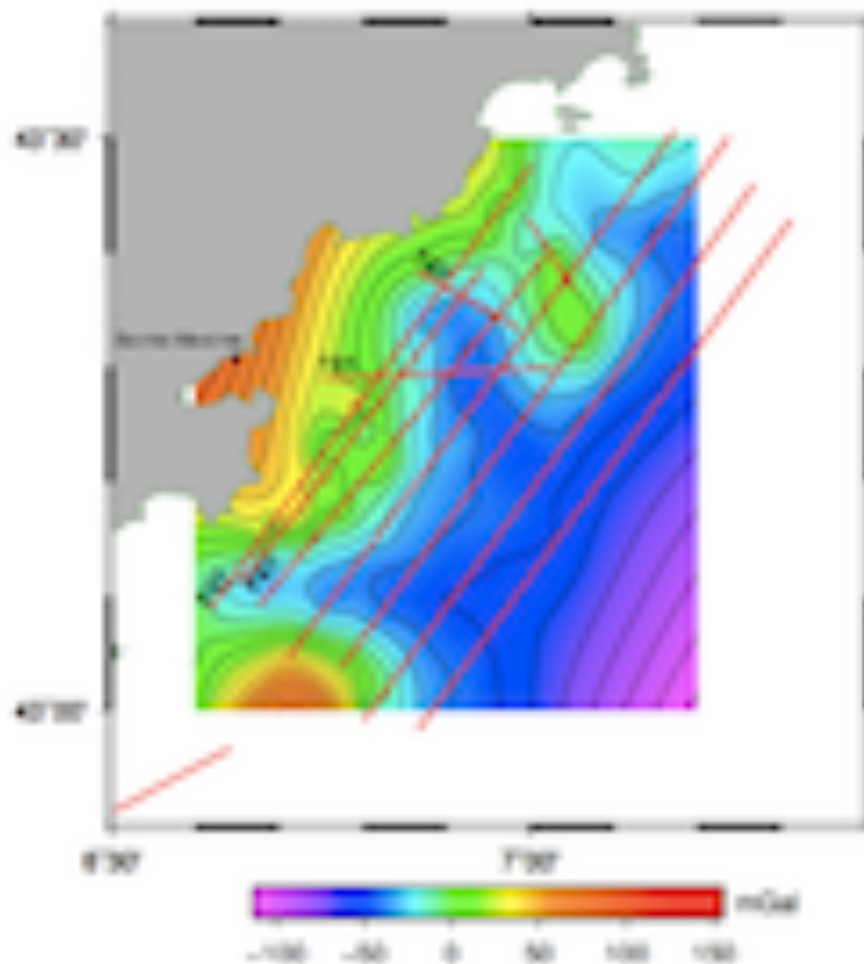


FIGURE 6.38 – Profils réalisés lors de la campagne gravimétrique GM01 en Méditerranée (LEQUENTREC-LALANCETTE et al., 2006). Les mesures scalaires de la pesanteur acquises durant ce lever, ont servi de référence pour éprouver les performances du système de gravimétrie mobile « Limog ». La grandeur représentée est l'anomalie à l'air libre qui présente une grande amplitude de variation dans cette région côtière de la Méditerranée, due à la présence d'une falaise sous-marine particulièrement abrupte.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Le lever a été réalisé par deux navigateurs du SHOM épaulé par un mécanicien à bord d'une vedette bathymétrique (Fig. 6.39). Le système « Limo-g » fournit les données suivantes :

- les trois composantes de l'accélération de rappel dans le repère s , $\bar{\mathbf{a}}^s$, issues d'un accéléromètre 3D rigidement fixé au porteur (Fig. 6.40, p. 247),
- les trois composantes du vecteur position $\bar{\mathbf{X}}^e$ dans le repère e obtenues par GNSS en mode différentiel (Fig. 6.41, p. 248),
- les trois angles d'attitude roulis $\bar{\eta}$, tangage $\bar{\chi}$ et lacet $\bar{\alpha}$ par un système GNSS à quatre antennes (Fig. 6.42, p. 249).

Les fréquences d'acquisition respectives de ces trois types de données sont respectivement 31,25 Hz (ou 62,5 Hz), 1 Hz et 2 Hz. L'ensemble des données est ré-échantillonné régulièrement à la fréquence de 1 Hz de sorte à disposer des observations toutes les secondes. Le vecteur $\mathbf{M}_k$ des observations disponibles à l'instant t_k s'exprime donc, de façon synthétique, par :

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_k^s \\ \bar{\mathbf{X}}_k^e \\ \bar{\eta}_k \\ \bar{\chi}_k \\ \bar{\alpha}_k \end{bmatrix}. \quad (6.94)$$

L'équation d'observation du système découle de la relation fondamentale de la gravimétrie mobile (Éq. 6.29, p. 191). En omettant pour l'instant le terme de bras de levier, cette équation d'observation s'écrit :

$$\mathbf{a}_k^s = C_b^s C_n^b C_e^n (\ddot{\mathbf{X}}_k^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_k^e) - C_b^s C_n^b \bar{\mathbf{g}}_k^n, \quad (6.95)$$

où $\bar{\mathbf{g}}_k^n$ est l'accélération de la pesanteur à l'instant t_k qui se décompose en une partie basse fréquence $\bar{\mathbf{g}}_{BFk}^n$ et une perturbation de pesanteur $\delta \mathbf{g}_k^n$ effectivement recherchée.



FIGURE 6.39 – Vedette du SHOM utilisée lors du lever « Sainte-Maxime 2006 ». L'instrumentation était montée à l'arrière sur une plate-forme dédiée.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

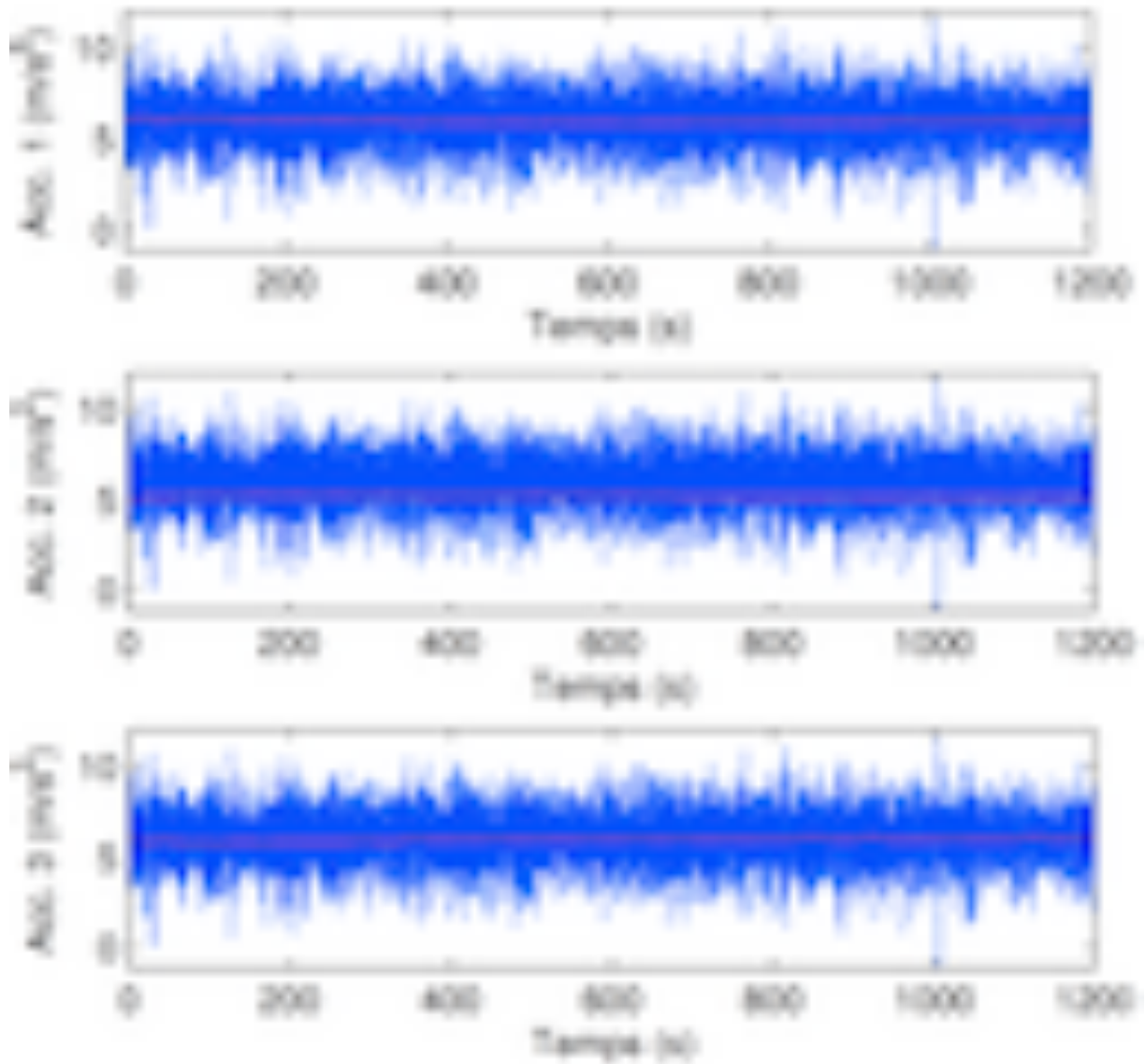


FIGURE 6.40 – Mesures dynamiques des trois composantes de l'accélération de rappel le long du profil d'étude, issues du capteur d'accélération qui équipe le système « Limo-g ». Les courbes rouges sont les variations d'accélération de rappel après un filtrage passe-bas à 0,02 Hz de bande passante. D'après De Saint-Jean, 2008 (*these4*).

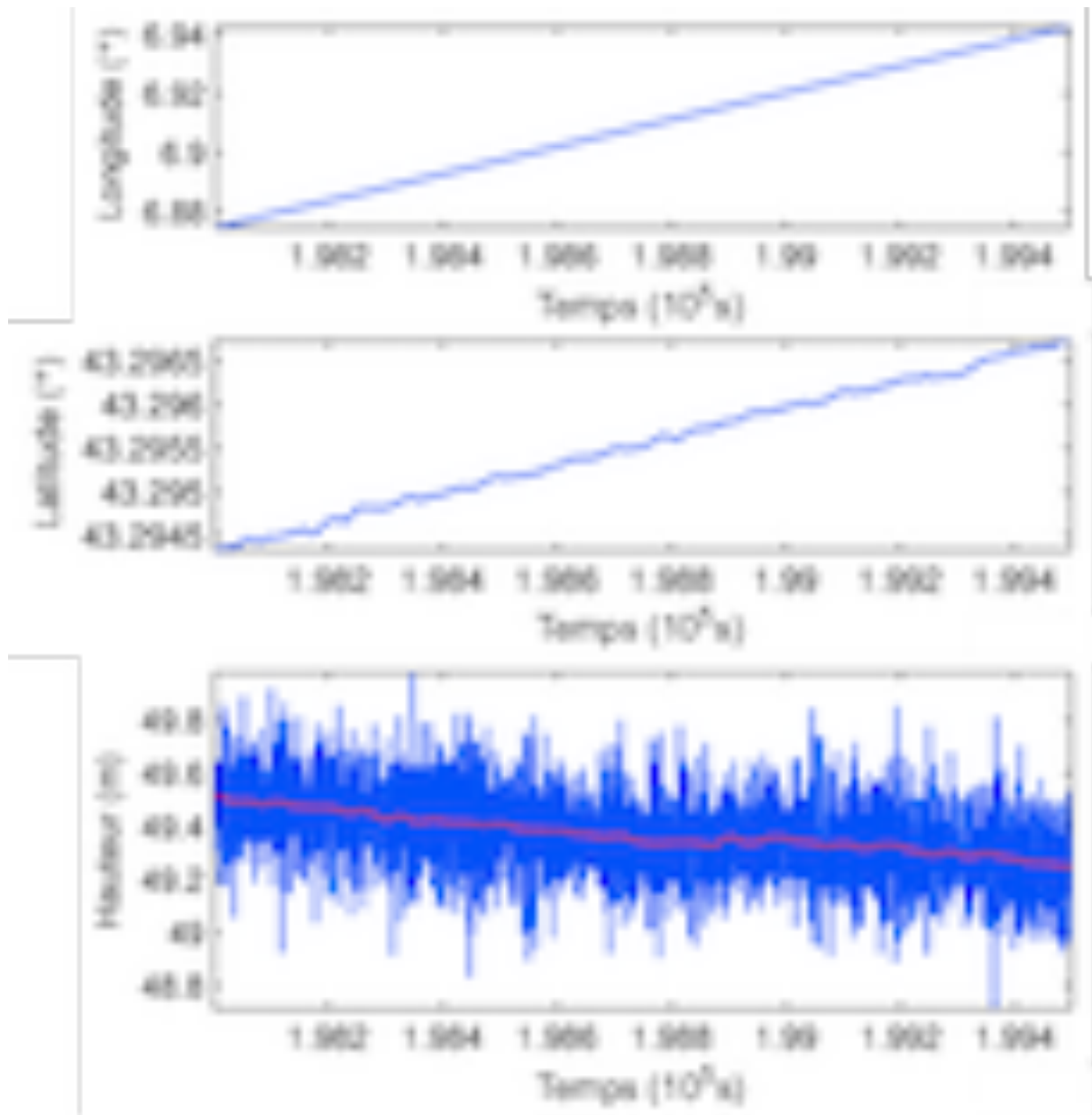


FIGURE 6.41 – Mesures dynamiques de la position de la vedette le long du profil d'étude, obtenues par positionnement GNSS différentiel. La courbe rouge visible sur le graphe de la hauteur au-dessus de l'ellipsoïde résulte du même filtrage passe-bas que celui appliqué à l'accélération de rappel (Fig. 6.40, p. 247).

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

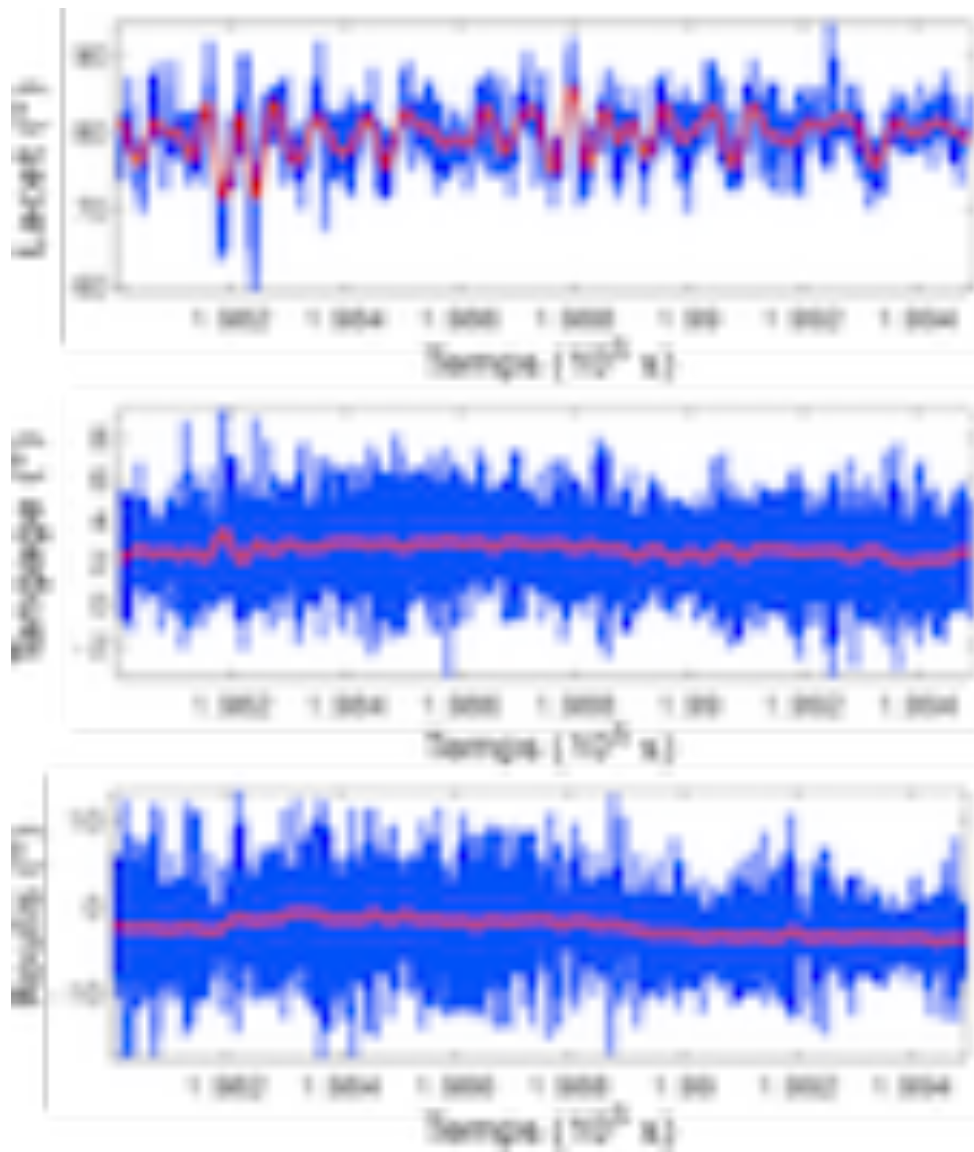


FIGURE 6.42 – Mesures dynamiques de l’attitude de la vedette le long du profil d’étude, obtenues par le système GNSS embarqué multi-antennes. Les courbes rouges sont les variations d’attitude qui résultent du même filtrage passe-bas que celui déjà appliqué à l’accélération de rappel (Fig. 6.40, p. 247) et aux mesures de position (Fig. 6.41, p. 248).

D’après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Hormis la matrice C_b^s constante et déterminée par étalonnage, les matrices C_n^b et C_e^n qui interviennent dans l'équation 6.95 (p. 246) dépendent respectivement de l'attitude et de la position du porteur (cf Annexe A, p. 403). Par conséquent, les angles d'attitude et le vecteur position font partie des grandeurs qui doivent être prises en compte dans le vecteur d'état au même titre que la perturbation de pesanteur à restituer. Le reste de la composition du vecteur d'état dépend du modèle de transition choisi pour décrire l'évolution temporelle des paramètres. Le choix effectué dans le travail de De Saint-Jean, 2008 (these4), a été de considérer l'accélération du porteur, les vitesses de changement d'attitude et la dérivée temporelle seconde de la perturbation de pesanteur comme constante entre les instants t_k et t_{k+1} .

Pour formuler mathématiquement ce modèle, il a fallu tout d'abord définir le vecteur d'état Y_k suivant :

$$Y_k = \begin{bmatrix} \ddot{X}_k^e \\ \dot{X}_k^e \\ X_k^e \\ \dot{\eta}_k \\ \dot{\chi}_k \\ \dot{\alpha}_k \\ \eta_k \\ \chi_k \\ \alpha_k \\ \delta \ddot{\mathbf{g}}_k^n \\ \delta \dot{\mathbf{g}}_k^n \\ \delta \mathbf{g}_k^n \end{bmatrix}. \quad (6.96)$$

Ce sont ici 24 paramètres qu'il faut déterminer à chaque instant d'échantillonnage. La fonction de transition choisie dans ce cas est définie de $\mathbb{R}^{24}$ dans $\mathbb{R}^{24}$ par :

$$\Phi_{k:k+1} : Y_k \mapsto \begin{bmatrix} \ddot{X}_k^e \\ \dot{X}_k^e + \ddot{X}_k^e (t_{k+1} - t_k) \\ X_k^e + \dot{X}_k^e (t_{k+1} - t_k) + \ddot{X}_k^e \left(\frac{1}{2} (t_{k+1} - t_k)^2 \right) \\ \dot{\eta}_k \\ \dot{\chi}_k \\ \dot{\alpha}_k \\ \eta_k + \dot{\eta}_k (t_{k+1} - t_k) \\ \chi_k + \dot{\chi}_k (t_{k+1} - t_k) \\ \alpha_k + \dot{\alpha}_k (t_{k+1} - t_k) \\ \delta \ddot{\mathbf{g}}_k^n \\ \delta \dot{\mathbf{g}}_k^n + \delta \ddot{\mathbf{g}}_k^n (t_{k+1} - t_k) \\ \mathbf{g}_k^n + \delta \dot{\mathbf{g}}_k^n (t_{k+1} - t_k) + \ddot{\mathbf{g}}_k^n \left(\frac{1}{2} (t_{k+1} - t_k)^2 \right) \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

La fonction de transition $\Phi_{k:k+1}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^{24}$ dans $\mathbb{R}^{24}$ puisque la relation entre les vecteurs d'état Y_{k+1} et Y_k peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\Phi_{k:k+1}(Y_k) = \Theta_{k:k+1} Y_k, \quad (6.98)$$

où $\Theta_{k:k+1}$ est la matrice carrée 24×24 définie par :

$$\Theta_{k:k+1} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ (t_{k+1} - t_k) I_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ \frac{1}{2}(t_{k+1} - t_k)^2 I_3 & (t_{k+1} - t_k) I_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & (t_{k+1} - t_k) I_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & (t_{k+1} - t_k) I_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & \frac{1}{2}(t_{k+1} - t_k)^2 I_3 & (t_{k+1} - t_k) I_3 & I_3 \end{bmatrix}, \quad (6.99)$$

où I_3 et 0_3 désignent respectivement la matrice identité et la matrice nulle de dimension 3×3 .

De par la relation 6.95 (p. 246), la fonction de mesure demeure non linéaire. Elle s'exprime par une fonction de $\mathbb{R}^{24}$ dans $\mathbb{R}^9$ qui s'écrit :

$$F_k : Y_k \mapsto \begin{cases} C_b^s C_n^b C_e^n (\ddot{X}_k^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}_k^e) - C_b^s C_n^b \bar{g}_{BFk}^n - C_b^s C_n^b \delta g_k^n \\ X_k^e \\ \eta_k \\ \chi_k \\ \alpha_k \end{cases}. \quad (6.100)$$

Compte tenu de la non linéarité du problème de filtrage ($\mathcal{S}$) ainsi formulé, De Saint-Jean (these4) a utilisé le filtrage de Kalman étendu en s'appuyant sur la linéarisation de la fonction de mesure F_k .

L'application du filtre de Kalman suppose le choix préalable des matrices de covariance R_k et Q_k respectives des bruits de mesure et de transition. En première approche, la matrice R_k de covariance du bruit de mesure peut être choisie diagonale et complétée par les variances des grandeurs mesurées selon les performances des capteurs (Tab. 6.8).

Grandeur		Écart-type
Position	X_x^e, X_y^e, X_z^e	0,05 m
Lacet	α	0,4°
Tangage, roulis	η, χ	0,2°
Accélération	a_x^s, a_y^s, a_z^s	0,1 mGal

TABLEAU 6.8 – Écarts-types des mesures ayant permis de déterminer les variances inscrites dans la matrice de covariance R_k . Ainsi définie, la matrice R_k est indépendante du temps. Les mesures sont également supposées non corrélées, ce qui rend la matrice R_k diagonale. L'écart-type des mesures de position correspond à l'incertitude de positionnement par les techniques du GNSS différentiel. Les écarts-types des capteurs d'orientation et d'accélération sont issues des caractéristiques données par le constructeur.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

La détermination de la matrice Q_k du bruit de transition s'avère plus délicate puisqu'elle requiert de présumer de la dispersion aléatoire des valeurs de paramètres par rapport à celles tirées d'un modèle d'évolution. Pour y parvenir, De Saint-Jean (these4) a utilisé une méthode empirique qui consiste, en premier lieu, à reproduire une suite approximative de vecteurs d'état $\bar{\mathbf{Y}}_k$, $k = 1, 2, \dots, l$ à partir des données acquises lors du lever, complétées par des données gravimétriques. Plus précisément, les vecteurs position $\mathbf{X}_k^e$ ont été identifiés à ceux déterminés par GNSS (Fig. 6.41, p. 248). Les vecteurs vitesse $\dot{\mathbf{X}}_k^e$ et accélération $\ddot{\mathbf{X}}_k^e$ ont été déduits des vecteurs position par différentiation numérique. De façon similaire, les angles d'attitude η_k , χ_k et α_k ont été assimilés aux valeurs données par le système GNSS multi-antennes (Fig. 6.42, p. 249) et leurs dérivées premières obtenues par calcul numérique. La perturbation de pesanteur $\delta \mathbf{g}_k^n$ étant bien évidemment inconnue, une détermination approximative en a été déduite à partir de données gravimétriques de référence du SHOM (Fig. 6.43) et d'un modèle de géopotential, duquel ont été tirées notamment les déviations de la verticale permettant le calcul des composantes horizontales de la perturbation. Les dérivées première $\delta \dot{\mathbf{g}}_k^n$ et seconde $\delta \ddot{\mathbf{g}}_k^n$ ont été obtenues, de façon analogue à la vitesse et l'accélération, par différentiation numérique.

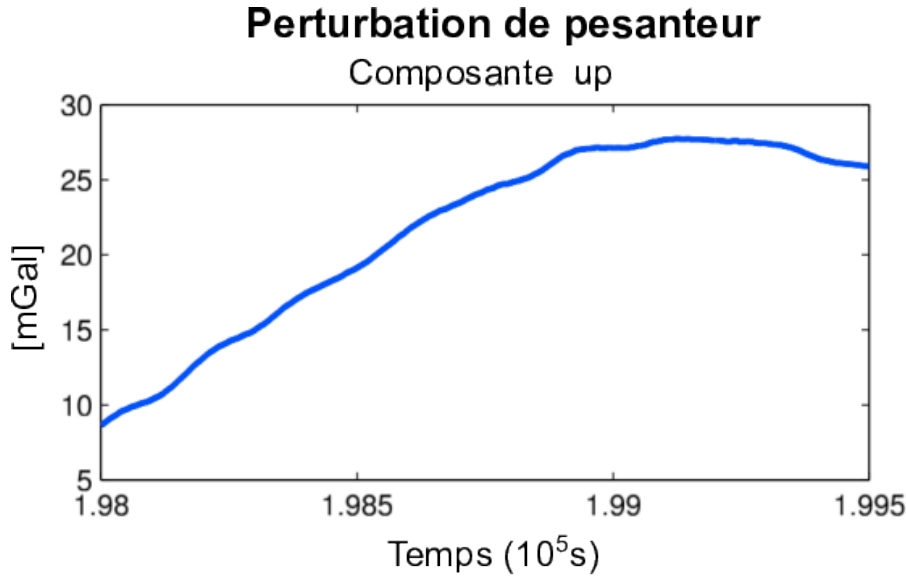


FIGURE 6.43 – Perturbation de pesanteur observable sur 2 km du profil d'étude, calculée à partir des données gravimétriques de la campagne G01 et ramenée sur une échelle de temps. Ce profil comporte les valeurs de référence auxquelles les données acquises par le système « Limo-g » vont pouvoir être comparées.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Muni de cette suite de vecteurs d'état, il est possible de déterminer une erreur de modélisation $\mathbf{e}_k$ donnée pour chaque instant t_k ⁴ par :

$$\mathbf{e}_k = \bar{\mathbf{Y}}_k - \Theta_{k-1:k} \bar{\mathbf{Y}}_{k-1}, \quad k = 1, \dots, l. \quad (6.101)$$

Chacune de ces erreurs correspond à une réalisation du bruit de transition. Dans l'hypothèse où ce dernier est stationnaire au second ordre, sa matrice de covariance Q_k ne dépend plus du temps ($Q_k = Q$ pour $k = 1, 2, \dots, l$).

4. À l'instant t_1 , l'erreur de modélisation est donnée par $\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{Y}}_1 - \Theta_{0:1} \bar{\mathbf{Y}}_0$ en supposant connu le vecteur d'état initial $\bar{\mathbf{Y}}_0$ à l'instant t_0

Dans ce cas, la suite des erreurs de modélisation $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_l$ permet d'obtenir une estimation empirique de $\bar{Q}$ de la matrice de covariance Q par les relations suivantes :

$$\mathbf{m}_Q = \sum_{i=1}^l \mathbf{e}_i \quad (6.102)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l (\mathbf{e}_i - \mathbf{m}_Q) (\mathbf{e}_i - \mathbf{m}_Q)^T. \quad (6.103)$$

Les écarts-types du bruit de transition qui affectent les différentes grandeurs du vecteur d'état ont été rassemblés dans la table 6.9 (p. 253).

Grandeur		Écart-type
Accélération (10^{-6} ms^{-2})	$\ddot{X}_x^e$	470
	$\ddot{X}_y^e$	196
	$\ddot{X}_z^e$	518
Vitesse (10^{-6} ms^{-1})	$\dot{X}_x^e$	117
	$\dot{X}_y^e$	49
	$\dot{X}_z^e$	129
Position (10^{-6} m)	X_x^e	19
	X_y^e	8
	X_z^e	21
Variations d'attitude ($10^{-6} \text{ deg s}^{-1}$)	Tangage $\dot{\eta}$	852
	Roulis $\dot{\chi}$	738
	Lacet $\dot{\alpha}$	10000
Attitude (10^{-6} deg)	Tangage η	213
	Roulis χ	184
	Lacet α	2000
Perturbation (2 ^e ordre) $\delta \ddot{\mathbf{g}}^n$ (10^{-12} ms^{-4})	$\delta \ddot{g}_E^n$	6
	$\delta \ddot{g}_N^n$	6
	$\delta \ddot{g}_U^n$	135000
Perturbation (1 ^{er} ordre) $\delta \dot{\mathbf{g}}^n$ (10^{-12} ms^{-3})	$\delta \dot{g}_E^n$	1
	$\delta \dot{g}_N^n$	1
	$\delta \dot{g}_U^n$	34000
Perturbation $\delta \mathbf{g}^n$ (10^{-15} ms^{-2})	δg_E^n	274
	δg_N^n	274
	δg_U^n	6×10^6

TABLEAU 6.9 – Écarts-types du bruit de transition qui affectent les composantes du vecteur d'état et déterminés à partir des éléments diagonaux de la matrice $\bar{Q}$ (cf Éqs. 6.102 et 6.103, p. 253). La matrice $\bar{Q}$, non diagonale, signale également l'existence de corrélations entre les composantes du vecteur d'état.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Une fois les matrices de covariance R_k et Q_k complètement définies et étant donné un vecteur d'état initial, l'application de l'algorithme du filtre de Kalman permet d'obtenir, à chaque instant t_k , le vecteur d'état estimé $\hat{Y}_k$ et sa matrice de covariance P_k . Afin d'éprouver le bon fonctionnement du filtre de Kalman, indépendamment de tout problème d'étalonnage des capteurs d'accélération, De Saint-Jean (these4) a généré sur chaque profil l'accélération $\mathbf{a}^s$ à l'aide de l'équation d'observation 6.95 (p. 246), étant donné les mesures de position et d'orientation réelles (Figs. 6.41 et 6.42, pp. 248 et 249) et une modélisation de l'accélération de la pesanteur issue des mesures de la campagne GM01 (Fig. 6.43, p. 252) complétées par un modèle de géopotential pour les composantes horizontales de la pesanteur. Un bruit blanc gaussien d'écart-type 1 mGal a également été ajouté pour tenir compte du bruit de mesure. Ces données, qualifiées de *semi-synthétiques*, simulent le cas idéal où la courbe d'étalonnage du capteur d'accélération et la matrice de passage du repère s au repère b seraient parfaitement connues.

En outre, avant l'application du filtre de Kalman, l'ensemble des données de position, d'orientation et d'accélération est préalablement filtré par un filtre passe-bas dont la bande passante s'étend jusqu'à 0,02 Hz. Ce pré-filtrage permet d'éliminer la majeure partie des parasites de très haute fréquence, telles les vibrations du moteur, qui perturbent les mesures d'accélération (Fig. 6.44). Une fréquence de coupure à 0,02 Hz à la vitesse d'acquisition de 5 km/h correspond à une longueur d'onde acquise minimum égale à $5000/(3600 \times 0,02)$, soit environ 69 m. Aucune variation du champ de pesanteur de longueur d'onde inférieure à 69 m, ne pourra donc être restituée suite à ce filtrage.

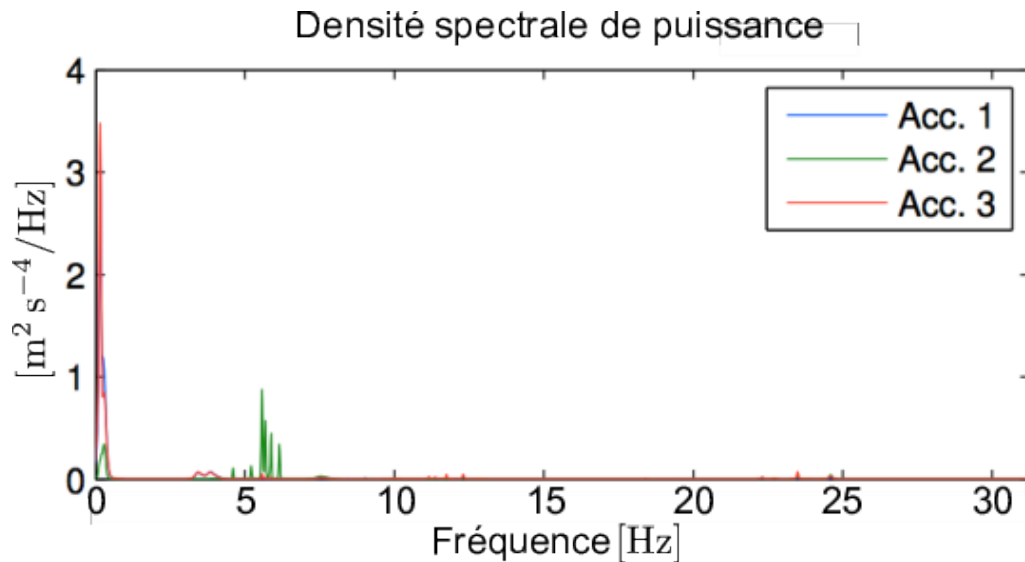


FIGURE 6.44 – Densités spectrales de puissance des trois composantes de l'accélération de rappel mesurées sur le profil d'étude. La densité est non nulle dans la gamme [4 Hz, 10 Hz] de par la nuisance due aux vibrations du moteur de la vedette.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

La figure 6.45 montre les estimations de la composante « up » obtenues par filtrage de Kalman « aller » et « retour » sur une distance de 2 km le long du profil d'étude. La dispersion des estimations, qui se traduit par des oscillations autour du profil de référence, peut être grandement compensée en calculant une estimation qui consiste en une combinaison linéaire des estimations « aller » et « retour ». Plus précisément, si $\hat{\mathbf{Y}}_k^r$ et P_k^r désignent respectivement l'estimation du vecteur d'état par filtrage « retour » et sa matrice de covariance⁵, alors l'estimation combinée $\hat{\mathbf{Y}}_k^c$ à l'instant t_k s'écrit :

$$\hat{\mathbf{Y}}_k^c = \left[(P_k)^{-1} + (P_k^r)^{-1} \right]^{-1} \left[(P_k)^{-1} \hat{\mathbf{Y}}_k + (P_k^r)^{-1} \hat{\mathbf{Y}}_k^r \right], \quad (6.104)$$

où la matrice $\left[(P_k)^{-1} + (P_k^r)^{-1} \right]^{-1}$ est aussi la matrice de covariance de l'estimation combinée. Ce faisant, cette combinaison pondère les contributions des estimations « aller » et « retour » par leurs dispersions respectives.

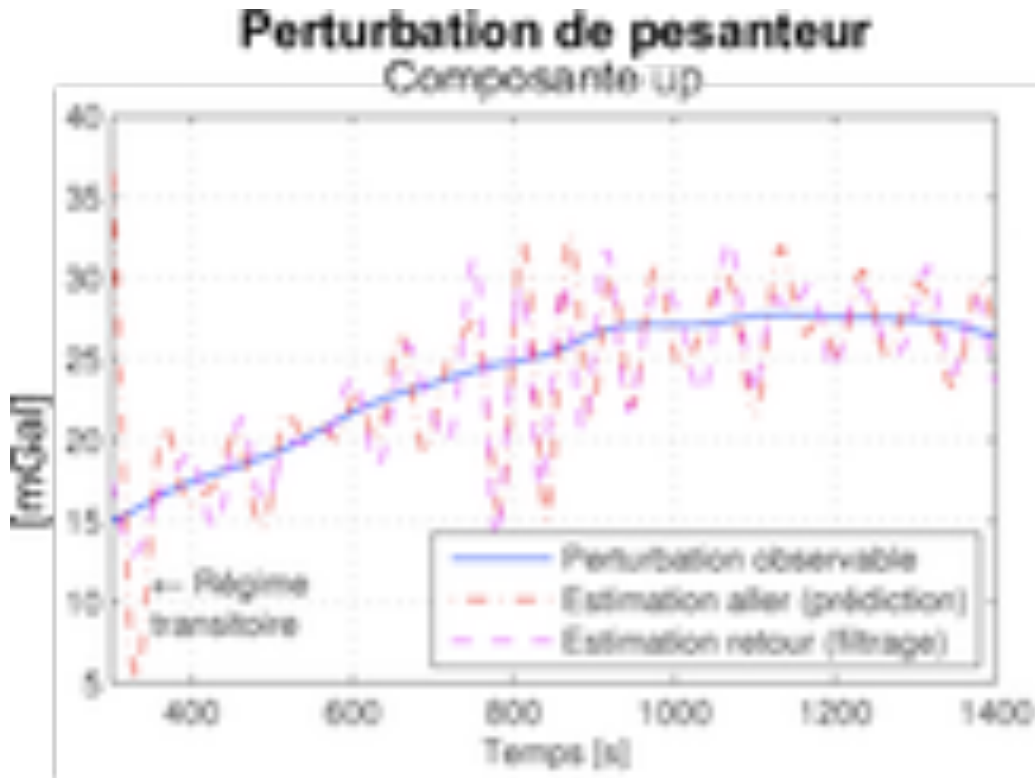


FIGURE 6.45 – Résultat de l'estimation de la composante « up » de la perturbation de pesanteur δg_U^n le long du profil d'étude par filtrage de Kalman. Le filtrage « aller » utilise les données prises dans l'ordre chronologique à partir d'un état initial arbitraire. Il s'ensuit la présence d'un régime transitoire avant le fonctionnement normal du filtre. Le filtrage « retour » considère les données dans le sens inverse de l'ordre chronologique et utilise le dernier vecteur d'état estimé par le filtrage « aller » comme état initial. La régime transitoire, s'il existe, voit alors sa durée fortement diminuée. Les estimations « aller » et « retour » apparaissent dispersées par rapport à la perturbation de référence. Cette dispersion est quantifiée par la matrice de covariance fournie à chaque instant par le filtre. La non coïncidence des estimations « aller » et « retour » est aussi une conséquence de la dispersion de leurs valeurs.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

5. Le filtrage « retour » suppose l'utilisation des données de l'instant t_l à l'instant t_{k+1} .

La figure 6.46 qui montre la perturbation de pesanteur résultant de l'estimation combinée, atteste sa bonne adéquation avec la perturbation de référence. En revanche, l'intervalle de confiance de cette estimation, déduit de la matrice de covariance, est beaucoup trop large, d'où une surestimation de l'incertitude sur la perturbation de pesanteur. Ce phénomène indique vraisemblablement un défaut dans la pondération relative des bruits de mesure et de transition. Ce problème de pondération, déjà rencontré dans l'approche globale, n'est pas insurmontable sous réserve de trouver une méthode adéquate de pondération.

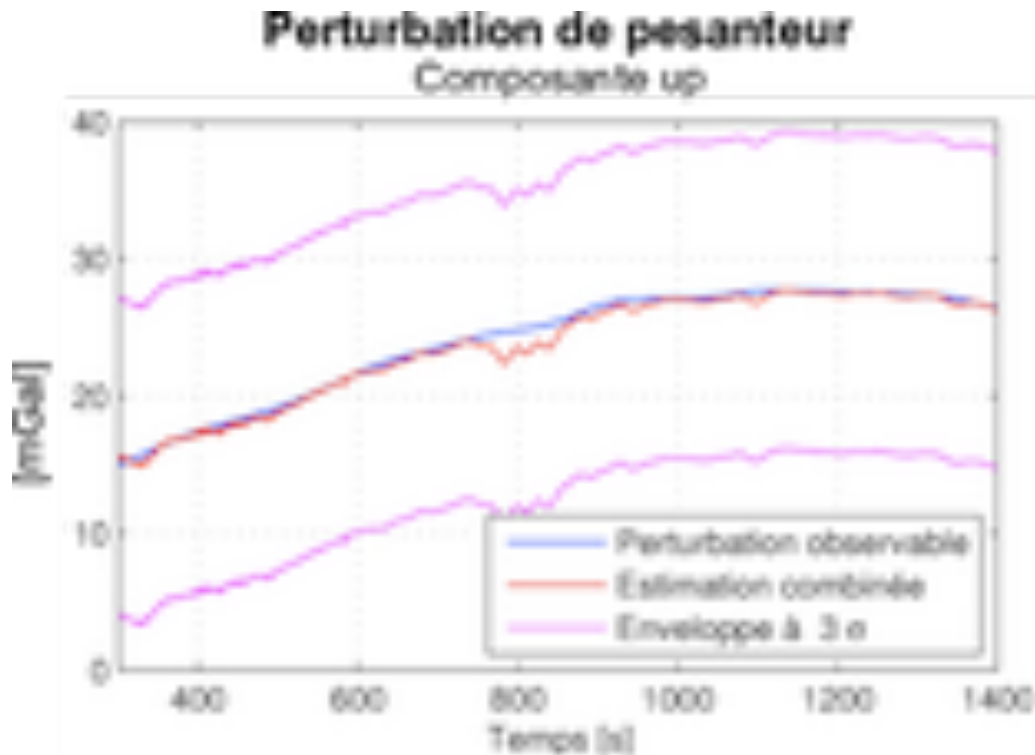


FIGURE 6.46 – Résultat de l'estimation de la composante « up » de la perturbation de pesanteur (δg_U^n) le long du profil d'étude après combinaison linéaire des estimations « aller » et « retour ». Une bonne adéquation apparaît sans conteste entre l'estimation (courbe rouge) et la référence (courbe bleu), confirmée par étude statistique des 2 199 écarts au profil de référence qui a donné une moyenne à -0,34 mGal avec un écart-type 0,42 mGal. En revanche, la variance donnée par le filtre de Kalman, illustrée par l'intervalle de confiance à 3σ est très largement surestimée (± 10 mGal), signe d'un défaut de la pondération relative des mesures (matrice R_k) et du modèle d'évolution (matrice Q_k).

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Par contre, un phénomène plus inquiétant affecte les estimations des composantes horizontales « east » et « north » de la perturbation de pesanteur (Fig. 6.47) : l'intervalle de confiance voit sa largeur augmenter au cours du temps. Cette dispersion croissante de l'estimation donnée par la matrice de covariance, signale la divergence du filtre qui commence à être perceptible en fin de profil. Cette divergence est seulement retardée si les données comprennent des mesures gyrométriques complémentaires (Fig. 6.48, p. 258). Le filtre de Kalman ainsi constitué permet donc seulement la restitution fiable d'une composante de la perturbation de pesanteur, ce qui est insuffisant pour la gravimétrie vectorielle.

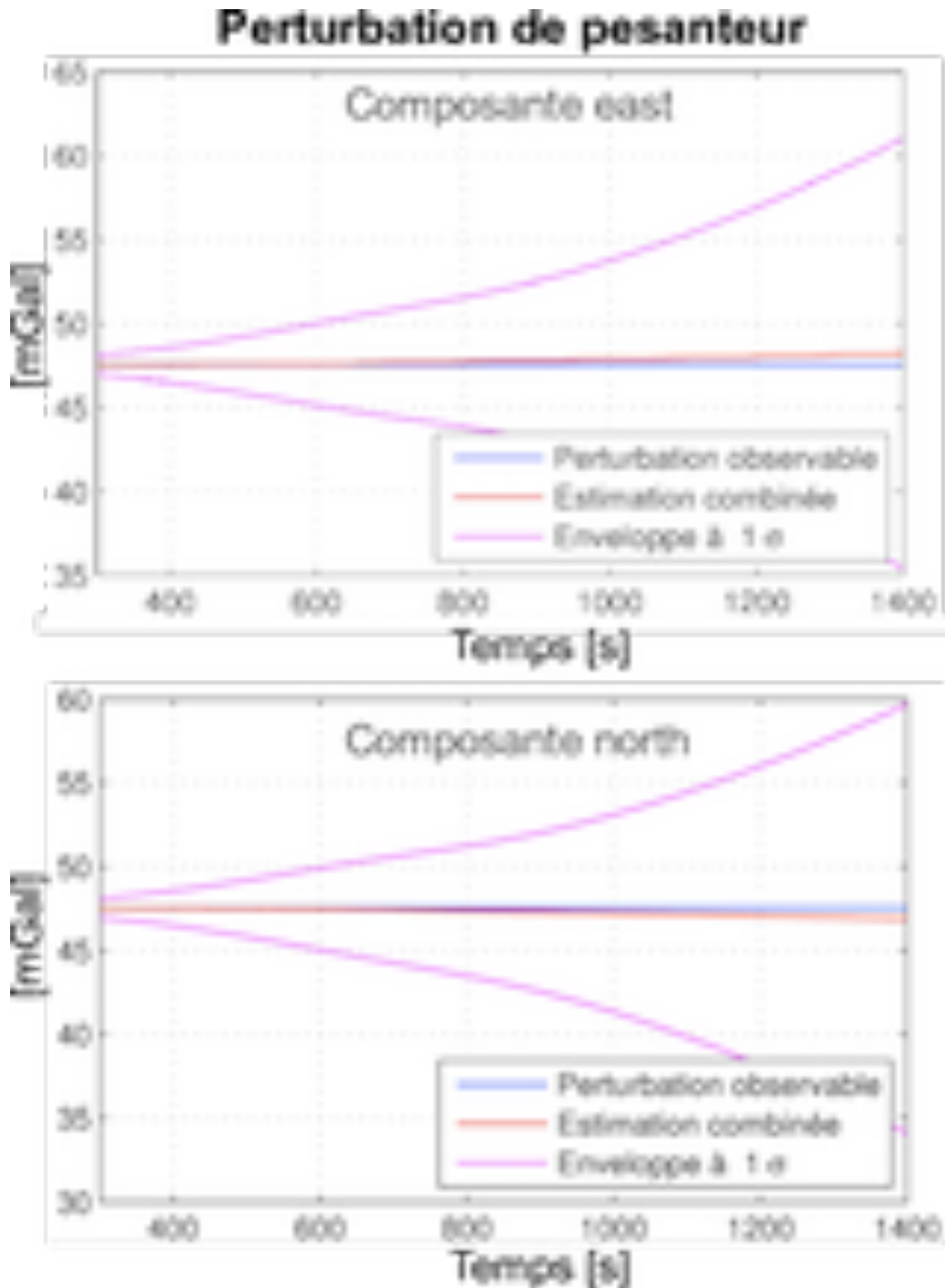


FIGURE 6.47 – Résultat de l'estimation des composantes horizontales « east » et « north » de la perturbation de pesanteur (δg_E^n et δg_N^n) le long du profil d'étude après combinaison linéaire des estimations « aller » et « retour ». Bien que les profils estimés et les références s'accordent de façon acceptable sur cette portion de profil (moyenne des écarts à 0,26 mGal et -0,25 mGal assortis d'écarts-types à 0,21 mGal et 0,20 mGal pour les composantes « east » et « north » respectivement), la divergence parfaitement reconnaissable de l'intervalle de confiance à 1 σ , indique l'instabilité du filtre ce qui le rend inopérant pour la restitution des composantes horizontales de la gravité.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

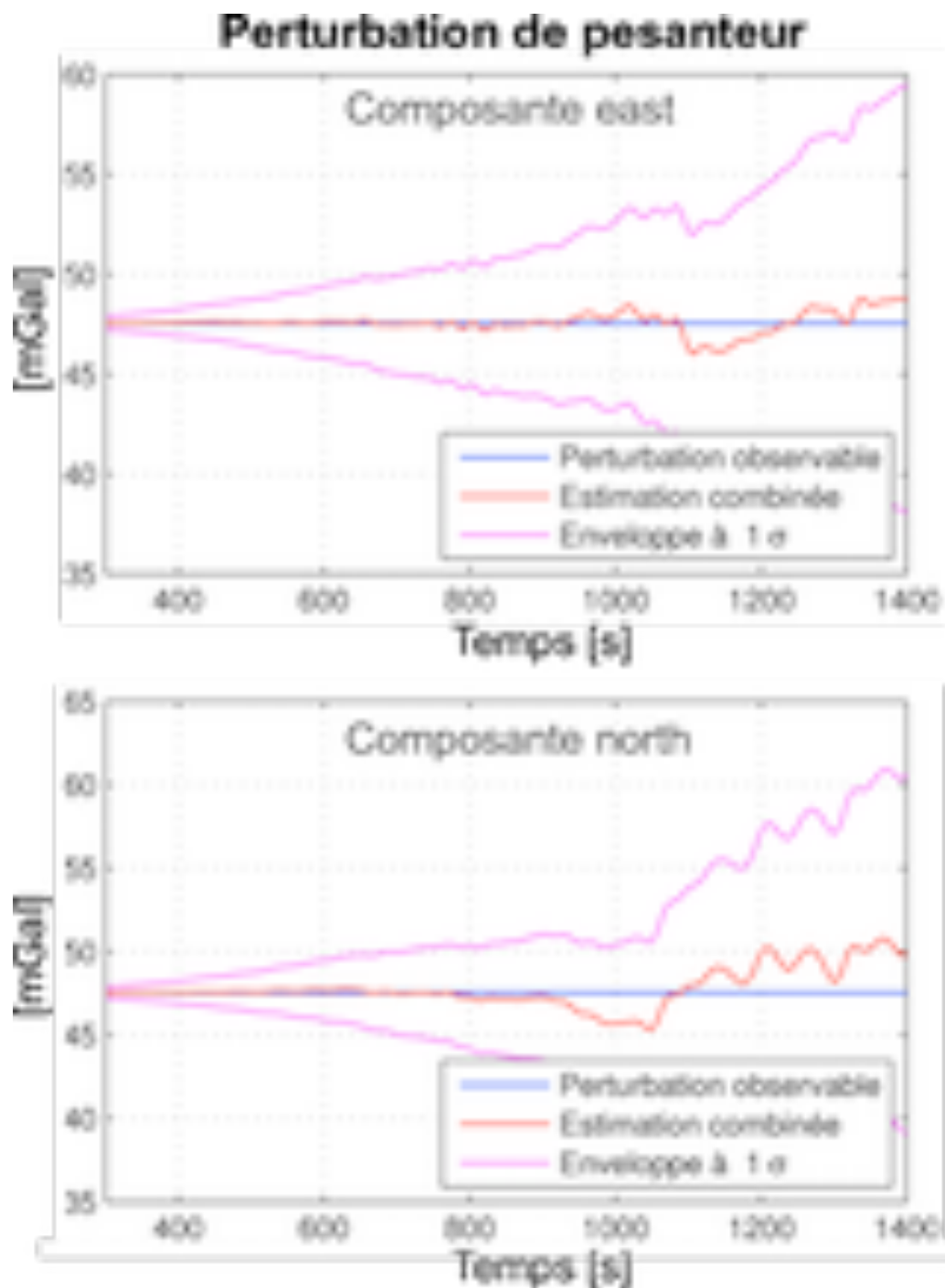


FIGURE 6.48 – Résultat de l'estimation des composantes horizontales « east » et « north » de la perturbation de pesanteur (δg_E^n et δg_N^n) le long du profil d'étude après combinaison linéaire des estimations « aller » et « retour » en supposant la disponibilité de mesures gyrométriques complémentaires. L'incertitude des mesures de vitesse angulaire a été fixée à $3.10^{-4} \text{ deg s}^{-1}$, ce qui situe le grade des gyromètres susceptibles d'atteindre ces performances au niveau supérieur. Les estimations des composantes « east » et « north » présentent une divergence, certes moins régulière que dans le cas du système non équipé de gyromètres (Fig. 6.47, p. 257), mais qui indique néanmoins la déstabilisation du filtre de Kalman.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

En fait, la formulation du filtre de Kalman implique que le modèle de mesure est complètement déterminé une fois la configuration instrumentale fixée. Le seul levier sur lequel jouer pour espérer stabiliser le filtre reste le modèle de transition, et plus particulièrement, les équations d'évolution de la perturbation de pesanteur. La faiblesse de la fonction de transition définie par l'équation 6.97 (p. 250) provient de ce que l'hypothèse sous-jacente qui stipule la constance de la dérivée seconde de perturbation de pesanteur, n'a pas de fondement physique. Pour tenir compte de la connaissance a priori que nous avons du champ de pesanteur, une reformulation plus générale du modèle d'évolution s'avère indispensable, ce que nous nous proposons de décrire à présent.

6.2.3.2.3 Vers des modèles réalistes d'évolution de la gravité

Le problème de la détermination d'un modèle d'évolution réaliste de la gravité pour le filtrage de Kalman de données gravimétriques, a été abordé dans les travaux de Damenet, 2012 (M2[6]) et publié dans Verdun et al., 2013 (acti2). En considérant à nouveau le système d'équations stochastiques du filtre de Kalman (Éq. 6.91, p. 243) et la fonction de transition $\Phi_{k:k+1}$ (Éq. 6.97, p. 250) proposée par De Saint-Jean (these4), il est possible d'écrire l'équation d'évolution de la perturbation de pesanteur observable le long d'un profil sous la forme :

$$\frac{\delta \ddot{\mathbf{g}}_{k+1}^n - \delta \ddot{\mathbf{g}}_k^n}{t_{k+1} - t_k} = \tilde{\mathbf{e}}'_k, \quad (6.105)$$

où $\tilde{\mathbf{e}}'_k$ représente un bruit blanc.

Cette dernière équation peut être vue comme la version discrétisée de l'équation d'évolution à temps continue suivante :

$$\frac{d \delta \ddot{\mathbf{g}}^n}{dt} = \frac{d^3 \delta \mathbf{g}^n}{dt^3} = \tilde{\mathbf{e}}'(t), \quad (6.106)$$

où t représente le temps et $\tilde{\mathbf{e}}'(t)$ un bruit blanc à temps continu.

Le modèle d'évolution considère donc la dérivée temporelle troisième de la perturbation de pesanteur le long d'un profil égale à un bruit blanc. Cette dérivée temporelle s'identifie à une dérivée spatiale en présumant la vitesse d'acquisition constante, ce qui se vérifie très couramment en pratique. En appelant L l'abscisse curviligne le long du profil, V , la vitesse d'acquisition et en supposant $L(t=0) = 0$, l'équation 6.106 peut s'écrire :

$$\frac{d^3 \delta \mathbf{g}^n}{dL^3} = \frac{1}{V^3} \tilde{\mathbf{e}}'(L). \quad (6.107)$$

Comme nous allons montrer ci-après, une grandeur telle $\delta \mathbf{g}^n$ qui satisfierait l'équation 6.107 posséderait une fonction de covariance qui ne s'annulerait pas à l'infini, autrement dit présenterait une longueur de corrélation infinie. Cette propriété de la fonction de covariance n'est pas physiquement acceptable pour l'anomalie de gravité et la perturbation de pesanteur comme l'attestent, par exemple, les figures 6.31 et 6.32 (p. 233 et p. 235).

Un raffinement du modèle d'évolution spatiale de la perturbation de pesanteur peut s'obtenir en remarquant que l'équation 6.107 (p. 259) découle d'un modèle d'évolution plus général qui s'écrit sous la forme de l'équation différentielle linéaire d'ordre p suivante :

$$\frac{d^p \delta \mathbf{g}^n}{dL^p} + a_{p-1} \frac{d^{p-1} \delta \mathbf{g}^n}{dL^{p-1}} + \cdots + a_k \frac{d^k \delta \mathbf{g}^n}{dL^k} + \cdots + a_1 \frac{d \delta \mathbf{g}^n}{dL} + a_0 \delta \mathbf{g}^n = \mathbf{w}(L), \quad (6.108)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_{p-1}$ sont p coefficients réels constants et $\mathbf{w}$ est un bruit blanc.

Dans le cas où $\mathbf{w}$ est gaussien, la perturbation $\delta \mathbf{g}^n$ correspond alors à un *processus aléatoire vectoriel de Gauss-Markov* d'ordre p . L'équation 6.107 décrit donc un processus de Gauss-Markov d'ordre 3 pour lequel $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Une catégorie particulière de modèles de Gauss-Markov à coefficients liés, présente d'intéressantes propriétés pour l'expression de la covariance spatiale; ils sont tels que les coefficients $a_k, k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ dans l'équation 6.108, vérifient la relation :

$$a_k = \binom{p}{k} \beta^{p-k}, \quad \text{pour } k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket \quad (6.109)$$

où β est un réel positif.

Par exemple, un tel processus de Gauss-Markov d'ordre 3 est défini par les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} a_0 &= \binom{3}{0} \beta^3 = \beta^3, \\ a_1 &= \binom{3}{1} \beta^2 = 3\beta^2, \\ a_2 &= \binom{3}{2} \beta = 3\beta. \end{aligned}$$

La relation 6.108 qui définit ce processus s'écrit alors :

$$\frac{d^3 \delta \mathbf{g}^n}{dL^3} + 3\beta \frac{d^2 \delta \mathbf{g}^n}{dL^2} + 3\beta^2 \frac{d \delta \mathbf{g}^n}{dL} + \beta^3 \delta \mathbf{g}^n = \mathbf{w}(L). \quad (6.110)$$

Le passage à une expression temporelle de cette équation s'effectue aisément en utilisant la relation de dérivation $\frac{d^k \dots}{dL^k} = \frac{1}{V^k} \frac{d^k \dots}{dt^k}$, où V est la vitesse de lever supposée constante. L'expression temporelle de l'équation 6.110 devient ainsi, en multipliant chaque membre par V^3 :

$$\frac{d^3 \delta \mathbf{g}^n}{dt^3} + 3\beta V \frac{d^2 \delta \mathbf{g}^n}{dt^2} + 3\beta^2 V^2 \frac{d \delta \mathbf{g}^n}{dt} + \beta^3 V^3 \delta \mathbf{g}^n = V^3 \mathbf{w}(t). \quad (6.111)$$

Remarquons que la suite des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, a_p$ correspond également à la suite des termes dans le développement du polynôme $(\beta+1)^p$ dans l'ordre des puissances décroissantes selon β . Damenet (M2[6]) a montré que, dans ce cas, la fonction de covariance $C_{\delta \mathbf{g}}(L)$, de dimension 3×3 du processus aléatoire de Gauss-Markov $\delta \mathbf{g}^n = [\delta g_E^n, \delta g_N^n, \delta g_U^n]^T$ est donnée par :

$$C_{\delta \mathbf{g}}(L) = C_{\mathbf{w}} P_{p-1, \beta}(L) e^{-\beta L}, \quad (6.112)$$

où $C_{\mathbf{w}}$ est la matrice 3×3 de covariance du bruit blanc gaussien $\mathbf{w}$, au second membre de l'équation 6.108, $P_{p-1, \beta}(L)$ est un polynôme en L de degré $p-1$ dont les coefficients ne dépendent que de β .

Le tableau 6.10 rassemble les expressions des fonctions $R_{p,\beta}(L) = P_{p-1,\beta}(L) e^{-\beta L}$ pour tous les ordres p de 1 à 6 dont les graphes sont représentés sur la figure 6.49.

Ordre p	Fonction $R_{p,\beta}(L)$
1	$\frac{1}{2\beta}$
2	$\frac{1}{4\beta^3} (1 + \beta L)$
3	$\frac{3}{16\beta^5} (1 + \beta L + (1/3)(\beta L)^2)$
4	$\frac{15}{96\beta^7} (1 + \beta L + (2/5)(\beta L)^2 + (1/15)(\beta L)^3)$
5	$\frac{105}{768\beta^9} (1 + \beta L + (3/7)(\beta L)^2 + (2/21)(\beta L)^3 + (1/105)(\beta L)^4)$
6	$\frac{945}{7680\beta^{11}} (1 + \beta L + (4/9)(\beta L)^2 + (1/9)(\beta L)^3 + (1/63)(\beta L)^4 + (1/945)(\beta L)^5)$

TABLEAU 6.10 – Fonctions de pondération de la matrice de covariance d'un processus de Markov d'ordre p à coefficients liés.

D'après Verdun et al., 2013 (acti2).

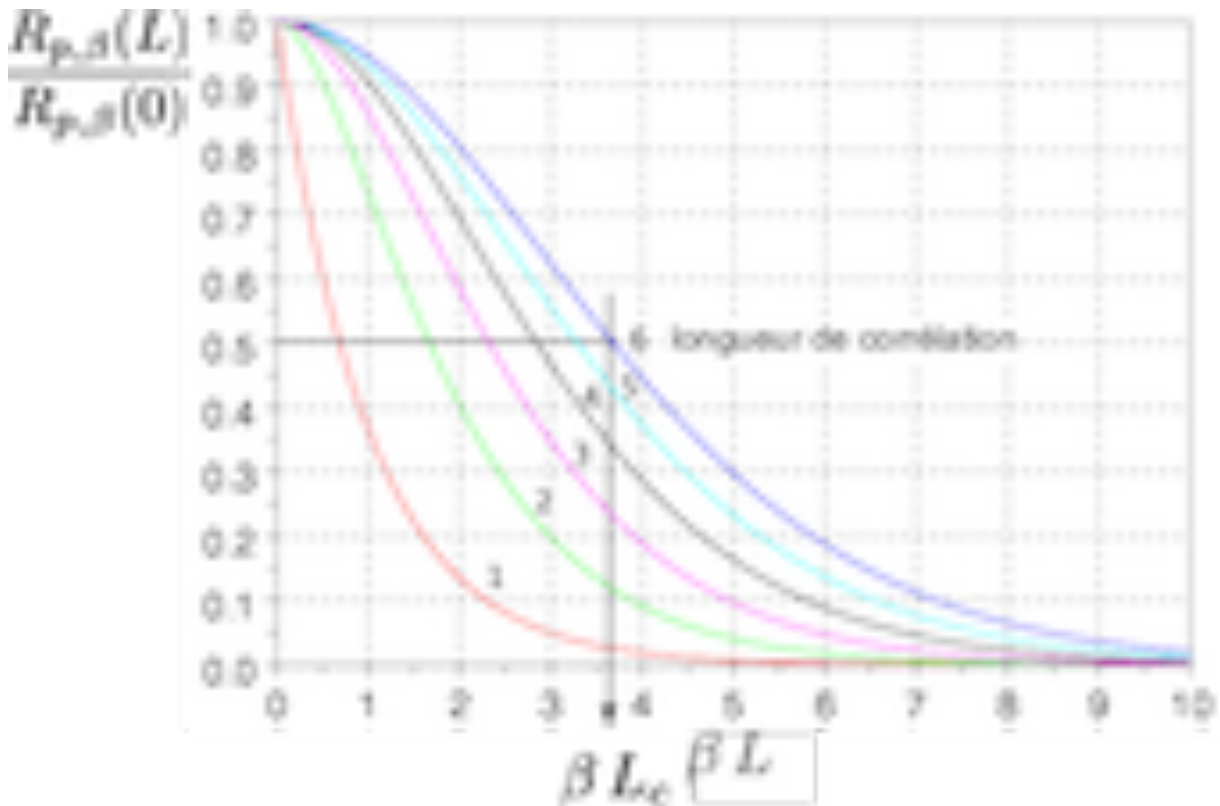


FIGURE 6.49 – Graphes des fonctions de pondération de la matrice de covariance d'un processus de Markov d'ordre p à coefficients liés.

D'après Verdun et al., 2013 (acti2).

Pour un ordre p donné, les variances et covariances issues de la matrice de covariance $C_{\delta \mathbf{g}}(L)$ sont toutes proportionnelles à la même fonction $R_{p,\beta}(L)$ qui joue le rôle d'une fonction de pondération. Lorsque l'ordre p varie de 1 à 6, les fonctions $R_{p,\beta}(L)$ sont six fonctions positives, monotones décroissantes en fonction de la longueur L , de limite nulle en l'infinie. En appelant « longueur de corrélation », le plus petit réel positif L_c tel que :

$$R_{p,\beta}(L) = \frac{1}{2} R_{p,\beta}(0),$$

le calcul montre que le produit βL_c égale une constante qui dépend de l'ordre du processus de Gauss-Markov considéré (Tab. 6.11). Ainsi, pour un ordre donné, la longueur de corrélation est-elle d'autant plus grande que β est faible. En reprenant le cas du modèle de De Saint-Jean (these4), l'identification des coefficients de l'équation 6.106 (p. 259) avec ceux donnés par la relation 6.109 (p. 260) conduit à $\beta = 0$, ce qui donne effectivement une longueur de corrélation infinie.

Ordre p	1	2	3	4	5	6
Produit βL_c	0.693	1.68	2.33	2.85	3.29	3.69

TABEAU 6.11 – Valeur du produit βL_c pour tous les ordres p compris entre 1 et 6.
D'après Verdun et al., 2013 (acti2).

Le problème qui se pose à présent concerne la possibilité de déterminer un modèle de Gauss-Markov de l'évolution de $\delta \mathbf{g}^n$ dont la fonction de covariance corresponde avec celle de la pesanteur. Cette détermination nécessite de trouver l'ordre p , le paramètre de corrélation β ainsi que les six éléments indépendants parmi les neuf que comporte la matrice de covariance C_w . Plus exactement, les trois éléments diagonaux de la matrice de covariance $C_{\delta \mathbf{g}}(L)$ correspondent aux fonctions d'autocovariance respectives des composantes « East » δg_E^n , « North » δg_N^n et « Up » δg_U^n . La matrice $C_{\delta \mathbf{g}}(L)$ étant symétrique, seuls les termes non diagonaux supérieurs (ou inférieurs) doivent être déterminés. Ces derniers s'identifient aux trois fonctions de covariance croisée différentes qu'il est possible de former avec les composantes δg_E^n , δg_N^n et δg_U^n . La méthode utilisée dans Damenet (M2[6]) et Verdun et al. (acti2) consiste à calculer des estimations empiriques locales des trois fonctions d'autocovariance et de covariance croisée à partir des valeurs issues d'un modèle de géopotential sur une région englobant la zone de lever (Fig. 6.50, p. 263). Puis, pour un ordre p donné, il est possible d'ajuster sur chacune des six estimations, les valeurs du paramètre de corrélation β et des six éléments de la matrice C_w par moindres carrés. Ces six estimations ne donnant pas forcément des valeurs égales du paramètre β (Tab. 6.12, p. 264), un nouvel ajustement des éléments de la matrice C_w pour une valeur commune de β est requise. Le choix du modèle adéquat résulte ensuite d'un compromis entre l'ordre p , qui doit rester modéré, et un critère quantitatif tel l'écart quadratique moyen des différences entre les fonctions empiriques et ajustées. Un exemple d'un tel ajustement mené sur la zone du lever « Sainte-Maxime 2006 » est donné sur les figures 6.51 (p. 264) et 6.52 (p.265).

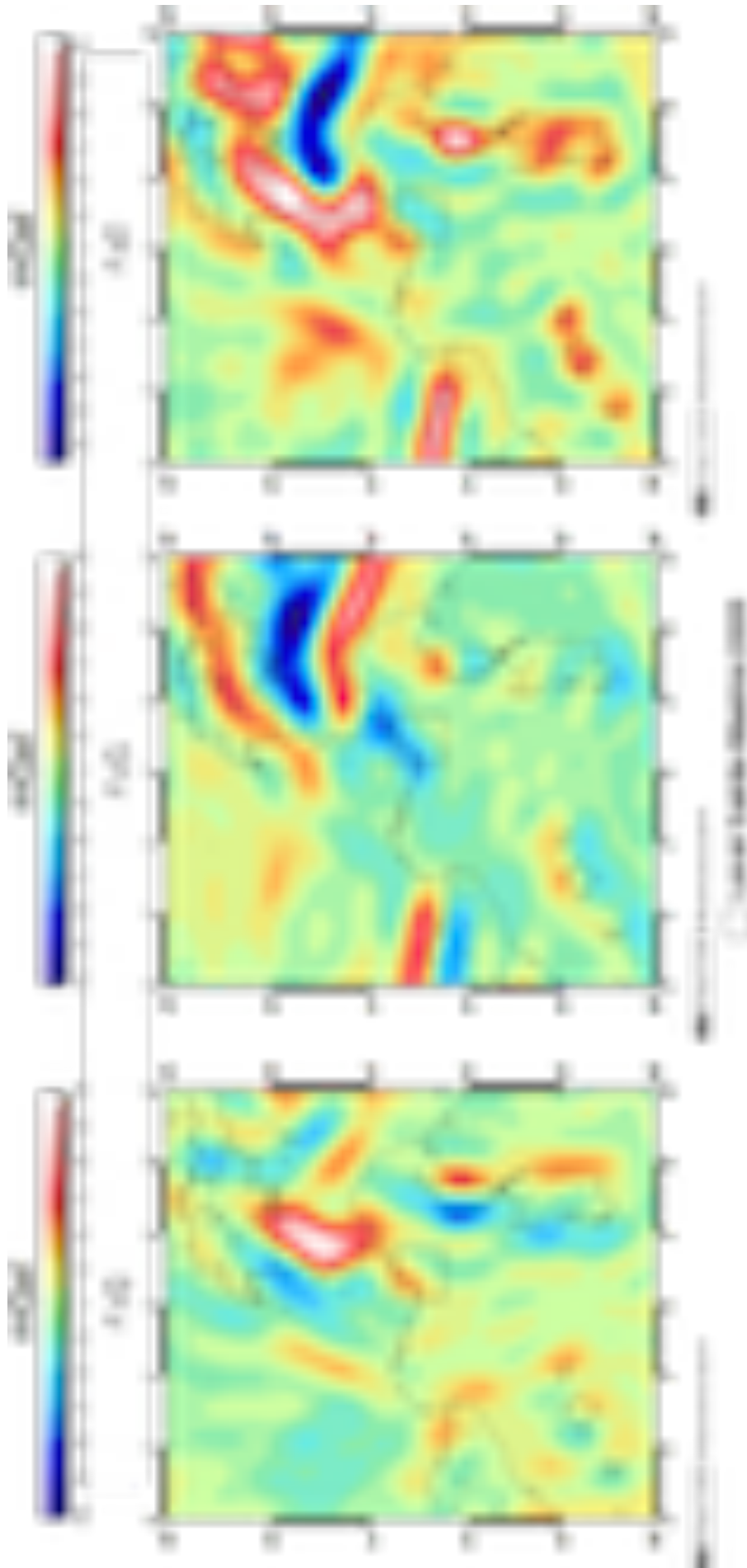


FIGURE 6.50 – Cartes des composantes East (δg_E^U), North (δg_N^U) et Up (δg_U^U) de la perturbation de pesantueur δg^n déduites du modèle de géopotentiel EGM2008 (Tab. 5.1, p. 130). Les valeurs issues de ces cartes ont été utilisées pour calculer les estimations empiriques des fonctions d'autocovariance (Fig. 6.51, p. 264) et de covariance croisée (Fig. 6.52, p. 265) applicables sur la zone du lever « Sainte-Maxime 2008 » (délimitée par le rectangle en trait plein noir).
D'après Verdun *et al.*, 2013 (*acti2*).

Covariance	EE	NN	UU	EN	EU	NU
Ordre p	6	6	6	6	6	6
β (km ⁻¹)	$1,14 \times 10^{-1}$	$8,49 \times 10^{-2}$	$8,13 \times 10^{-2}$	$1,33 \times 10^{-1}$	$1,14 \times 10^{-1}$	$9,55 \times 10^{-2}$
L_c (km)	29	39	40	25	29	34

TABEAU 6.12 – Estimations du paramètre β à partir des fonctions empiriques d'autocovariance East-East (EE), North-North (NN), Up-Up (UU) (Fig. 6.51, p. 264) et de covariance croisée East-North (EN), East-Up (EU) et North-Up (NU) (Fig. 6.52, p. 265), déduites du modèle de géopotential EGM2008 (Tab. 5.1, p. 130) évalué sur la zone d'étude (Fig. 6.52, p. 265). Pour un même ordre 6 qui s'est avéré optimal sur cette zone, les valeurs du paramètres β diffèrent, ce qui implique une estimation de la longueur de corrélation entre 25 et 40 km. C'est la valeur moyenne des estimations du paramètre β ($1,04 \times 10^{-1}$ km⁻¹) qui a été retenue comme valeur commune. Elle correspond à une longueur de corrélation de 32 km.

D'après Verdun et al., 2013 (acti2).

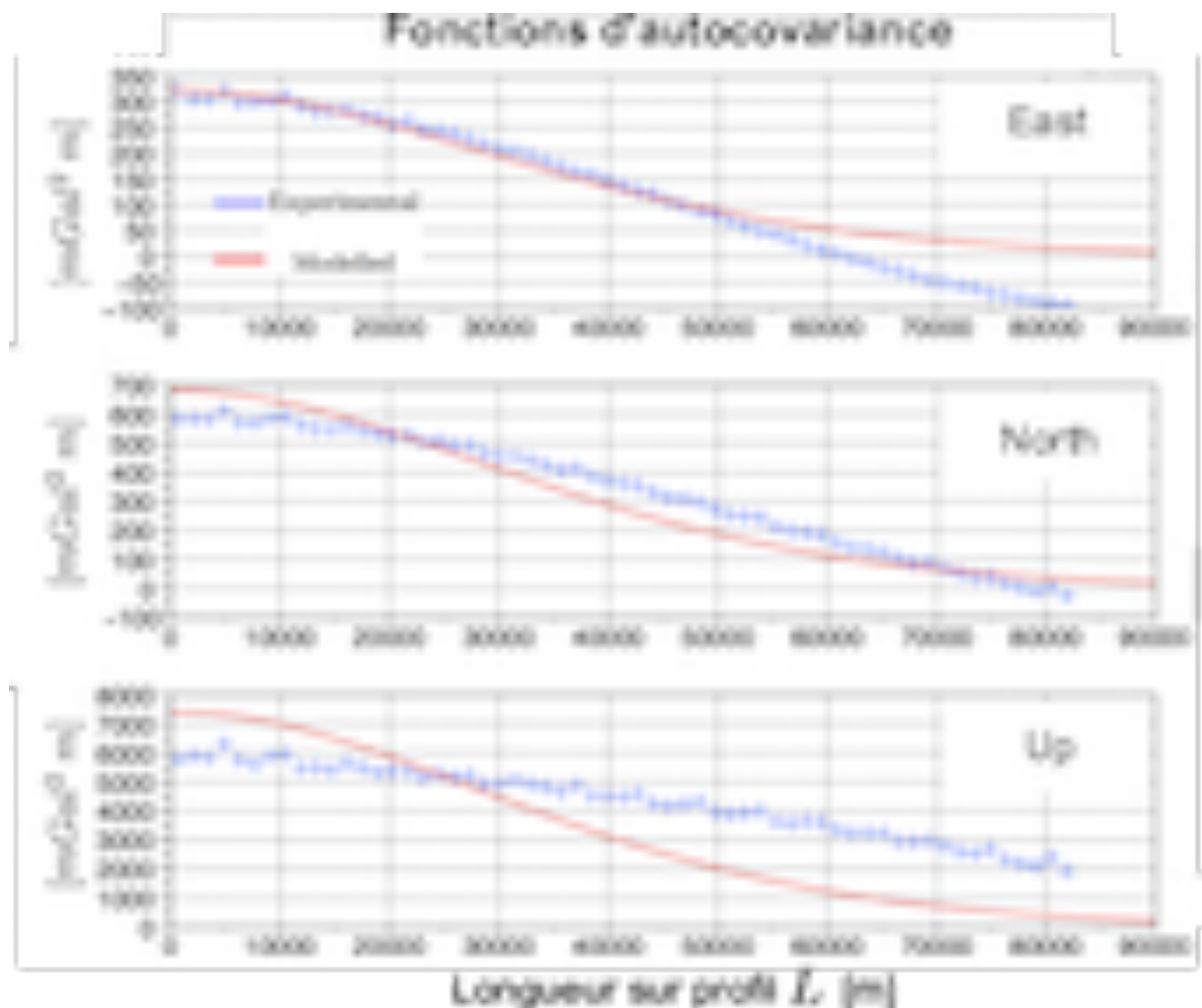


FIGURE 6.51 – Fonctions d'autocovariance empiriques East-East, North-North et Up-Up déduites des valeurs locales de la perturbation de pesanteur (Fig. 6.50, p. 263) et comparées à leur modélisation par l'ajustement d'un modèle de Gauss-Markov d'ordre 6 ($\beta = 1,04 \times 10^{-1}$ km⁻¹). La concordance, très satisfaisante pour les composantes East et North, est plus mitigée pour la composante Up. Ce n'est pas tant l'adéquation parfaite qui est visée ici qu'une estimation réaliste de l'autocovariance spatiale dans le modèle d'évolution, qui sera en définitive combinée au modèle de mesure.

D'après Verdun et al., 2013 (acti2).

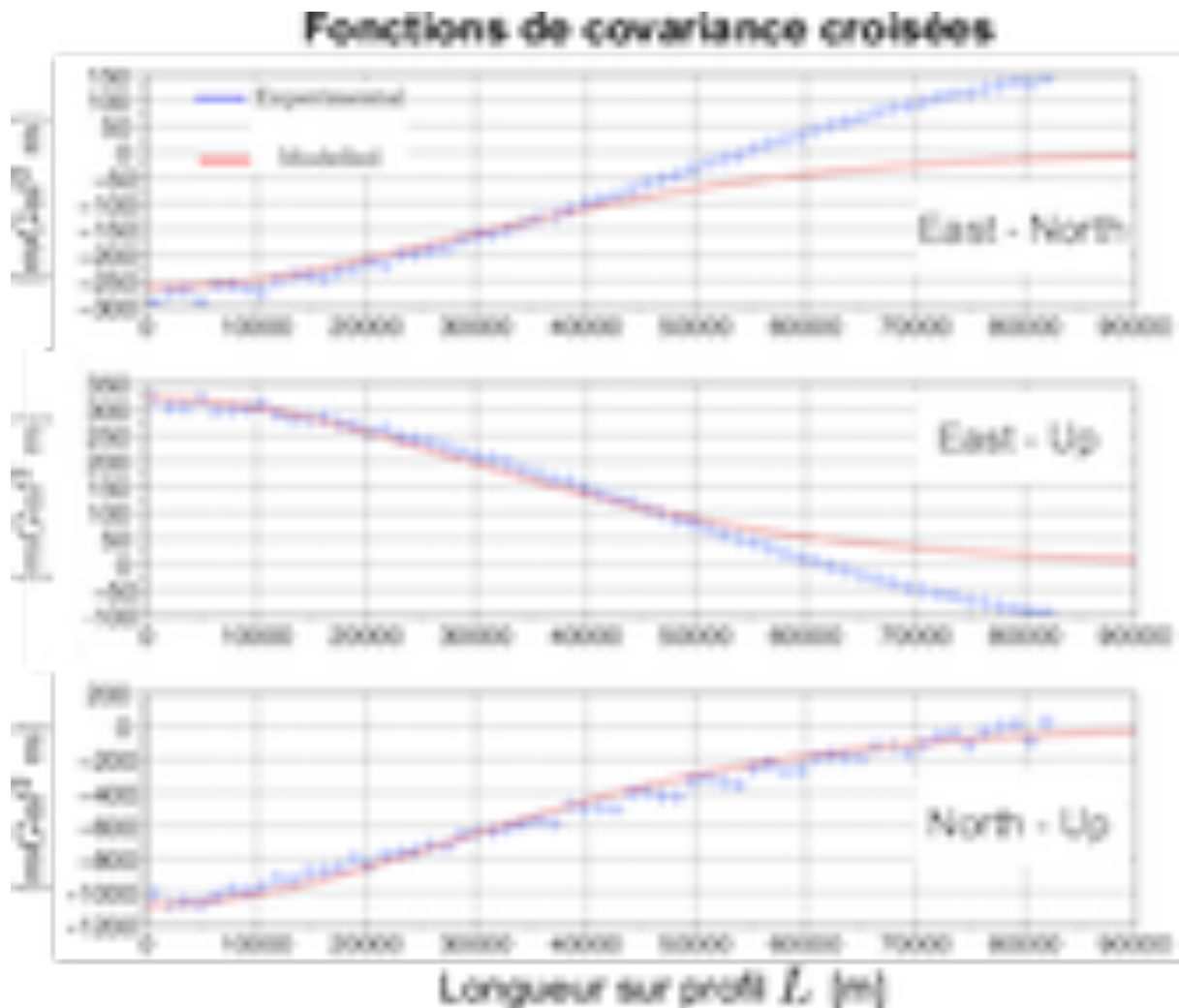


FIGURE 6.52 – Fonctions de covariance croisée empiriques East-North, East-Up et North-Up déduites des valeurs locales de la perturbation de pesanteur (Fig. 6.50, p. 263) et comparées à leur modélisation par l’ajustement d’un modèle de Gauss-Markov d’ordre 6 ($\beta = 1,04 \times 10^{-1} \text{ km}^{-1}$). La concordance est dans l’ensemble satisfaisante pour chacune des fonctions de covariance croisée, quel que soit le couple considéré.

D’après Verdun et al., 2013 (acti2).

À ce stade, il faut encore traduire le modèle de Gauss-Markov décrit par l’équation 6.108 (p. 260) sous la forme d’un modèle d’évolution adéquat pour le filtrage de Kalman. D’après l’expression du système d’équations stochastiques qui sous-tend le filtrage de Kalman (Éq. 6.91, p. 243), il est clair que ce modèle doit correspondre à une équation différentielle du premier ordre.

Il est possible d'exprimer l'équation 6.108 (p. 260) sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre, à condition d'utiliser le vecteur d'état $\mathbf{Y}(t)$ de $\mathbb{R}^{3p}$ défini par :

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{g}^n \\ \frac{d\delta \mathbf{g}^n}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^k \delta \mathbf{g}^n}{dt^k} \\ \vdots \\ \frac{d^{p-1} \delta \mathbf{g}^n}{dt^{p-1}} \end{bmatrix}, \quad (6.113)$$

qui vérifie l'équation : $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{Y}(t) + \tilde{\mathbf{e}}(t)$ où la matrice $\mathbf{A}$ et le vecteur $\tilde{\mathbf{e}}(t)$ s'expriment par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \cdots & \mathbf{0}_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ -a_0 V^p \mathbf{I}_3 & -a_1 V^{p-1} \mathbf{I}_3 & -a_2 V^{p-2} \mathbf{I}_3 & \cdots & -a_k V^{p-k} \mathbf{I}_3 & \cdots & -a_{p-1} V \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (6.114)$$

où V désigne la vitesse de lever et, en notant $\mathbf{0}_3$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{\mathbf{e}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{0}_3 \\ V^p \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}. \quad (6.115)$$

Le retour au modèle d'évolution discret pour le vecteur d'état $\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}(t = t_k)$ s'effectue alors assez aisément puisqu'il vient précisément :

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \Phi_{k:k+1} \mathbf{Y}_k + \Sigma_{\mathbf{w}k} \tilde{\mathbf{e}}_k, \quad (6.116)$$

où $\tilde{\mathbf{e}}_k$ est un bruit blanc gaussien, centré, de matrice de covariance $\mathbf{I}_{3p}$ à condition de poser :

$$\Phi_{k:k+1} = \exp[(t_{k+1} - t_k) \mathbf{A}], \quad (6.117)$$

et en déterminant la matrice $\Sigma_{\mathbf{w}}$ par la méthode de Cholesky de sorte que :

$$\Sigma_{\mathbf{w}k} \Sigma_{\mathbf{w}k}^T = V^{2p} (t_{k+1} - t_k) \mathbf{C}_{\mathbf{w}}. \quad (6.118)$$

Le dernier point délicat à traiter reste le calcul de l'expression de la matrice de transition $\Phi_{k:k+1}$ à l'aide de l'exponentielle de matrice donnée par la relation 6.117. Pour ce, Dament (M2[6]) a montré qu'il existait toujours une matrice de passage $\mathbf{P}$ inversible telle que la matrice $\mathbf{A}$ se décompose sous sa forme de Jordan, qui s'écrit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} (-\beta \mathbf{I}_{3p} + \mathbf{N}) \mathbf{P}^{-1}, \quad (6.119)$$

où $\mathbf{N}$ est une matrice nilpotente d'ordre p .

Connaissant la matrice P , l'expression de la matrice $\Phi_{k:k+1}$ devient :

$$\Phi_{k:k+1} = e^{-\beta(t_{k+1}-t_k)} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(t_{k+1}-t_k)^n}{n!} P N^n P^{-1}. \quad (6.120)$$

Le travail de Damenet (M2[6]) décrit notamment l'algorithme de calcul de la matrice P pour tout ordre p quelconque. Nous venons donc de décrire ici une méthode complète qui permet de déterminer quantitativement le modèle de transition de la perturbation de pesanteur à partir de la matrice de transition $\Phi_{k:k+1}$ et de la matrice de covariance du bruit de modèle $Q_k = \Sigma_{w_k} \Sigma_{w_k}^T$. La pondération du bruit de modèle résulte donc naturellement de la matrice Q_k obtenue. Il convient de ne pas perdre de vue que le choix de l'ordre p du modèle de Gauss-Markov décrivant la perturbation de pesanteur, va nécessiter l'introduction de $3p$ paramètres dans le vecteur d'état – les trois composantes de la perturbation $\delta \mathbf{g}^n$ complétées par celles de toutes ses dérivées de l'ordre 1 à $(p-1)$. Un compromis doit donc être trouvé pour assurer une bonne adéquation des fonctions de covariance qui découlent du modèle sans exagérer son ordre.

Cette méthode plus rationnelle de choix du modèle d'évolution permet d'introduire une contrainte physique forte dans le filtre de Kalman, intimement reliée à la façon dont le champ de pesanteur se structure dans l'espace. Ce faisant, la méthode prend en compte une connaissance a priori du champ de pesanteur, de façon tout à fait analogue à ce qui est réalisé dans l'approche globale. Cette analogie dans les méthodes n'est en rien surprenante étant donné que les approches globale et récursive reposent finalement sur le même critère d'optimalité.

Les résultats du test de la méthode sur les données semi-synthétiques du lever « Sainte-Maxime 2006 » sont illustrés sur les figures 6.53 (p. 268) et 6.54 (p. 269). La stabilisation du filtre est à présent assurée, ainsi qu'une importante réduction du bruit. En définitive, l'approche récursive ne peut se passer de cette détermination préalable d'un modèle d'évolution réaliste pour espérer une mise en œuvre couronnée de succès. La disponibilité des modèles de géopotentiel rend cette détermination envisageable dans toutes les régions à la surface de la Terre. La réalisation de leviers mobiles entre donc dans un processus vertueux d'assimilation de nouvelles données gravimétriques dans les modèles, qui contribue à améliorer la connaissance a priori du champ de gravité pour les futurs leviers.

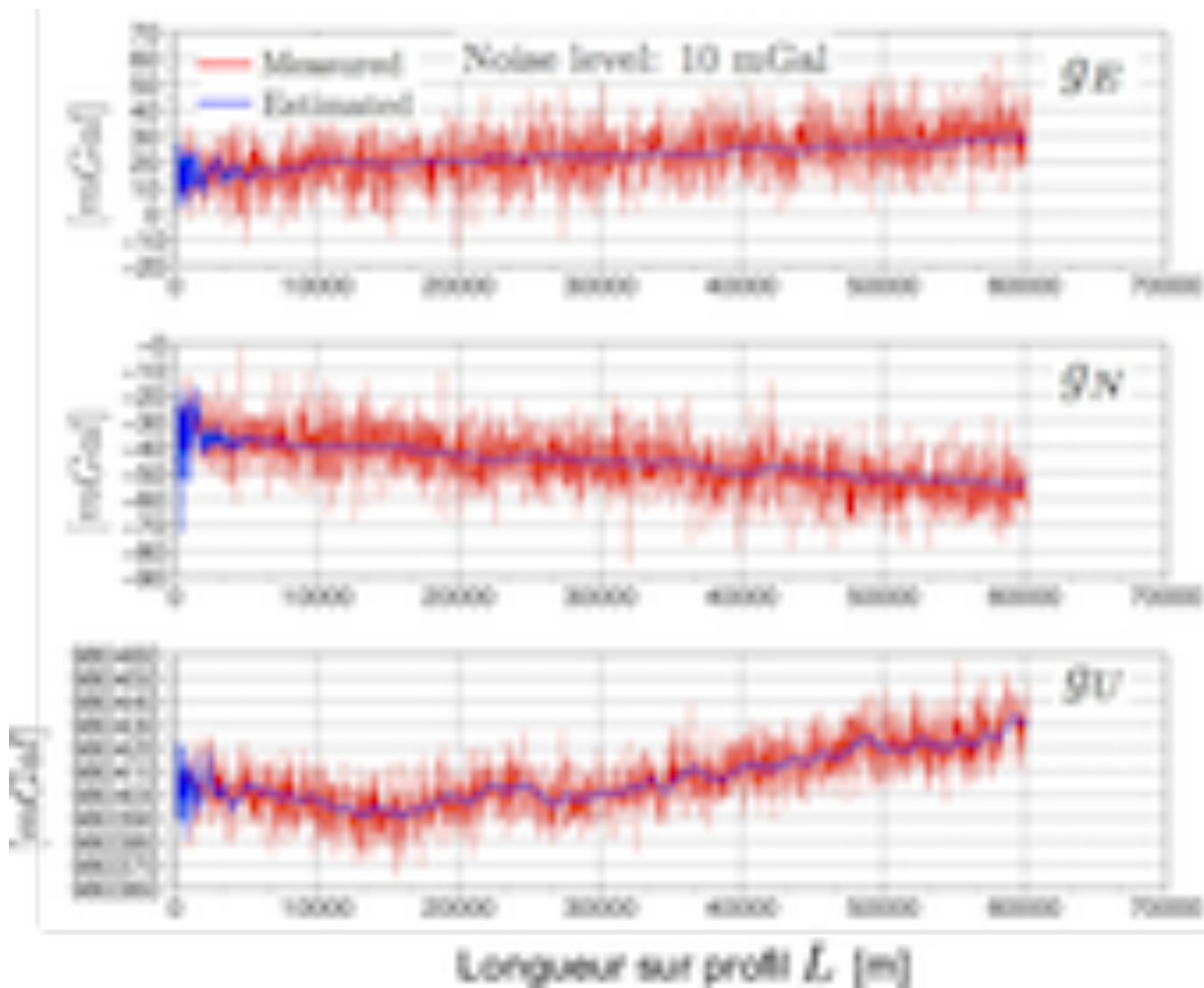


FIGURE 6.53 – Estimation des composantes g_E^n , g_N^n et g_U^n de la pesanteur sur un profil du lever « Sainte-Maxime 2008 » par filtrage de Kalman comportant un modèle de Gauss-Markov d'ordre 6 ajusté sur les covariances empiriques de la pesanteur locale. Les données (courbes en rouge) sont semi-synthétiques de sorte que les mesures de référence sont disponibles le long du profil. Le bruit de mesure est supposé atteindre 10 mGal suite au pré-filtrage des données d'accélération, de position et d'orientation. Après le régime transitoire, les courbes en bleu montrent les composantes à bruit réduit par filtrage de Kalman qui ne divergent pas.

D'après Verdun et al., 2013 (acti2).

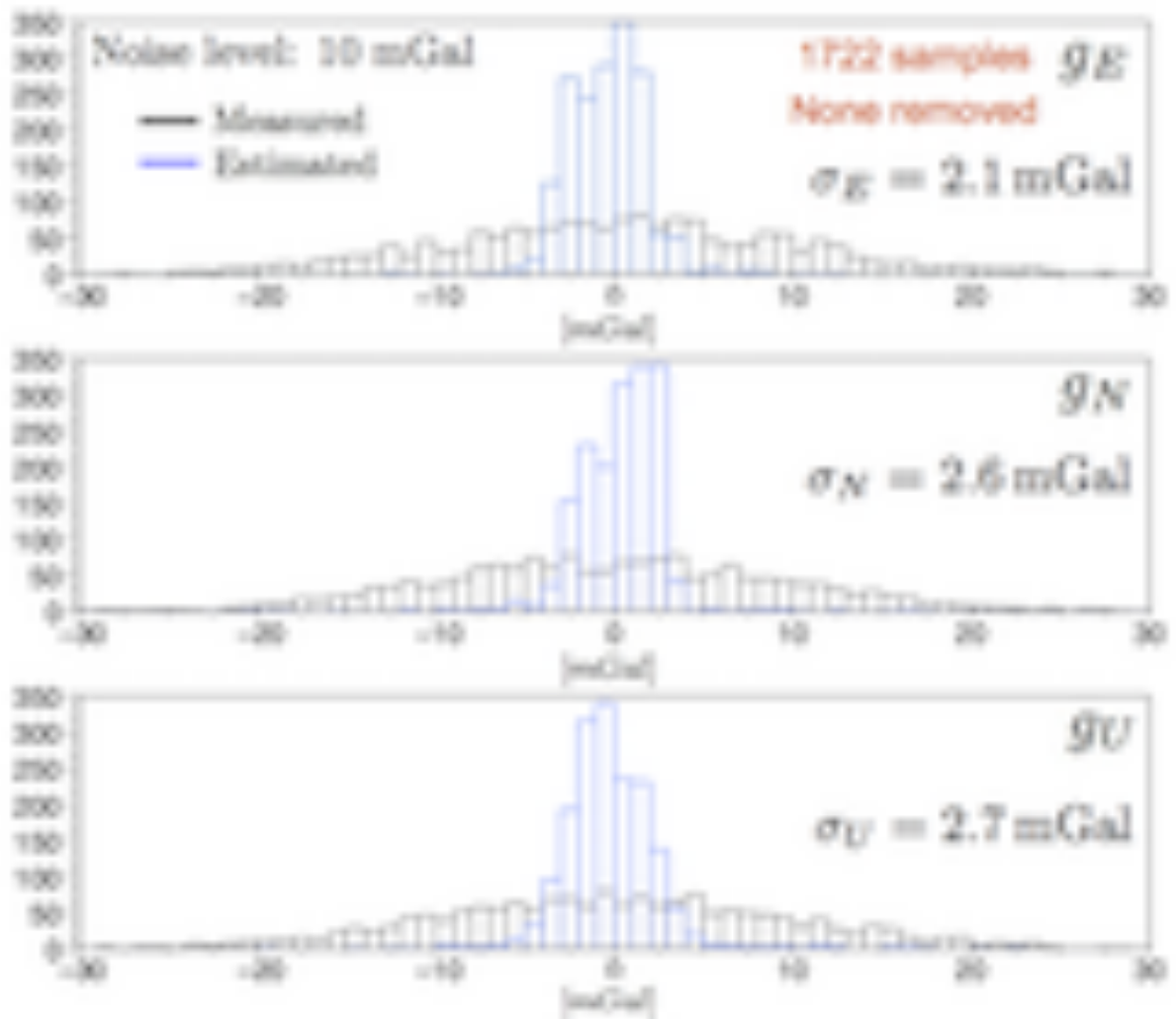


FIGURE 6.54 – Histogrammes des écarts à la référence pour les valeurs des composantes de la pesanteur de la figure 6.53, p. 268. Les écarts-types obtenus indiquent une réduction de l'incertitude d'un facteur supérieur à 3.

D'après Verdun et al., 2013 (acti2).

Pour finir, il s'avère que le problème de l'identification des variances des paramètres d'un processus de Gauss-Markov (ordre, coefficients, matrice de covariance du bruit blanc) se pose également dans les systèmes hybrides de positionnement dynamique, tels les systèmes INS/GNSS. Par exemple, il est très courant de modéliser l'évolution temporelle des biais dans les capteurs inertiels par des processus de Gauss-Markov d'ordre 1 voire 2 ou 3. L'une des techniques classiques pour réaliser cette identification consiste à acquérir des échantillons du vecteur d'état à partir de manipulations d'étalonnage dans lesquelles tous les paramètres deviennent observables. À partir des modèles d'évolution et de la loi supposée régir le bruit de transition, il est possible d'écrire une fonction de vraisemblance liée à l'échantillon dans laquelle la matrice Q_k inconnue et les coefficients a_k , $k = 0, 1, \dots, p-1$ du processus de Gauss-Markov, peuvent être estimés par maximum de vraisemblance. Lorsque l'observation de tous les paramètres est impossible, la fonction de vraisemblance doit contenir implicitement un processus d'estimation des paramètres non observés, c'est-à-dire les expressions du filtre de Kalman dans lesquelles la matrice Q_k et les coefficients a_k , $k = 0, 1, \dots, p-1$

constitue des variables libres. L'utilisation de ce type d'approche pour la gravimétrie mobile constitue une piste de recherche attractive qu'il conviendra d'explorer. Nos travaux récents sur les applications du filtre de Kalman à bruits corrélés au positionnement dynamique, menés dans le cadre de deux stages de fin d'études (Chauveau, 2014 (M2[4]), Mambou, 2016 (M2[2]), Mambou et al., 2017 (acl1aaa)) en collaboration étroite avec le Laboratoire Manceau de Mathématiques (LMM), ont permis d'acquérir une bonne expérience de ces méthodes d'identification, qui pourra être mise à profit pour cette recherche.

6.3 Deux systèmes français pour la gravimétrie mobile

Cette section se propose de décrire deux développements instrumentaux réalisés actuellement en France pour la gravimétrie mobile baptisés respectivement « Limo-g » et « GRAVIMOB ». Nous avons d'ores et déjà décrit la campagne de test du système « Limo-g », les données acquises par le système et le traitement des données par filtrage de Kalman (cf §6.1.4, fig. 6.14, p. 204 et §§6.2.3.2, §§6.2.3.2.2, p. 244). Mon propos va donc se concentrer sur le capteur d'accélération proprement dit, son étalonnage et la nécessaire stabilisation en température. Nous allons voir également que le système « GRAVIMOB » émane directement du système « Limo-g » dont il étend le champ d'application au domaine sous-marin. Pour prendre la mesure de l'engouement suscité par la gravimétrie mobile dans le monde, un petit tour d'horizon de systèmes analogues en cours de développement est donné en guise d'entrée en matière.

6.3.1 Inventaire des systèmes concurrents notoires

Aujourd'hui, la pratique de la gravimétrie scalaire et la gradiométrie mobiles dans les instituts géographiques, les agences cadastrales et les entreprises de lever et de prospection, est devenue complètement opérationnelle grâce notamment à certains systèmes d'acquisition réputés tels le gravimètre aérien/marin TAGS-6™ de @Micro-g LaCoste (cf Chap. 5, §§5.1.4.1.3, p. 156) ou le gradiomètre aérien Air-3D FTG™ de @Lockheed Martin (cf Chap. 5, §5.2.1.2, p. 162). Quiconque souhaiterait acquérir des données de gravimétrie mobile pourrait donc profiter d'une offre commerciale relativement abondante à des coûts compétitifs. Pourtant, un nombre conséquent de nations poursuit des recherches en vue du développement de systèmes de gravimétrie mobile pour les domaines terrestres, c'est-à-dire les domaines routier, marin, sous-marin et aérien. L'intérêt de se doter de son propre système n'est pas tant de concurrencer les systèmes opérationnels disponibles, que d'en produire de nouveaux qui soient de dimensions beaucoup plus réduites de sorte à pouvoir s'installer sur les nouveaux porteurs légers tels les submersibles autonomes, les drones marins et aériens, voire les micro-drones. La tendance naturelle des développements va donc vers des systèmes de type « strapdown » équipés de capteurs inertiels miniatures. Les progrès réalisés dans ce domaine ont profité des efforts déployés par les constructeurs de centrales inertielles pour diminuer leur encombrement en vue d'équiper les porteurs légers.

Dès le début des années 2000, les développements instrumentaux ont évolué depuis le gravimètre scalaire de facture classique monté sur une plate-forme inertielle (cf par exemple les systèmes Chekan, fig. 6.55, p. 271, AIRGrav, fig. 6.56, p. 272 et GT-1A et 2A, fig. 6.58, p. 273), vers des systèmes hybrides comportant une centrale inertielle de haut grade couplée à un système de positionnement GNSS, jusqu'à des systèmes complètement épurés dont les mesures d'accélération de rappel proviennent d'un accéléromètre de haute performance qu'il faut compléter par les données de position et d'orientation fournies par des capteurs

inertiels complémentaires, voire par le système de positionnement du porteur. De ces trois configurations, c'est exactement la dernière qui a été choisie pour les systèmes « Limo-g » et « GRAVIMOB ».



FIGURE 6.55 – Gravimètre aérien/marin russe « CHEKAN-AM », composé d'un capteur d'accélération uni-axe monté sur une plate-forme stabilisée à trois axes. L'ensemble pèse 72 kg et occupe un volume cylindrique dont la base a un diamètre de 45 cm et la hauteur est de 40 cm. Le fréquence d'acquisition peut aller jusqu'à 25 Hz pour la version aérienne. L'incertitude de mesure est estimée 1 mGal après réduction des mesures et filtrage.

Droits réservés : ©CONCERN CSRI ELEKTROPRIBOR, JSC, 2013.



FIGURE 6.56 – Gravimètre vectoriel mobile «AIRGrav» développé par la société canadienne @Sander Geophysics Limited (SGL). Ce dernier est constitué de trois accéléromètres à axes orthogonaux montés sur une plate-forme stabilisée à trois axes. Le poids du système est inférieur à 100 kg. Utilisé en gravimètre aérien, les performances du système lui permettent d'atteindre une incertitude sur la composante vertical g_U^n comprise entre 0,1 et 0,3 mGal à la résolution spatiale de 2 km. Le résolution peut descendre à 300 m si le lever est réalisé à bord d'un hélicoptère. Les performances du système pour la mesure des composantes horizontales de la pesanteur sont illustrées sur la figure 6.57 (p. 272).

D'après SANDER et FERGUSON (2010), SANDER et al. (2004).

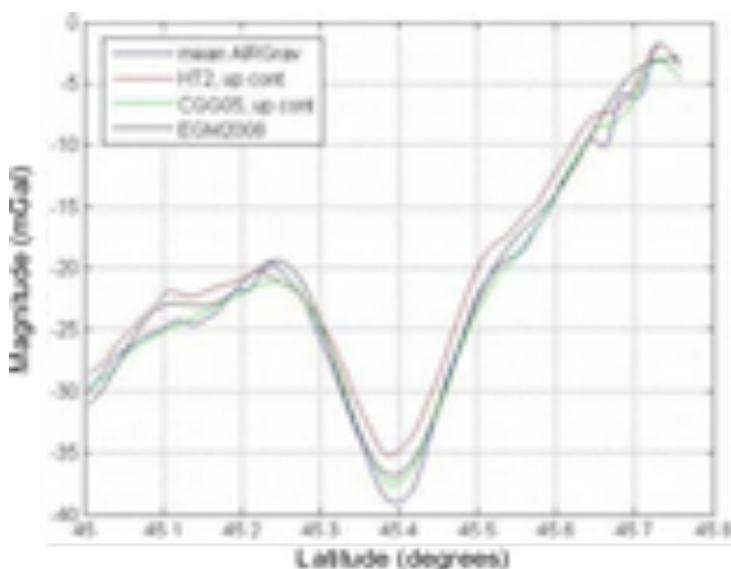


FIGURE 6.57 – Comparaison de profils aériens de la composante horizontale « est » de la perturbation de pesanteur (δg_E^n), issue des mesures du système «AIRGrav» moyennées et de différents modèles calculés à l'altitude de vol (HTv2 = modèle de géoïde canadien, CGG05 = modèle de géoïde gravimétrique canadien (HUANG et VÉRONNEAU, 2005)). Les écarts-types des différences entre profils mesurés et estimés par un modèle atteignent respectivement 1,193 mGal pour le modèle HTv2, 0,796 mGal pour la modèle CGG05 et 0,937 mGal pour le modèle de géopotential EGM2008 (Tab. 5.1, p. 130). Ces résultats attestent des bonnes performances de ce système pour les échelles régionales.

D'après SANDER et FERGUSON (2010).



FIGURE 6.58 – Gravimètre scalaire aérien GT-1A (ou GT-2A, nouvelle version) développé par la société canadienne Canadian Micro Gravity. L'ensemble pèse 134,5 kg et occupe un volume parallélépipédique à base carrée de 40 cm de côté sur une hauteur de 60 cm. Le système comprend une plate-forme stabilisée à deux axes sur laquelle est montée un accéléromètre uni-axe. L'amplitude de variation des angles de roulis et tangage tolérée par la plate-forme est exceptionnellement grande : $\pm 45^\circ$. La fréquence d'acquisition atteint 300 Hz. L'estimation du constructeur pour la restitution de la perturbation de pesanteur δg_{ij}^n est de 0,6 mGal. Un agrandissement de la base qui supporte le boîtier de l'instrument, montre une double couche de matériau permettant l'amortissement des vibrations. D'après OLSON (2010).

Certains systèmes utilisent directement les capteurs d'accélération issus de gravimètres scalaires (cf par exemple FUJIMOTO et al. (2011)) bénéficiant ainsi de leur bonne sensibilité. Une autre possibilité consiste à utiliser un ou plusieurs accéléromètres génériques montés éventuellement en triade pour pratiquer des mesures vectorielles. De ce point de vue, il existe au moins trois systèmes qui s'apparentent aux instrumentations françaises :

1. le système allemand « SAGS-4 » (BOEDECKER et STÜRZE, 2006) (Fig. 6.59, p. 274) ;
2. le système chinois « SGA-WZ » (HUANG et al., 2012) (Fig. 6.60, p. 275) ;
3. le gradiomètre miniature développé au Japon et dédié aux applications sous-marines (ARAYA et al., 2011, 2012, 2015) (Figs. 6.63, 6.64, pp. 277, 277).

Les systèmes allemand « SAGS-4 » et chinois « SGA-WZ » ont été conçus essentiellement pour la gravimétrie aérienne vectorielle en proposant des versions allégées et plus aisées à installer que les gravimètres à plate-forme. Ils demeurent malgré tout assez encombrants pour une utilisation sur un véhicule routier, et impossible à utiliser à bord d'un sous-marin. De plus, les performances de ces prototypes n'ont pas encore atteint le niveau des systèmes opérationnels, si bien qu'ils n'ont pas encore percé le marché des gravimètres mobiles.



FIGURE 6.59 – Système gravimétrique vectoriel lié « SAGS-4 » (Strapdown Airborne Gravimetry System 4) développé par l'Académie Bavaroise des Sciences et des Humanités de Munich en Allemagne. Le système se compose d'une enceinte thermorégulée et amortie par quatre amortisseurs à air pour limiter l'effet des vibrations. L'enceinte contient quatre accéléromètres électrostatiques « Q-Flex QA-3000 » distribués par la société américaine ®Honeywell. Trois des quatre accéléromètres sont disposés de sorte que leurs axes géométriques soient orthogonaux. Le quatrième complète l'axe vertical de sorte à mesurer l'accélération dans la direction opposée au premier. La détermination de l'attitude est réalisée à partir d'un système GNSS multi-antennes (non visible) complété par trois gyromètres à fibre optique (boîtiers noirs). Deux récepteurs GNSS bi-fréquence (non visibles) complètent le système de positionnement. De taille réduite, le système est également plus léger (36 kg) que ses homologues comprenant une plate-forme stabilisée.

D'après BOEDECKER et STÜRZE (2006).

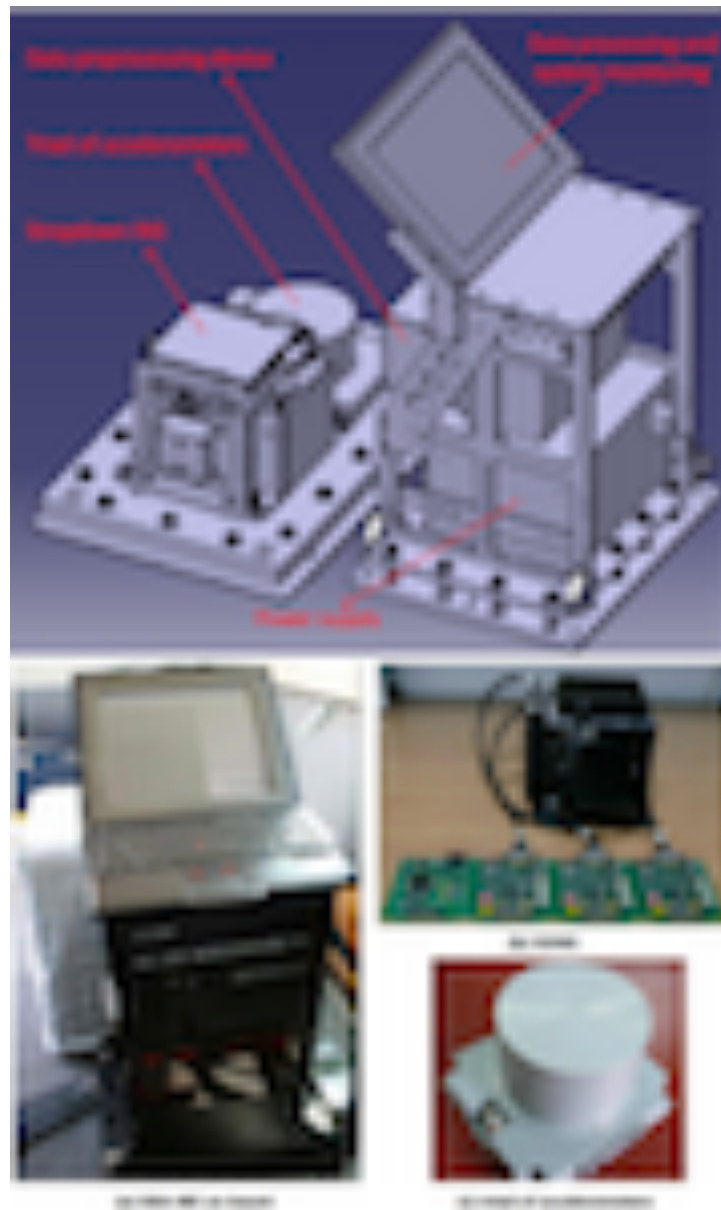


FIGURE 6.60 – Schéma d'ensemble et vues des composants du système gravimétrique vectoriel « SGA-WZ » développé conjointement en Chine et au Danemark. Le système comprend une triade d'accéléromètres placée dans une enceinte thermo-régulée (c) et une centrale inertielle (b) couplée à un récepteur GNSS bi-fréquence qui réalise les mesures de position et d'attitude nécessaires au traitement des données. Un système d'acquisition (a) assure l'échantillonnage des données inertielles à la fréquence de 2 kHz et celui des données GNSS à la fréquence de 2 Hz. Certains aspects tels l'amortissement des vibrations ou l'origine des accéléromètres montés dans la triade ne sont pas connus. Lors d'une campagne d'essai aérienne, les auteurs ont évalué à l'incertitude de restitution de la pesanteur à 2 mGal pour une résolution spatiale de 6 km.

D'après HUANG *et al.* (2012).

En revanche, le modèle japonais est un prototype élaboré spécifiquement pour la prospection minière sous-marine, en vue d'une installation sur le sous-marin autonome « Urashima » (Fig. 6.61, p. 276) de l'agence japonaise des sciences et technologies marines (Japan Agency for Marine-Earth Science and TEChnology (JAMSTEC)). La démarche japonaise est originale puisqu'elle consiste à envisager le capteur gravimétrique et son porteur pour une application bien définie. Il s'agit donc au préalable de choisir une observable, en l'occurrence, le gradient de gravité vertical, d'évaluer son amplitude probable en fonction de la source recherchée (Fig. 6.62, p. 276) et de concevoir un capteur adéquat donc les performances sont compatibles avec le signal recherché (Fig. 6.65, p. 278). Sans doute, le sacrifice de la polyvalence de l'instrument pourrait s'avérer payante pour gagner en sensibilité. De surcroît, les submersibles autonomes sont équipés de systèmes de positionnement et d'orientation très performants, de par les exigences requises dans la détermination des paramètres de mouvement pour les levés bathymétriques par sondeur multi-faisceaux. Aucune instrumentation supplémentaire n'est donc nécessaire, le capteur gravimétrique apparaissant simplement comme une nouvelle « charge » utile à installer à bord. Si les performances du système japonais se confirment, ce dispositif pourrait compter parmi les instruments de pointe pour les levés gradiométriques en fond de mer.



FIGURE 6.61 – Vues du submersible autonome japonais « Urashima » équipé de son système gravimétrique embarqué dans la tête de l'engin. Les dimensions du submersible sont de 10 m de longueur, pour 1,3 m de largeur et 1,5 m de hauteur.

D'après ARAYA et al. (2015).

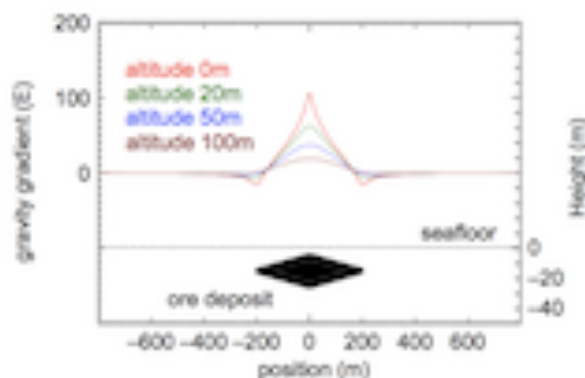


FIGURE 6.62 – Profil du gradient de gravité observable au-dessus du plancher océanique à différentes hauteurs en présence d'un dépôt minéral. La forme du dépôt s'apparente à celle d'un bourrelet de 20 m d'épaisseur et de 400 m de diamètre. Le contraste de densité est supposé de 1 gcm^{-3} . Une résolution meilleure que 10 E serait nécessaire pour espérer détecter le dépôt à une hauteur de 100 m.

D'après ARAYA et al. (2015).

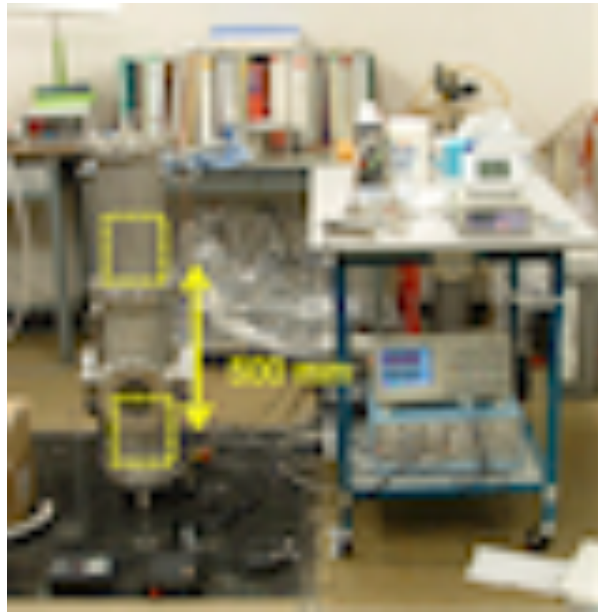


FIGURE 6.63 – Vue du gradiomètre constitué des deux accéléromètres vibrants (Fig. 6.64, p. 277), séparés verticalement d’une distance $L = 50$ cm].

D’après ARAYA et al. (2011).

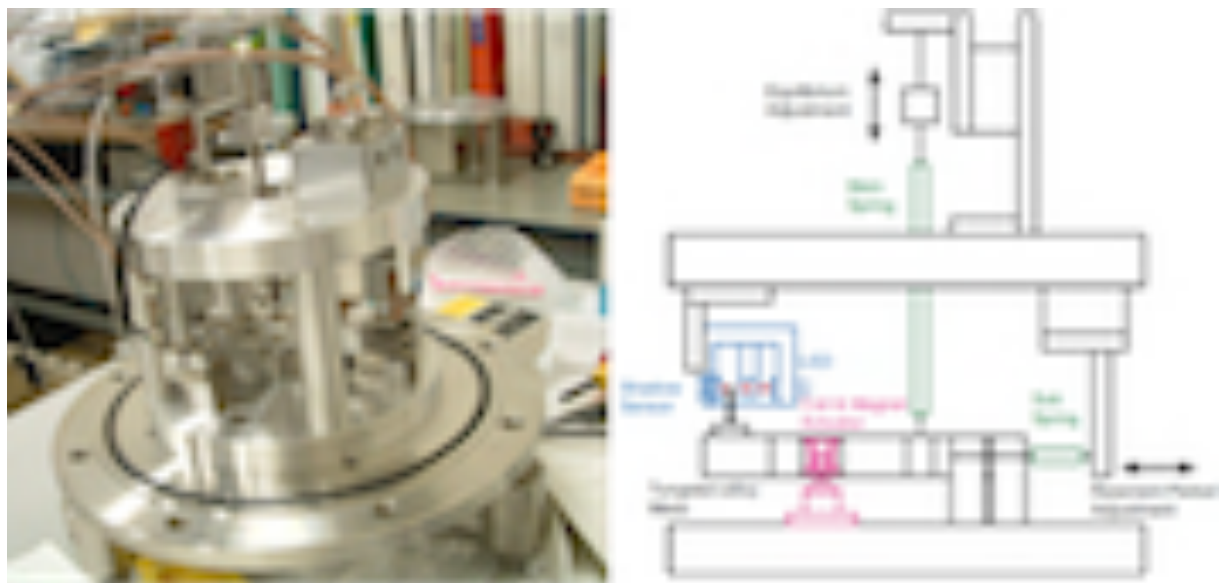


FIGURE 6.64 – Vue et schéma de principe d’un accéléromètre japonais destiné aux submersibles pour la prospection minière. L’accéléromètre se compose d’un pendule vibrant formé par un bras, soutenu par un ressort en élinvar (main spring), à l’extrémité duquel est accrochée une masse d’épreuve faite d’un alliage au tungstène (tungsten-alloy mass). Le mouvement du bras est suivi par un capteur optique de position (shadow sensor+LED). Un électro-aimant (coil and magnet actuator) produit une force de rétro-action pour compenser la composante de l’accélération dans la direction orthogonale au bras du pendule. C’est l’intensité du courant d’alimentation de l’électro-aimant qui constitue la mesure analogique de l’accélération. Le boîtier de l’accéléromètre est un cylindre dont la base circulaire a un diamètre de 14 cm et dont la hauteur atteint 17 cm.

D’après ARAYA et al. (2015).

Aux États-Unis, l'institut océanographique « Woods Hole » (Wood Holes Oceanographic Institution (WHOI), Massachusetts) s'intéresse également aux levés gravimétriques à bord de submersibles autonomes avec pour objectif les structures géologiques d'échelle infra-kilométrique de la croûte océanique de faible profondeur (KINSEY et al., 2008, 2013). À l'inverse des travaux menés au Japon, l'approche américaine se focalise d'abord sur la navigation du submersible soutenant l'idée que l'amélioration substantielle des performances en matière de positionnement et d'orientation constitue le prérequis indispensable de toute mesure réussie de gravimétrie mobile, indépendamment des qualités du capteur gravimétrique. La voie suivie par l'équipe de Woods Hole consiste à déterminer les paramètres de navigation du submersible à partir de la combinaison d'un modèle cinématique de navigation et des mesures réalisées à bord. Finalement, cette méthodologie se ramène à la réalisation d'un filtrage préalable sur la position et l'orientation en vue de leur utilisation dans le traitement des données gravimétriques proprement dites.

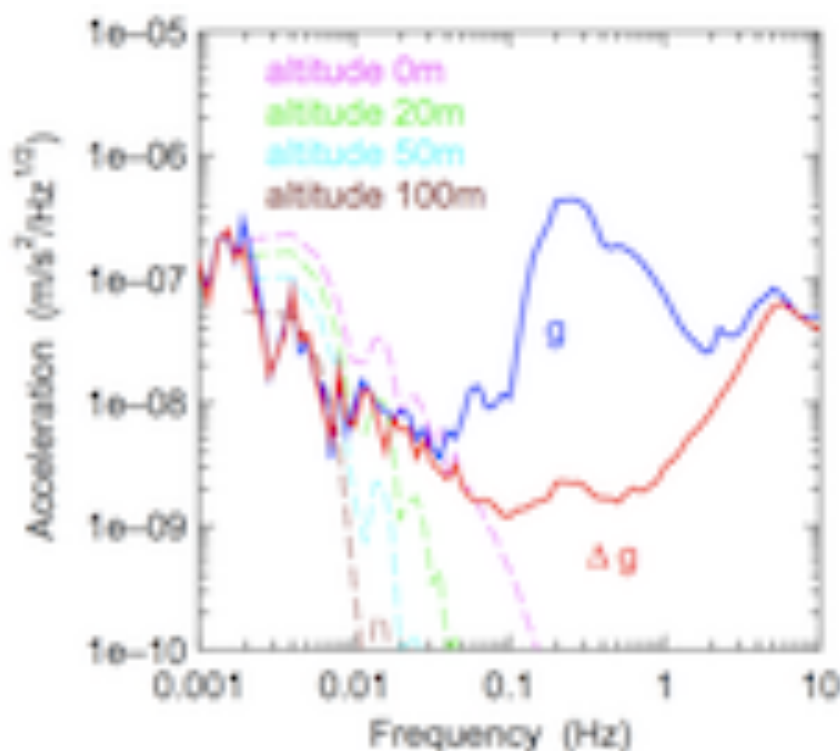


FIGURE 6.65 – Racine carrée de la densité spectrale de puissance du bruit de fond enregistré par un accéléromètre (courbe bleue) et présent sur la différence entre deux mesures accélérométriques (courbe rouge). Ce graphe montre clairement la remarquable atténuation (facteur 100) du bruit entre la mesure gravimétrique (g) et gradiométrique (Δg) dans l'intervalle des fréquences comprises 0,1 Hz à 1 Hz. Le niveau de bruit minimum en gradiométrie se situe à 0,1 Hz où la densité spectrale de puissance en $\Delta g/L$ atteint $2,7 E/\sqrt{\text{Hz}}$ pour $L = 44$ cm. Néanmoins, l'intervalle des fréquences du signal observable, d'après les profils de la figure 6.62 (p. 276) se situe en deçà dans la gamme comprise entre 2 et 50 mHz. L'amplitude du bruit dans cette gamme atteint 6 E, si bien que les signaux détectables demeurent ceux acquis à une hauteur strictement inférieure à 100 m.

D'après ARAYA et al. (2015).

Ces quelques exemples de développements instrumentaux, issus d'une littérature scientifique bien documentée, témoignent de l'attrait et l'engouement suscités par la gravimétrie mobile dans les milieux institutionnels, universitaires et industriels du monde entier. La France a pris une part active dans ces recherches quasiment depuis les débuts, grâce notamment aux développements des systèmes « Limo-g » et « GRAVIMOB », que nous allons décrire à présent.

6.3.2 Le gravimètre terrestre mobile « Limo-g »

Le système « Limo-g » et les méthodes d'étalonnage de son instrumentation ont été décrits dans De Saint-Jean et al., 2005a (ac1n2), 2005b (acti6), 2005c (aff9), 2006 (aff6), Cali et al., 2005 (com14), 2007 (acti5), Li et al., 2010 (acti3) durant et à la suite de la thèse de De Saint-Jean, 2008 (these4).

6.3.2.1 Petit historique

Le projet de développement d'un système de gravimétrie mobile a été initié par Henri Duquenne en 1999 alors qu'il occupait un poste d'enseignant-chercheur à l'ESGT. La nécessité de disposer d'un tel système est très vite devenue cruciale pour le calcul des modèles de géoïde nationaux. Ces derniers voient en effet leur qualité se dégrader considérablement lorsque les données gravimétriques utilisées dans les calculs n'ont pas la couverture et l'exactitude suffisantes. La gravimétrie mobile devait permettre de pallier ce problème de disponibilité des données gravimétriques, notamment sur les régions côtières et montagneuses du territoire français métropolitain et ultramarin. Le système « Limo-g » (Light moving gravimetry system) est un gravimètre inertiel vectoriel léger à composants discrets, qui est proche dans sa constitution du système allemand « SAGS-4 » (Fig. 6.59, p. 274). La conception et l'assemblage du système « Limo-g » entre 1999 et 2002 ont été réalisés dans le cadre de projets de fin d'études d'élèves-ingénieurs (GUETTE, 2001, JACQUES, 2002, VERMAST, 1999, VIEL, 2000, VLAMYNCK, 1999), grâce au soutien financier de la Région Des Pays de La Loire (RPDLL). Certaines solutions technologiques ont alors été retenues pour ce qui concerne notamment la disposition des accéléromètres, la numérisation des signaux et la régulation thermique de l'enceinte thermostatée contenant le système. En 2004, après le retour d'Henri Duquenne à l'IGN, une étude complète de la modélisation du système a été menée au LAREG dans le cadre d'un stage du diplôme d'études approfondies de l'Observatoire de Paris (Melachroinos, 2004 (M2[11])). À ce stade du développement, un effort plus conséquent devait être consenti pour réaliser les tâches suivantes :

- le développement d'une méthode de traitement des données;
- la mise au point et la validation d'un protocole d'étalonnage du capteur d'accélération;
- la réalisation de campagnes d'essai à bord de différents porteurs;
- la production de recommandations pour corriger d'éventuels défauts inhérents à l'instrumentation.

Tous ces volets ont été abordés dans la thèse de Bertrand De Saint-Jean (De Saint-Jean, 2008 (these4)), financée par l'IGN et menée entre 2005 et 2008 grâce à une étroite collaboration entre le LAREG et le laboratoire GeF-L2G. Depuis, les travaux sur la gravimétrie mobile légère sont menés au laboratoire GeF-L2G.

6.3.2.2 Composition du système « Limo-g »

Le cœur du système « Limo-g » est constitué d'une triade d'accéléromètres électrostatiques uni-axe « Q-Flex QA-3000 » de chez ®Honeywell (Fig. 6.66, p. 280), semblables à ceux utilisés sur le prototype allemand « SAGS-4 ». Ce type d'accéléromètre convient plutôt aux systèmes de positionnement des véhicules rapides, comme le suggère la plage d'entrée du capteur étendue sur ± 60 g (Tab. 6.13, p. 281). L'originalité du « Limo-g » réside dans la structure pyramidale qui supporte les trois accéléromètres (Fig. 6.67, p. 280). Cette dernière permet de répartir équitablement la mesure de l'accélération sur les trois accéléromètres pour peu qu'ils soient réglés pour mesurer dans la même plage dynamique, évitant ainsi tout problème de dissymétrie dans l'usure des capteurs individuels de la triade. Cette structure isotrope possède d'autres avantages notamment pour ce qui concerne l'étalonnage.

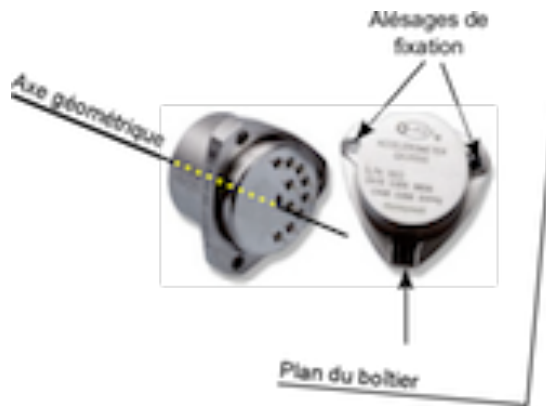


FIGURE 6.66 – Vues de l'accéléromètre électrostatique uni-axe « Q-Flex QA-3000 ». L'axe géométrique de l'accéléromètre est orthogonal au plan défini par les trois alésages des vis de fixation. Le diamètre du boîtier cylindrique est inférieur à 40 mm et sa hauteur inférieure à 25 mm. La masse du capteur est de (71 ± 4) g.

Droits réservés : ©Honeywell.



FIGURE 6.67 – Vue des 3 accéléromètres montés sur leur châssis pyramidal. Chaque accéléromètre occupe une position définie sur l'une des faces du tétraèdre de telle manière que son axe géométrique soit orthogonal à la face concernée. Les normales à trois faces du tétraèdre étant elles-mêmes orthogonales, pourvu que les accéléromètres soient correctement positionnés, leurs axes géométriques forment un trièdre orthogonal.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Performances	
Plage d'entrée	$\pm 60g$
Résolution	$< 1 \mu g$
Biais	$< 4 mg$
Facteur d'échelle	1,20 à 1,46 mA/g
Mésalignement	$< 1 mrad$
Résistance aux chocs	150g
Bande passante	$> 300 Hz$

TABLEAU 6.13 – Performances de l'accéléromètre « Q-Flex QA-3000 » déterminées dans les laboratoires d'essais de la société ®Honeywell. La valeur de g correspond ici à la valeur $9,80708 m s^{-2}$.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Les accéléromètres étant particulièrement sensibles aux variations de température, l'utilisation d'une enceinte calorifugée à l'intérieur de laquelle les variations de température n'excèdent pas le 10^e de degré, est indispensable y compris pour le numériseur (Figs. 6.68 et 6.69, p. 281 et 282). À défaut, il est possible d'utiliser les mesures du capteur de température interne à chaque accéléromètre, ce qui alourdirait les manipulations préalables par un étalonnage en température particulièrement exigeant. La solution retenue pour le « Limo-g » prend en compte cette contrainte en proposant un boîtier intégrant le numériseur.



FIGURE 6.68 – Vues du système « Limo-g » dans son boîtier isotherme une fois monté sur un véhicule routier et sur une vedette hydrographique.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

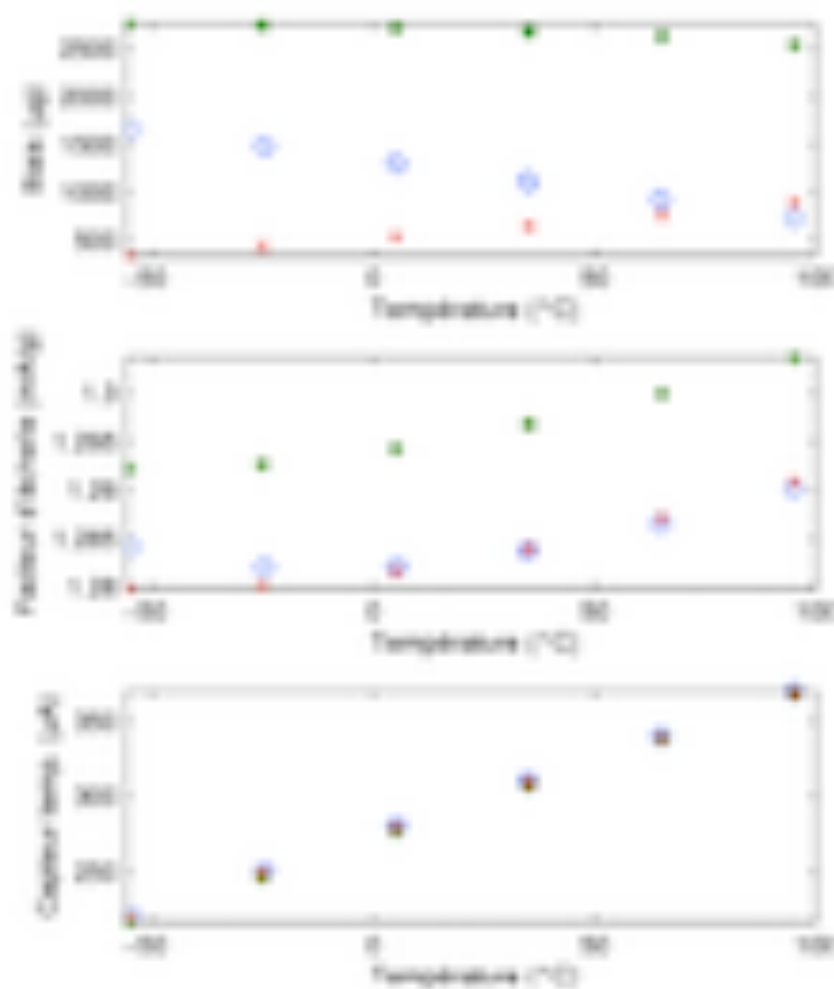


FIGURE 6.69 – Graphes des évolutions respectives, en fonction de la température, du biais et des facteurs d'échelle en accélération et en température des trois accéléromètres « Q-Flex QA-3000 » qui composent le système « Limo-g ». Le biais varie en fonction de la température de façon quasi-linéaire, jusqu'à $5 \mu\text{g}/^\circ\text{C}$ soit $5 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$. La dépendance en température est encore plus accentuée pour le facteur d'échelle : pour une valeur moyenne de $1,30 \text{ mA/g}$, il peut subir une variation quasi-linéaire de l'ordre de $10^{-4} \text{ mA/g}/^\circ\text{C}$. Ainsi, une variation de 1°C entraîne-t-elle un changement de facteur d'échelle de 10^{-4} mA/g c'est-à-dire 10^{-4} mA pour une accélération de 1g . L'erreur commise sur l'accélération en conservant une valeur constante du facteur d'échelle est de l'ordre de $10^{-4} \text{ g}/1,30$ soit environ 75 mGal .

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

La détermination de l'attitude du porteur est réalisée grâce à un système GNSS à quatre antennes « ADU-2 » de ©Ashtech (Fig. 6.70), composé de quatre bras solidaires (Fig. 6.71, p. 283) d'un châssis surmontant la structure pyramidale (Fig. 6.72, p. 283). Chaque extrémité reçoit une antenne de sorte qu'il est possible de former des lignes de base à partir de couples d'antenne recevant chacune les mêmes signaux GNSS. L'attitude du système qui porte le châssis est obtenue en estimant la matrice de rotation C_b^n qui permet de passer du repère lié au porteur b au repère de navigation n à partir des déterminations respectives des lignes de base dans ces deux repères. L'incertitude de mesure des



FIGURE 6.70 – Récepteur 4 antennes ©Ashtech « ADU-2 ».

Droits réservés : ©Ashtech.

angles décroît lorsque la longueur des lignes de base augmente. La réception des signaux sur le récepteur GNSS étant essentiellement mono-fréquence, l'utilisation de l'une des antennes en mobile (« rover »), positionnée par rapport à un pivot fixe (« base »), ne permettait pas de réduire l'incertitude sur la position absolue en dessous de 1 m, ce qui n'est pas tolérable pour la gravimétrie. Le porteur devait donc embarquer son propre système de positionnement, en l'occurrence une antenne et un récepteur bi-fréquence pour le « Limo-g ».



FIGURE 6.71 – Vue de la structure en croix portant les 4 antennes reliées au récepteur 4 antennes «ADU-800 », montée sur un trépied. Les antennes situées aux deux extrémités du même bras sont distantes de 1 m.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).



FIGURE 6.72 – Vue du montage de la structure en croix portant les antennes du récepteur 4 antennes sur la triade d'accéléromètres.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Aujourd'hui, les nouvelles versions de récepteurs multi-antennes de la gamme ®Ashtech (cf, par exemple, le système « ADU-800 », fig. 6.73), qui comprennent seulement trois antennes dont une utilisable en mode Real-Time Kinematic (RTK) ou Post-Processed Kinematic (PPK), permettraient de réduire encore l'encombrement du système. La fréquence d'acquisition des données GNSS pour le système « Limo-g » est de 2 Hz. À l'inverse, l'échantillonnage des mesures d'accélération est réalisé à des fréquences beaucoup plus hautes (31,25 ou 61,5 Hz). La combinaison des données de position, d'orientation et d'accélération met-elle en jeu une mesure ponctuelle de position ou d'attitude avec une valeur moyenne de l'accélération de rappel sur 16 (ou 32) échantillons. Ce ratio peut atteindre quasiment un pour un si le système de positionnement est une centrale inertielle, excepté dans le cas très commun où cette dernière est couplée à un système GNSS. De par sa composition, le système « Limo-g » se destine aux acquisitions terrestres de type routier, marin ou aérien, dans des environnements où les constellations de radio-positionnement restent accessibles.



FIGURE 6.73 – Récepteur multi-antennes ®Ashtech « ADU-800 ». Droits réservés : ©Ashtech.

6.3.2.3 Un étalonnage complexe

Pour comprendre le rôle de l'étalonnage et les manipulations requises pour le réaliser, il faut revenir au principe de mesure d'un accéléromètre uni-axe de type électrostatique (Fig. 6.74, p. 285). Une masse d'épreuve attachée à une lame flexible en quartz, est maintenue en équilibre dans le champ magnétique d'un électroaimant. L'équilibre est contrôlé par un capteur de position capacitif. Sous l'effet de l'accélération, cet équilibre est rompu puisque la masse d'épreuve se déplace avec un retard par rapport au boîtier du capteur, de par son inertie et la flexion de la lame. Le capteur de position détecte cet écart et informe la commande d'asservissement qui fournit à l'électroaimant le courant nécessaire pour ramener la lame flexible dans sa position d'équilibre. La force nécessaire pour cette compensation correspond à la composante de l'accélération subie dans la direction sensible de l'accéléromètre. L'intensité du courant fourni à l'électroaimant pour rétablir l'équilibre est proportionnelle à la force de compensation à un biais et un bruit près, c'est-à-dire à l'accélération. Le courant électrique est ensuite converti en une tension en vue de son échantillonnage et sa numérisation. Dans un cas idéal, l'axe sensible du capteur est confondu avec l'axe géométrique de l'accéléromètre. Les défauts de fabrication et l'usure du capteur, font que ces deux axes ne sont, en réalité, pas confondus. Le constructeur annonce un défaut d'alignement (ou mésalignement) inférieur au milliradian qui entraîne une erreur systématique maximale non négligeable de 0,5 mGal.

Pour tenir compte de ces caractéristiques, il est possible de proposer un modèle mathématique qui lie le vecteur $\mathbf{u}$ des tensions électriques u_1, u_2, u_3 mesurées en sortie de chaque accéléromètre du système « Limo-g » après numérisation et l'accélération de rappel $\mathbf{a}^s$ dans le repère s pour une température T donnée. Ce modèle s'exprime par l'équation suivante :

$$\mathbf{a}^s = \mathbf{b}_T^s + C_r^s(T) K(T) \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}_T^s, \quad (6.121)$$

où $\mathbf{b}_T^s$ est le vecteur des biais, $C_r^s(T)$, la matrice de passage 3×3 , non nécessairement orthogonale, entre le repère r formé par les axes géométriques des trois accéléromètres et le repère s , $K(T)$, la matrice 3×3 diagonale des facteurs d'échelle et $\boldsymbol{\varepsilon}_T^s$ est un bruit.

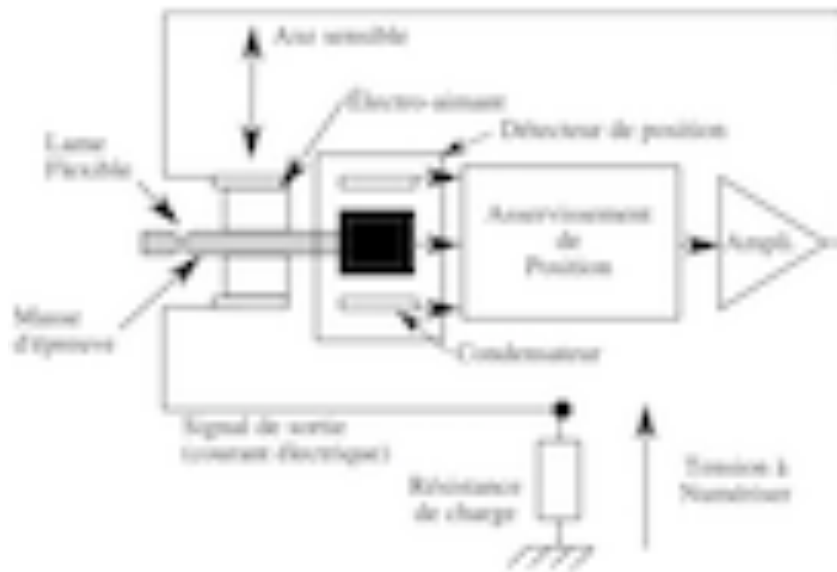


FIGURE 6.74 – Schéma de principe d'un accéléromètre électrostatique de type « Q-Flex QA-3000 ». D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Il est clair que les biais et facteurs d'échelle dépendent de la température (Fig. 6.69, p. 282). Les angles de mésalignement varient également lorsque la structure du capteur se déforme sous l'effet des variations de température. Un étalonnage complet du système requiert donc la détermination, pour chaque température de travail, des biais $\mathbf{b}_T^s$, de la matrice de mésalignement $C_r^s(T)$, de la matrice des facteurs d'échelle $K(T)$, ainsi qu'une identification du bruit $\boldsymbol{\varepsilon}_T^s$ et son niveau. Une fois le système installé dans son porteur, il faut compléter cet étalonnage par une estimation de la matrice de passage C_s^b qui permet de calculer l'accélération de rappel $\mathbf{a}^b$ dans le repère b du porteur à partir de sa détermination $\mathbf{a}^s$ dans le repère s . L'étalonnage de l'ensemble constitué du système dans le porteur est également envisageable. La modélisation de la réponse du système doit alors porter sur l'accélération de rappel $\mathbf{a}^b$ mesurée dans le repère b et l'équation correspondante s'écrit :

$$\mathbf{a}^b = C_s^b \mathbf{b}_T^s + C_s^b C_r^s(T) K(T) \mathbf{u} + C_s^b \boldsymbol{\varepsilon}_T^s. \quad (6.122)$$

La démarche suivie par De Saint-Jean (these4) a consisté tout d'abord à déterminer séparément les paramètres d'étalonnage à la température de travail du système maintenue dans son enceinte calorifugée. Les biais et facteurs d'échelle, ainsi que le bruit, ont été estimés séparément pour chaque accéléromètre en laboratoire (Fig 6.75, p. 286). La matrice de passage C_s^b a été obtenue par une méthode topométrique (Fig. 6.76, p. 287) qui consiste à mesurer les coordonnées des trièdres qui forment respectivement le repère b et le repère s dans un même repère orthonormé local l . Le calcul de la matrice C_s^b consiste ensuite en la simple multiplication matricielle :

$$C_s^b = C_l^b (C_l^s)^T. \quad (6.123)$$

Cette méthode présente cependant deux inconvénients importants. En premier lieu, elle ne considère que les axes géométriques des accéléromètres, et ne permet pas d'estimer les mésalignements – en l'occurrence, la matrice C_r^s –. En second lieu, l'incertitude de la détermination angulaire des axes des repères varie entre 1 et 10 mrad, entraînant une erreur systématique non tolérable pour la mesure de l'accélération de rappel.



FIGURE 6.75 – Étalonnage simultané des trois accéléromètres « Q-Flex QA-3000 » qui équipent le système « Limo-g ». (1) Les accéléromètres sont montés sur une platine solidaire d'un miroir, dont l'horizontalité est obtenue par auto-collimation à l'aide d'une lunette nadiro-zénithale. (2) Les accéléromètres sur la platine et le numériseur sont enfermés dans un caisson isotherme à l'intérieur duquel la température est régulée pour reproduire les conditions d'utilisation réelles des accéléromètres. Une commande extérieure permet d'incliner la platine. L'angle d'inclinaison est obtenu par des mesures d'auto-collimation au théodolite sur le miroir solidaire de la platine grâce à un axe débouchant du caisson. Connaissant l'accélération de la pesanteur locale et l'inclinaison de la platine, il est possible de déterminer l'accélération mesurée par chaque accéléromètre. La détermination de cette valeur d'accélération conjointement à la mesure donnée en sortie du numériseur pour différentes inclinaisons, fournit une série de mesures à partir de laquelle les biais et facteurs d'échelle de chaque accéléromètre peuvent être évalués.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).



FIGURE 6.76 – Étalonage du système « Limo-g » en vue d'estimer les coefficients de la matrice de passage C_s^b du repère s vers le repère b . Les piliers géodésiques permettent de matérialiser un repère local l par rapport auquel les trièdres associés aux repères s et b vont pouvoir être déterminés. Le repère b est matérialisé à partir des quatre antennes du système « ADU-2 » de sorte que l'axe y relie les antennes 1 et 2 et l'axe z soit orthogonal au plan formé par les antennes 1, 2 et 4. L'axe x complète les deux précédents pour former un trièdre orthogonal direct. Un positionnement par GNSS différentiel des antennes 1 à 4 par rapport aux piliers géodésiques permet d'obtenir leurs coordonnées dans le repère l et d'en tirer la matrice de passage C_l^b . Par ailleurs, le repère s est matérialisé par les directions normales aux trois faces supérieures du tétraèdre. Au préalable, les coordonnées de cinq points appartenant à ces faces dans le repère l sont déterminées à partir de mesures tachéométriques depuis les piliers géodésiques. Ces déterminations conduisant à une estimation de la matrice de passage C_l^s . La matrice C_l^b est ensuite calculée par l'équation 6.123, p. 285. Des mesures de contrôles de l'orientation de deux des faces du tétraèdre, ont pu être obtenues par des mesures d'auto-collimation depuis les piliers géodésiques, après avoir remplacé les accéléromètres par des miroirs coaxiaux.

D'après De Saint-Jean, 2008 (these4).

Pour contourner les limitations de la méthode topométrique, une nouvelle stratégie a dû être recherchée. Initiée dans la travail de De Saint-Jean (these4), cette dernière a été plus amplement améliorée dans le travail de Roussel (these2). L'idée de la méthode revient à considérer l'équation 6.121, p. 284 (resp. 6.122, p. 285), écrite aux valeurs moyennes pour éliminer le terme de bruit, comme une relation de changement de repère entre le vecteur $\mathbf{u}$ et le vecteur $\mathbf{a}^s$ (resp. $\mathbf{a}^b$). Le problème se ramène de la sorte à l'estimation des paramètres d'une transformation proche d'une similitude 3D, puisque le repère r des axes sensibles n'est pas rigoureusement orthogonal. L'utilisation d'une méthode d'estimation par moindres carrés des paramètres de transformation est donc tout à fait appropriée à condition de disposer de plusieurs déterminations des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{a}^s$ (resp. $\mathbf{a}^b$) dans des configurations aussi variées que possible. L'une des façons d'obtenir cette double détermination est d'orienter le système de façon contrôlée, à l'aplomb d'un point où la pesanteur est connue. Connaissant l'orientation du système, il est possible d'obtenir les accélérations mesurées par le capteur ($\mathbf{a}^s$ ou $\mathbf{a}^b$) à mettre en correspondance avec les mesures de tension ($\mathbf{u}$). Cette méthode peut être mise en œuvre au laboratoire sur une table à orientation contrôlée. Si le porteur dispose d'un capteur d'orientation suffisamment performant, un étalonage de l'ensemble du système peut être opéré au préalable sur un site d'étalonnage. Cette stratégie a été largement expérimentée dans le travail de Roussel (these2) dont il est question ci-après.

6.3.3 « GRAVIMOB » : un gravimètre mobile pour le fond de mer

6.3.3.1 Origine du projet « GRAVIMOB »

Le projet de recherche « « GRAVIMOB » » (proj2) et l'instrument éponyme sont nés d'une collaboration entre :

- le Laboratoire Domaines Océaniques (LDO) (UMR 6538, Université de Bretagne Occidentale (UBO)/CNRS),
- le laboratoire GeF-L2G,
- le LAREG,
- le laboratoire des systèmes sous-marins de l'IFREMER, basé à Toulon (83),
- le laboratoire de géophysique du SHOM,
- la jeune société de levers géophysiques « ®MAPPEM Geophysics »,

en vue de développer un système de gravimétrie mobile vectorielle, dédié spécifiquement aux sous-marins autonomes (Figs. 6.77 et 6.78, p. 289), sur lesquels le volume alloué pour l'instrumentation et l'énergie électrique disponible ne permettent pas l'utilisation d'un gravimètre conventionnel sur plate-forme stabilisée. Comme évoqué au chapitre 5 (cf section 5.3, §5.3.2, p. 171), la connaissance des reliefs sous-marins et leur composition minérale représente un enjeu considérable, non seulement pour la prospection des ressources minérales, mais aussi pour la compréhension des phénomènes géophysiques de la croûte océanique. Le projet « GRAVIMOB » se focalise plus particulièrement sur l'étude de la structure de cette croûte océanique sur les sites hydrothermaux depuis les cheminées hydrothermales, sur une échelle de quelques dizaines de kilomètres. Une attention particulière est portée notamment sur la géométrie des failles, la porosité des roches, la nature et l'épaisseur des sulfures polymétalliques présents sur les sites hydrothermaux. La bathymétrie à haute résolution et les mesures du champ magnétique et de résistivité couramment pratiquées à bord des sous-marins autonomes, apportent des données géophysiques essentielles. À ce jour cependant, il manque encore la possibilité d'obtenir également des mesures gravimétriques en champ proche à bord de ces mêmes porteurs.



FIGURE 6.77 – Vue du sous-marin autonome « Aster^x » sur le site de l'IFREMER à Toulon (83). Ce dernier est le premier porteur sous-marin à avoir accueilli le système « GRAVIMOB » en tant que charge utile. *Photo : Jérôme Verdun.*



FIGURE 6.78 – Vue du sous-marin autonome « Aster^x » avec Clément Roussel dans le laboratoire « Systèmes sous-marins » sur le site de l'IFREMER à Toulon (83). L'engin mesure 4,5 m de longueur pour un poids de 800 kg. Il est prévu pour une immersion maximale de 3 000 m, ramenée à 2 850 m en opération. Sa vitesse de croisière optimale est de 1,5 m/s; elle peut néanmoins varier de 1 à 3 m/s. Photo : Jérôme Verdun.

La spécificité de la géologie des sites hydrothermaux est son étonnante variabilité. Tout d'abord, la composition des roches varie considérablement selon leur nature et leur profondeur, ce qui impacte directement leur densité. À titre d'exemple, certains sulfures tels la pyrite présentent de forts contrastes de densité avec la croûte océanique pouvant atteindre $4 \text{ à } 5 \text{ gcm}^{-3}$ (EVANS, 1996, GRÖSCHEL-BECKER et al., 1994). Inversement, les contrastes de densité induits par les variations de porosité demeurent très faibles (BALLU et al., 1998b). La gamme des contrastes de densité observables sur les sites hydrothermaux est donc particulièrement étendue. Un second point concerne les dimensions des structures, liées au contexte géodynamique du site. Certains monts ne font qu'une centaine de mètres de haut pour quelques centaines de mètres de diamètre, si bien qu'ils demeurent quasiment indécélables à partir de données gravimétriques de surface. La variabilité des propriétés physiques et des dimensions des structures rencontrées dans les sites hydrothermaux rendent donc l'acquisition de données en champ proche indispensable. De ce point de vue, les sous-marins autonomes AUV s'avèrent tout particulièrement adaptés.

L'achèvement de la thèse de Bertrand De Saint Jean (these4) en 2008, et les recommandations qui ont pu émaner de son travail, ont donné l'impulsion pour le lancement du projet « GRAVIMOB ». Ce dernier a véritablement débuté en 2009 par des travaux préliminaires sur la modélisation du mouvement du porteur (DIASCORN, 2009) et le traitement des données [Damenet, 2012 (M2[6])]. Le lancement des travaux de thèse de Clément Roussel en janvier 2014, et la finalisation du premier prototype de système gravimétrique en 2015 ont permis des avancées considérables dans le projet, notamment les premiers tests d'acquisition statiques qui ont été menés successivement au LDO (2014), au GeF-L2G (2015) et au laboratoire

des systèmes sous-marins de l'IFREMER (2016). Les essais d'acquisition dynamique à bord d'un sous-marin autonome ont eu lieu dans la Darse d'essai de l'IFREMER en janvier 2016 (Fig. 6.79). Une pré-campagne technologique d'essai en Méditerranée à bord du navire « Europe » de l'IFREMER a suivi en mars 2016. Cette campagne a permis l'acquisition de données en mode dynamique sur 26 profils totalisant 169 km de navigation.



FIGURE 6.79 – Vue du sous-marin autonome « Aster^x » équipé du système « GRAVIMOB » lors d'un lever de test dans la Darse sur le site l'IFREMER à Toulon (83).

Photo : Jérôme Verdun.

Sur la base de ces lots de données, le travail de thèse de Clément Roussel s'est organisé en trois volets principaux :

1. le développement et la validation d'une méthode de filtrage des données du système gravimétrique qui pallie les insuffisances du filtrage de Kalman étendu et l'évaluation préalable des performances attendues du système « GRAVIMOB » ;
2. la mise au point et la validation de méthodes d'étalonnage propre au système ;
3. l'expérimentation et la validation des méthodes d'étalonnage du système et de filtrage des données à partir des mesures dynamiques acquises lors de la pré-campagne d'essai.

Les résultats des deux derniers volets étant en cours de finalisation, la suite se concentrera sur le premier avec, en guise de préliminaire, une justification de la structure particulière du système « GRAVIMOB ».

6.3.3.2 La paire de triades salubre du système « GRAVIMOB »

Dans l'approche récursive présentée au §6.2.3.2 (p. 242) subsiste une approximation qui consiste à négliger le terme de bras de levier :

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{C}_b^n \left(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right) \mathbf{L}_\alpha^b,$$

donné par l'équation 6.31 (p. 192), dans l'équation fondamentale de la gravimétrie mobile (Éq. 6.27, p. 191). Or l'étude des erreurs systématiques de la gravimétrie mobile a clairement montré l'amplitude considérable que pouvait atteindre ce terme, de sorte qu'une correction de ce dernier s'avère absolument indispensable (cf §6.1.4, p. 202 et tab. 6.2, p.205). La particularité de ce terme réside dans sa dépendance explicite avec l'attitude du porteur

et les vitesses et accélérations angulaires des changements d'attitude. Ces grandeurs interviennent directement dans le bilan d'erreur de l'amplitude du terme T_2 et doivent être mesurées avec une incertitude compatible avec les performances attendues du système gravimétrique. Pour estimer cette incertitude, un calcul simple peut être mené sur le majorant M_2 de l'amplitude de T_2 qui s'exprime par $M_2 = (\omega_{ib}^2 + \dot{\omega}_{ib}) \|\mathbf{L}_\alpha^b\|_2$ (Éq. B.8, p. 408 de l'annexe B). En supposant le bras de levier parfaitement connu et la vitesse de changement d'attitude constante, l'incertitude relative $\Delta M_2 / M_2$ sur le terme M_2 en fonction de l'incertitude relative $\Delta \omega_{ib} / \omega_{ib}$ sur la vitesse de changement d'attitude est donnée par :

$$\frac{\Delta M_2}{M_2} = 2 \frac{\Delta \omega_{ib}}{\omega_{ib}}. \quad (6.124)$$

Étant donné l'amplitude atteinte par le terme M_2 (≈ 1000 mGal; cf Tab. 6.2, p. 205), il faut assurer une incertitude relative du 1000^e sur M_2 pour atteindre une incertitude absolue de 1 mGal sur ce dernier. La vitesse angulaire ω_{ib} doit donc être mesurée avec une incertitude relative de $5 \cdot 10^{-4}$ difficile d'accès en mode dynamique. L'expression mathématique du terme T_2 suggère cependant une parade qui repose sur une simple constatation : le terme T_2 se change en son opposé lorsque le bras de levier $\mathbf{L}_\alpha^b$ en fait de même. Cette propriété se traduit mathématiquement par :

$$T_2(-\mathbf{L}_\alpha^b) = -T_2(\mathbf{L}_\alpha^b). \quad (6.125)$$

Supposons à présent la disponibilité des mesures d'accélération données par deux triades, placées respectivement aux points M_α et M_β (Fig. 6.80). Les équations qui relient l'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}^n$ et l'accélération de rappel $\mathbf{a}^b$ en ces deux points s'écrivent alors, d'après les équations 6.27, 6.30 et 6.31 (pp. 191 et 192) :

$$\mathbf{g}_\alpha^n = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\alpha^b) - C_b^n \mathbf{a}_\alpha^b, \quad (6.126)$$

$$\mathbf{g}_\beta^n = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\beta^b) - C_b^n \mathbf{a}_\beta^b. \quad (6.127)$$

Quelles que soient les positions des triades, le terme $\mathbf{T}_1$ reste inchangé puisque lié au seul mouvement d'ensemble du porteur. En formant la demi-somme et la différence entre les relations 6.126 et 6.127, il vient alors :

$$\frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha^n + \mathbf{g}_\beta^n) = \mathbf{T}_1 + \frac{1}{2}[\mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\alpha^b) + \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\beta^b)] - C_b^n \frac{\mathbf{a}_\alpha^b + \mathbf{a}_\beta^b}{2}, \quad (6.128)$$

$$\mathbf{g}_\alpha^n - \mathbf{g}_\beta^n = \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\alpha^b) - \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\beta^b) + C_b^n(\mathbf{a}_\beta^b - \mathbf{a}_\alpha^b). \quad (6.129)$$

Une façon simple d'éliminer le terme $\mathbf{T}_2$ de l'équation 6.128, compte tenu de la propriété 6.125, est de placer les triades de sorte que les bras de leviers $\mathbf{L}_\alpha^b$ et $\mathbf{L}_\beta^b$ mesurés respectivement aux points M_α et M_β soient directement opposés ($\mathbf{L}_\beta^b = -\mathbf{L}_\alpha^b$). Cette configuration suppose que le point P du porteur, origine du repère de navigation, coïncide strictement avec le milieu du segment $[M_\alpha M_\beta]$ (Fig. 6.80). L'accélération, la vitesse et la position du point P doivent par ailleurs être déterminées au mieux en vue de l'estimation du terme correctif $\mathbf{T}_1$.

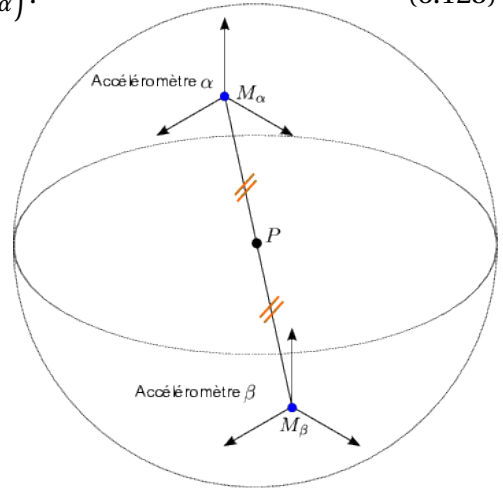


FIGURE 6.80 – Position relatives de deux triades symétriques par rapport à un point P .

En outre, la moyenne des accélérations gravitationnelles mesurées aux points M_α et M_β est égale, au second ordre près, à l'accélération gravitationnelle au point P . Plus précisément, les développements de Taylor des accélérations gravitationnelles $\mathbf{g}_\alpha^n$ et $\mathbf{g}_\beta^n$ peuvent s'exprimer en fonction du tenseur des gradients de gravité $\nabla \mathbf{g}^n(P)$ au point P par :

$$\mathbf{g}_\alpha^n = \mathbf{g}_P^n + \nabla \mathbf{g}_P^n C_b^n \mathbf{L}_\alpha^b + \left\| \mathbf{L}_\alpha^b \right\|_2 \boldsymbol{\epsilon}_\alpha \left(\mathbf{L}_\alpha^b \right), \quad (6.130)$$

$$\mathbf{g}_\beta^n = \mathbf{g}_P^n - \nabla \mathbf{g}_P^n C_b^n \mathbf{L}_\alpha^b + \left\| \mathbf{L}_\alpha^b \right\|_2 \boldsymbol{\epsilon}_\beta \left(\mathbf{L}_\alpha^b \right), \quad (6.131)$$

où $\boldsymbol{\epsilon}_\alpha(\mathbf{L}_\alpha^b)$ et $\boldsymbol{\epsilon}_\beta(\mathbf{L}_\alpha^b)$ sont deux fonctions qui tendent vers $\mathbf{0}$ lorsque $\mathbf{L}_\alpha^b$ (et donc $\mathbf{L}_\beta^b$) tend vers $\mathbf{0}$.

La combinaison des équations 6.128, 6.130 et 6.131 pour $\mathbf{L}_\alpha^b = -\mathbf{L}_\beta^b$ et en négligeant les termes du second ordre, conduit finalement à l'expression de l'accélération de la pesanteur $\mathbf{g}_P^n$ indépendante du terme T_2 :

$$\mathbf{g}_P^n = \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}_\alpha^n + \mathbf{g}_\beta^n \right) = T_1 - \frac{1}{2} C_b^n \left(\mathbf{a}_\alpha^b + \mathbf{a}_\beta^b \right). \quad (6.132)$$

L'intérêt de l'utilisation d'une paire de triades d'accéléromètres montées de façon symétrique par rapport à un point P effectivement positionné, vient donc de ce que le mode commun ne dépend plus des termes de bras de levier, délicat à estimer et restitué, au second ordre près, l'accélération gravitationnelle au point P . C'est là une amélioration importante par rapport au système « Limo-g ».

6.3.3.3 Composition du système « GRAVIMOB »

Le cœur du système « GRAVIMOB » est constitué de deux triades de trois accéléromètres « Q-Flex QA-3000 ». Chaque triade est matérialisée par un support formé par l'assemblage trois parallélépipèdes rectangles imbriqués à angle droit (Fig. 6.81, p. 293). Chaque parallélépipède reçoit un accéléromètre de telle façon que l'axe de symétrie de son boîtier soit orthogonal aux axes des boîtiers des deux autres accéléromètres. Ce support permet donc de réunir trois accéléromètres en assurant que les axes de symétrie de leurs boîtiers soient orthogonaux. En revanche, par construction, ces trois axes ne peuvent être concourants, mais seulement parallèles aux trois arêtes orthogonales et concourantes du support. La distance entre l'axe de symétrie de l'accéléromètre et l'axe du support étant inférieure à 2 cm, la différence d'accélération induite par une rotation uniforme de vitesse égale à $0,5^\circ/\text{s}$ atteindrait $(0,5 \times \pi/180)^2 \times 2 \times 10^{-2} \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$, soit 0,15 mGal, ce qui demeure négligeable comparé à la sensibilité des accéléromètres.

Pour le montage des deux triades, un bâti constitué par un plateau circulaire principal entouré de trois armatures semi-circulaires reliées entre elles par deux plateaux auxiliaires coaxiaux avec le plateau principal, l'un, inférieur, placé au-dessus et l'autre, supérieur, en dessous du plateau principal (Fig. 6.82, p. 293). Les deux triades sont installées respectivement sur le plateau inférieur et sur une nacelle circulaire solidaire du plateau supérieur placée en dessous de ce dernier. Ce montage, aux imperfections mécaniques près, permet de maintenir fixe les deux triades le long de l'axe de symétrie des plateaux. L'ensemble du dispositif est enfermé dans une enceinte étanche constituée de deux hémisphères en verre, remplie d'air à faible pression. La sphère contenant le dispositif peut ensuite être installée dans le nez de l'AUV via un support d'adaptation conçu et fabriqué par l'IFREMER (Fig. 6.83,

p. 294). Lors d'une plongée, le nez de l'AUV se remplit d'eau de mer, faisant de la sphère le seul rempart qui protège le système de l'eau de mer. L'alimentation électrique et les signaux de communications sont amenés par un faisceau de fils rassemblés en un câble traversant à la base de la sphère.



FIGURE 6.81 – Support de montage des trois accéléromètres «Q-Flex QA-3000» de sorte que les axes de symétrie de leurs boîtiers respectifs soient orthogonaux, bien que non concourants.

Photo : Clément Roussel.

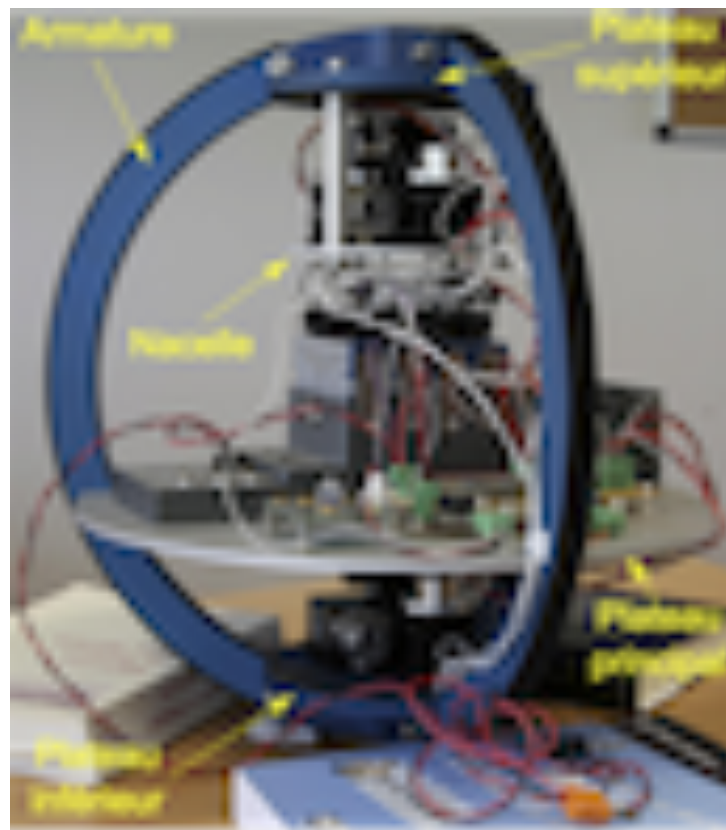


FIGURE 6.82 – Bâti du système « GRAVIMOB » constitué d'un plateau principal entouré par trois armatures semi-circulaires dont les deux extrémités sont fixées sur un plateau supérieur et un plateau inférieur respectivement. Une nacelle reçoit la première triade, alors que le plateau inférieur accueille la seconde. *Photo : Clément Roussel.*

Aucune régulation de la température à l'intérieur de la sphère n'étant prévue, un équilibre thermique va s'établir naturellement entre les gaz enfermés dans la sphère et l'eau de mer qui va jouer le rôle d'un thermostat. En général, la température de l'eau de mer en profondeur, au-delà de 1000 m, est remarquablement constante – environ $+14,5^{\circ}\text{C}$ en Méditerranée et $+3$ à $+4^{\circ}\text{C}$ dans l'océan Atlantique –, ce qui permet un fonctionnement du dispositif sans variation sensible de température.

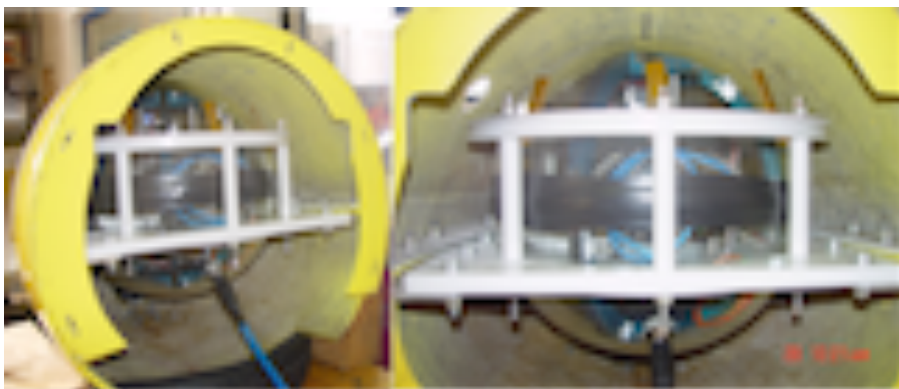


FIGURE 6.83 – Vues de la sphère étanche contenant le système « GRAVIMOB » et installée dans le nez du sous-marin à l'aide d'un adaptateur léger en matière plastique. Un câble multi-fils unique par lequel transitent l'alimentation électrique et le signaux d'horloge et de communication, débouche à la base de la sphère. Photo : Jérôme Verdun.

Le plateau principal reçoit par ailleurs le numériseur ainsi que le dispositif de transmission des données (Fig. 6.85a, p. 295). Outre les mesures des accélérations et des températures internes des accéléromètres, le système acquiert les mesures d'inclinaison en provenance d'un inclinomètre à deux axes. L'ensemble de ces mesures est échantillonné à la fréquence de 2 Hz. Cette dernière a été choisie dans la gamme $[0; 10]$ Hz pour laquelle le bruit intrinsèque des accéléromètres est inférieur à 7 mGal (EMQ). Par conception, le système « GRAVIMOB » ne comporte pas de capteur de position et d'orientation. Les données correspondantes sont fournies par les propres capteurs du système de navigation de l'AUV qui délivre, en plus, son signal d'horloge synchronisée sur le temps GPS, pour servir de base de temps pour le système « GRAVIMOB ».

La navigation autonome d'un sous-marin de type AUV nécessite la combinaison de données issues de plusieurs capteurs de nature différentes, parmi lesquels figurent :

1. une centrale inertielle de grade tactique (Strapdown Inertial Navigation System (SINS)) (Fig. 6.85b, p. 295) ;
2. un vélocimètre à effet Doppler (DVL) ;
3. un récepteur GNSS placé sur le navire en liaison acoustique ultra-courte (Fig. 6.84) avec le sous-marin (USBL).

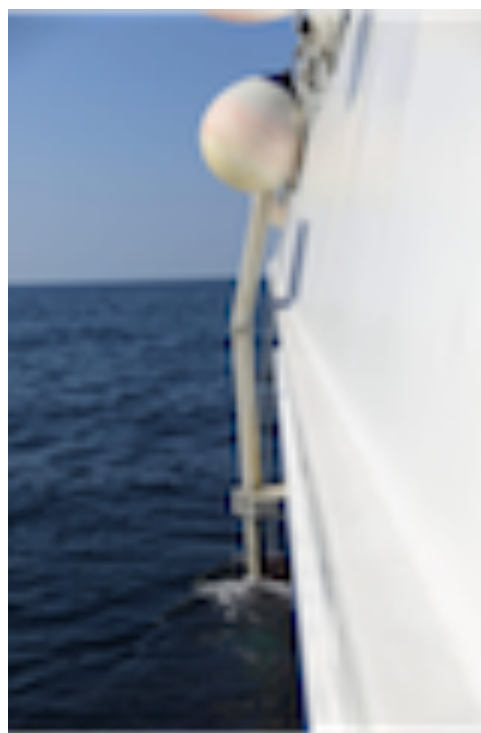
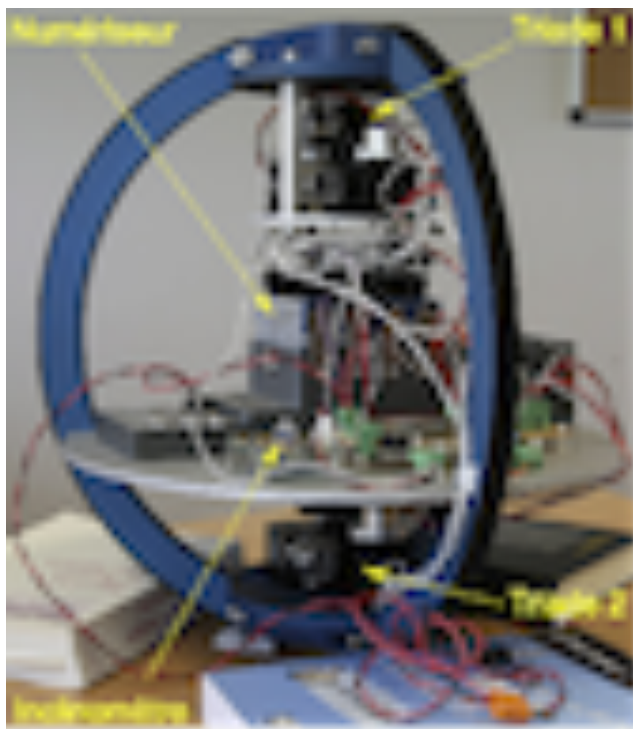


FIGURE 6.84 – Vue du capteur réalisant la liaison acoustique ultra-courte navire/sous-marin. Photo : C. Roussel.

En plus du suivi et le contrôle continu de la trajectoire en cours de lever depuis le navire, un filtre de Kalman permet de ré-estimer, en traitement différé, tous les paramètres de mouvement et d'orientation du sous-marin, ce qui permet d'en réduire l'incertitude. Les incertitudes obtenues à l'issue du traitement différé atteignent :

- 2 m sur la planimétrie et 20 cm sur la hauteur au-dessus du fond pour le positionnement absolu;
- $0,04^\circ$ sur l'angle de lacet et entre $0,003^\circ$ et $0,004^\circ$ pour les angles de roulis et de tangage.

Le traitement des données gravimétriques s'effectue donc à partir des données de position et d'orientation post traitées issues du système de navigation du sous-marin et des données d'accélération en provenance du dispositif « GRAVIMOB ». L'ensemble des données est daté à partir de la même échelle de temps, assurant ainsi une synchronisation parfaite des mesures.



(a) Vue du numériseur et de l'inclinomètre à deux axes qui équipent le système « GRAVIMOB ».



(b) Vue de la centrale inertielle PHINS™ (®IXBLUE) installée dans la cale sèche à l'arrière du sous-marin..

FIGURE 6.85 – Photos : Clément Roussel et Jérôme Verdun.

De par sa composition et les mesures qu'il acquiert, le système « GRAVIMOB » respecte scrupuleusement les spécifications qui découlent de l'équation fondamentale de la gravimétrie mobile. L'obtention des paramètres cinématiques du point P milieu des deux triades (Figs. 6.80, p. 291 et 6.85a, p. 295), requis pour le calcul du terme T_2 (Éq. 6.132, p. 6.132) est tout à fait possible à condition de déterminer préalablement ses coordonnées dans le repère b . De telles coordonnées peuvent se déduire d'un plan numérique complet du système et du porteur ou des résultats d'un lever de topométrie de précision.

6.3.3.4 Un pas vers la gradiométrie

En considérant à présent les relations 6.129 (p. 291), 6.130 et 6.131 (p. 292), une expression des gradients de gravité dans la direction du bras de levier peut être obtenue comme suit :

$$\nabla \mathbf{g}_P^n C_b^n (\mathbf{L}_\alpha^b - \mathbf{L}_\beta^b) = \mathbf{g}_\alpha^n - \mathbf{g}_\beta^n = \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\alpha^b) - \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\beta^b) - C_b^n (\mathbf{a}_\alpha^b - \mathbf{a}_\beta^b) = 2 \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\alpha^b) - C_b^n (\mathbf{a}_\alpha^b - \mathbf{a}_\beta^b),$$

puisque $\mathbf{L}_\alpha^b = -\mathbf{L}_\beta^b$

Le vecteur $\mathbf{L}_\alpha^b - \mathbf{L}_\beta^b$ représente la séparation spatiale des deux triades d'accéléromètres situées respectivement aux points M_α et M_β . Ce vecteur définit donc un axe caractéristique du système « GRAVIMOB ». En notant $\hat{\mathbf{u}}_{\beta\alpha}^b$ le vecteur unitaire colinéaire à la droite $[M_\alpha M_\beta]$, dirigé de M_β vers M_α et $L_{\beta\alpha}$ la norme du vecteur $\mathbf{L}_\alpha^b - \mathbf{L}_\beta^b$, il vient simplement :

$$\mathbf{L}_\alpha^b - \mathbf{L}_\beta^b = L_{\beta\alpha} \hat{\mathbf{u}}_{\beta\alpha}^b. \quad (6.133)$$

L'expression des gradients de gravité dans la direction du vecteur $\hat{\mathbf{u}}_{\beta\alpha}^b$ s'écrit donc :

$$\nabla \mathbf{g}_P^n C_b^n \hat{\mathbf{u}}_{\beta\alpha}^b = \frac{1}{L_{\beta\alpha}} \left[2 \mathbf{T}_2(\mathbf{L}_\alpha^b) - C_b^n (\mathbf{a}_\alpha^b - \mathbf{a}_\beta^b) \right]. \quad (6.134)$$

Cette relation montre que la combinaison de mesures exprimée par le second membre de l'équation 6.134 fournit un vecteur dont les composantes sont des combinaisons linéaires de tous les éléments du tenseur de Marussi $\nabla \mathbf{g}_P^n$ dans le repère de navigation. Ce tenseur étant symétrique, à trace nulle (cf Chap. 2, Sec. 2.2, §2.2.3, p. 26), il possède seulement cinq éléments indépendants. Il suffirait donc théoriquement de deux relations vectorielles telle l'équation 6.134, donnant un total de six équations liant les éléments du tenseur $\nabla \mathbf{g}_P^n$, pour le déterminer complètement. Le dispositif devrait donc être complété par deux nouvelles triades qui formeraient un nouveau « bras » dans une direction orthogonale au premier bras. La configuration composée de trois bras $[M_{\beta_i} M_{\alpha_i}]$, $i = 1, 2, 3$ orthogonaux aux extrémités desquels sont installées des triades d'accéléromètres, correspond très exactement à celle du gradiomètre embarqué sur le satellite gravimétrique GOCE (Fig. 6.86, p. 297). Le satellite comprend également un capteur d'orientation stellaire qui permet notamment la reconstitution du terme $\mathbf{T}_2$. Ainsi, la configuration retenue pour le système « GRAVIMOB » (Fig. 6.80, p. 291) reproduit-elle par des composants discrets, l'un des trois bras du gradiomètre GOCE. De surcroît, la formulation mathématique employée pour modéliser le système « GRAVIMOB » s'apparente complètement à celles qui décrivent le gradiomètre GOCE (RUMMEL et al., 2011, VISSER, 2011). La version « terrestre » du gradiomètre GOCE pourrait donc être réalisée à partir de trois systèmes « GRAVIMOB » dont les axes seraient orthogonaux deux à deux. S'il semble possible d'intégrer un tel dispositif dans une structure transportable, la question cruciale qui se pose ensuite concerne les performances atteignables sur la mesure des gradients de gravité, étant donné celles des capteurs de position et d'orientation embarqués sur les porteurs. C'est pour répondre à cette question de façon quantitative qu'a été développé un simulateur numérique du système « GRAVIMOB » décrit ci-après.

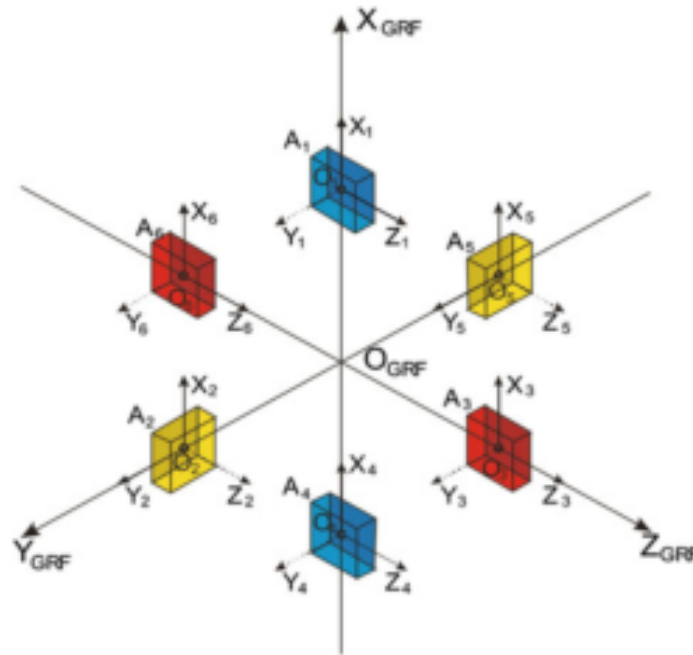


FIGURE 6.86 – Schéma de principe du gradiomètre embarqué sur le satellite gravimétrique GOCE. En chaque point O_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ est implanté un accéléromètre à trois axes. Les six accéléromètres sont regroupés en trois paires ayant chacune un axe sensible en commun. Les trois axes des paires d'accéléromètres constituent alors le repère orthogonal ($O_{GRF} X_{GRF} Y_{GRF} Z_{GRF}$) de l'instrument (repère de type s ; « GRF = Gradiometer Reference Frame »). Le tenseur de Marussi est mesuré au point O_{GRF} . La technologie utilisée par l'ONERA pour fabriquer ce gradiomètre en fait un dispositif tout intégré. Le système « GRAVIMOB » reproduit simplement l'un des bras du gradiomètre GOCE à partir d'accéléromètres uni-axes.

D'après RUMMEL et al. (2011).

6.3.3.5 Les leçons du simulateur

6.3.3.5.1 Principe du simulateur

Le principe du simulateur numérique développé pour le système « GRAVIMOB » est décrit en détail dans Roussel et al., 2015 (act1). La première étape consiste à générer un champ de gravité synthétique à partir de sources réalistes compte tenu des cibles envisagées pour le système « GRAVIMOB ». La source choisie consiste en une succession de blocs minéraux denses enfouis sous la surface topographique du fond de mer (Figs. 6.87 et 6.88, p. 298). Le champ gravitationnel de référence – accélération gravitationnelle et tenseur de Marussi – est ensuite obtenu en ajoutant au champ normal⁶ les contributions gravitationnelles du relief et des blocs minéraux. Une fois le champ de référence fixé, il faut positionner les profils d'un lever qui permettrait la mesure du champ (Figs. 6.89 et 6.90, pp. 299 et 300) et sélectionner des conditions expérimentales de lever qui soient réalistes. Pour ce, une étude fine des données de navigation du sous-marin, observées durant la campagne « ESS-AUV 2012 » (cf §6.1.4, Tab. 6.1, p. 202 et Fig. 6.14, p. 204), a permis de déterminer des modèles mathématiques des tendances non aléatoires⁷ suivies par les variations de la position et l'attitude du porteur le long d'un profil de mesure.

6. ou tout autre modèle de champ jusqu'au degré harmonique 2.

7. Ces tendances se composent d'une fonction polynôme et d'une fonction trigonométrique pour modéliser les variations périodiques.

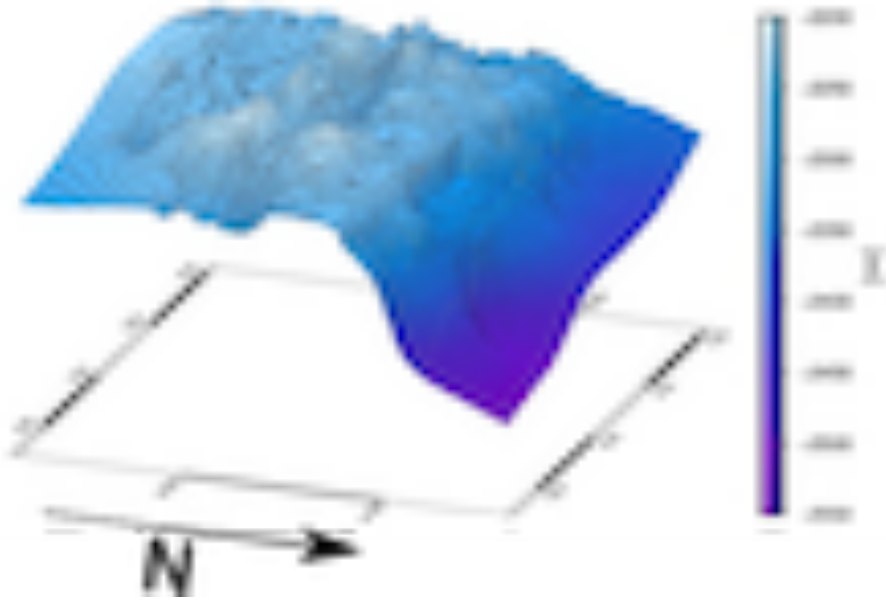


FIGURE 6.87 – Vue 3D de la topographie sous-marine utilisée dans le simulateur. Il s'agit d'un mont sous-marin bordé par une vallée au nord. La dénivelée maximale atteint 350 m.

D'après Roussel et al., 2015 (acti1).

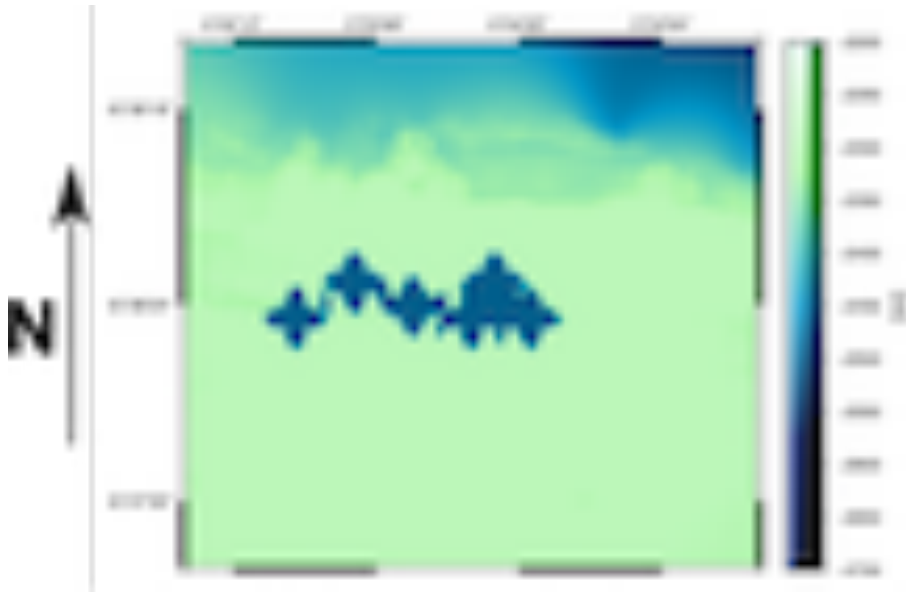


FIGURE 6.88 – Carte bathymétrique de la zone utilisée dans le simulateur (Fig. 6.87), sur laquelle figurent des blocs minéraux plus denses ($3,85\text{gcm}^{-3}$) que la croûte océanique qui les contient ($2,70\text{gcm}^{-3}$). Les blocs ont une épaisseur totale de 200 m depuis leurs sommets situés à une profondeur de -2 600 m. *D'après Roussel et al., 2015 (acti1).*

Muni des valeurs des paramètres de position et d'orientation et connaissant le champ de gravité en chaque point des profils, le calcul des accélérations de rappel $\mathbf{a}_\alpha^b$ et $\mathbf{a}_\beta^b$ s'effectue simplement par inversion des équations de la gravimétrie mobile (Éq 6.27, p. 191), ce qui conduit à :

$$\mathbf{a}_\alpha^b = C_n^b \left[C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^n \ddot{\mathbf{X}}_P^e + C_b^n \left(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right) \mathbf{L}_\alpha^b - \mathbf{g}_\alpha^n \right] \quad (6.135)$$

$$\mathbf{a}_\beta^b = C_n^b \left[C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e \mathbf{X}_P^e + 2 C_e^n \Omega_{ie}^e \dot{\mathbf{X}}_P^e + C_e^n \ddot{\mathbf{X}}_P^e + C_b^n \left(\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b \right) \mathbf{L}_\beta^b - \mathbf{g}_\beta^n \right] \quad (6.136)$$

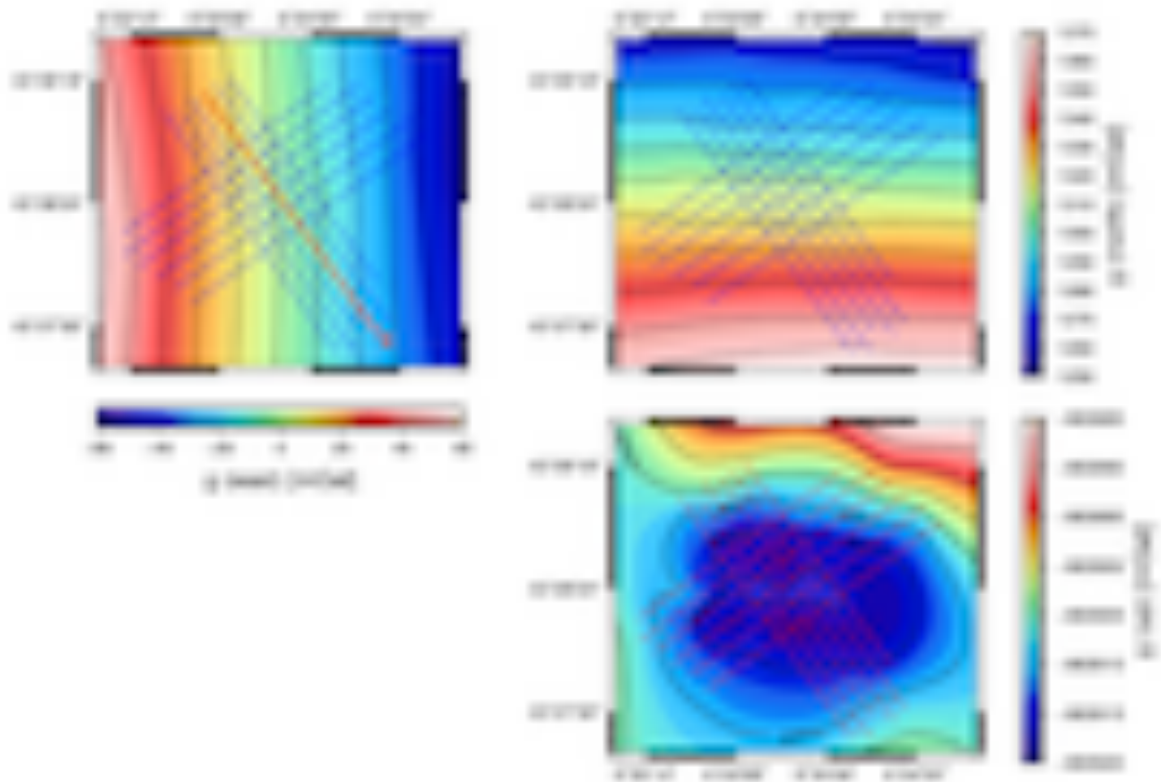


FIGURE 6.89 – Cartes des composantes est (east), nord (north) et verticale (up) de l'accélération gravitationnelle observable à $-2\,200$ m de profondeur au-dessus du mont sous-marin représenté en figure 6.87 (p. 298). La simulation porte sur les douze profils représentés en trait continu qui ont chacun une longueur de $3\,600$ m. Le profil 3 représenté en trait continu rouge servira d'illustration dans la suite. La vitesse moyenne de lever est supposée égale à $4,3$ km/h ($1,2$ m/s), ce qui correspond à une durée de lever égale à 50 minutes. La signature gravitationnelle des blocs minéraux ne les rend pas visibles sur ces cartes. Les calculs de champ ont été réalisés à l'aide du logiciel « Tesseroids » (UIEDA et al., 2016).

D'après Roussel et al., 2015 (act1).

La dernière étape nécessaire avant de lancer des simulations de mesure, suppose l'identification des bruits qui affectent les grandeurs mesurées et l'évaluation de leur niveau. Les données techniques des constructeurs de capteurs fournissent des indications sur ces bruits, qu'il faut néanmoins compléter par l'analyse des graphes de l'écart-type d'Allan calculé sur de longues séries de mesures (cf §6.1.5, p. 210). La simulation s'opère ensuite suivant une méthode de Monte Carlo : un ensemble de tirages aléatoires⁸ des bruits conduit à des ensembles de valeurs des mesures de position, d'orientation et d'accélération de rappel, qui sont combinés par les équations 6.135 et 6.136 (p. 298) pour produire un ensemble de valeurs de $\mathbf{g}_p^n$ et $\nabla \mathbf{g}_p^n$. L'erreur de mesure et sa variance sont alors déterminées en calculant la moyenne et la variance empirique des écarts de $\mathbf{g}_p^n$ et $\nabla \mathbf{g}_p^n$ à leurs valeurs de référence.

8. En l'occurrence, $1\,000$ tirages.

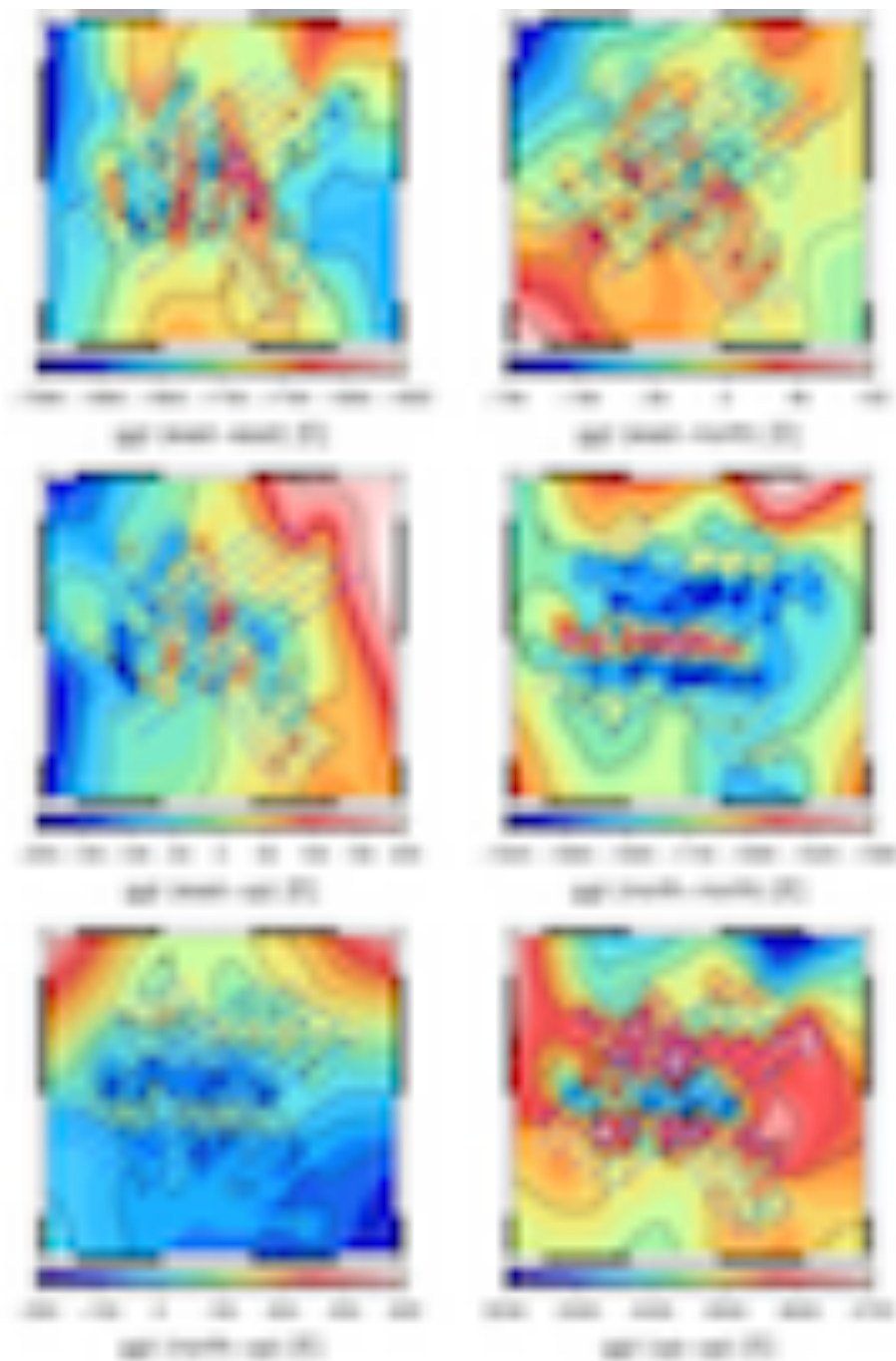


FIGURE 6.90 – Cartes des six éléments du tenseur de Marussi observable à $-2\,200$ m de profondeur dans le repère n au-dessus du mont sous-marin représenté en figure 6.87 (p. 298). Les éléments diagonaux correspondent aux composantes est-est (east-east), nord-nord (north-north) et verticale (up-up). Les trois éléments non-diagonaux représentés sont les composantes est-nord (east-north), est-verticale (east-up) et nord-verticale (north-up). À l'inverse de ce qui a pu être observé sur les cartes des composantes de l'accélération gravitationnelle, la signature gravitationnelle des blocs minéraux apparaît sur toutes les cartes sans exception.

D'après Roussel et al., 2015 (act1); calculs réalisés avec le logiciel « Tesseroids » (UIEDA et al., 2016).

6.3.3.5.2 Des résultats instructifs et contrastés

Les simulations de Monte Carlo ont consisté à calculer l'erreur d'estimation des composantes de l'accélération gravitationnelle g_E^n , g_N^n , g_U^n et des éléments d'une colonne du tenseur de Marussi dans le repère b sur les profils gravimétriques représentés sur la figure 6.89 (p. 299). Afin d'évaluer l'effet des bruits de mesure sur l'erreur d'estimation, les simulations ont été séparées en trois catégories distinctes selon que les bruits de mesure (Tab. 6.14) affectent exclusivement :

1. les capteurs de position (scénario 1) ;
2. les capteurs d'orientation (scénario 2) ;
3. les accéléromètres (scénario 3).

Les résultats obtenus pour le profil n°3 (Fig. 6.89, p. 6.89) avec un bras de levier de 20 cm ($\|\mathbf{L}^b\|_2 = 20$ cm) sont représentés sous la forme de graphes qui donnent, pour chaque grandeur, les valeurs de l'erreur d'estimation en fonction d'un niveau de filtrage passe-bas⁹, traduit par une longueur d'intégration (Figs. 6.91, p. 302, 6.92, p. 302, et 6.93, p. 303) qui joue aussi le rôle de résolution spatiale.

Grandeur	Scénario		
	1	2	3
Position	IRW (λ, φ) + WN (h)		
	3,6 m/0,020 m		
Orientation		WN	
		0,01°/0,02° (cap)	
Accélération			WN + RW
			1 mGal/0,015 mGal $\sqrt{\text{Hz}}$

TABLEAU 6.14 – Définitions de la nature et du niveau des bruits qui affectent les mesures de position, d'orientation et d'accélération lors des scénarios 1, 2 et 3 respectivement. Les bruits considérés sont : le bruit blanc (WN = White Noise), la marche aléatoire (RW = Random Walk) et la marche aléatoire du second ordre, c'est-à-dire après une intégration (IRW = Integrated Random Walk). λ , φ et h désignent respectivement la longitude, la latitude et la hauteur du porteur. La valeur du bruit IRW (3,6 m) correspond à la dérive mesurée en sortie de profil estimé à 0,01 % de sa longueur totale.

D'après Roussel et al., 2015 (act11).

L'analyse des résultats, confirmés pour les autres profils, montre tout d'abord que les erreurs de position (scénario 1, fig. 6.91, p. 302) perturbent plus fortement l'estimation de la composante verticale g_U^n que les composantes horizontales g_E^n , g_N^n . Par exemple, l'erreur d'estimation sur ces dernières est de l'ordre de 1 mGal à 1 km de résolution, alors qu'elle atteint encore 200 mGal sur la composante verticale. Cette valeur élevée s'explique également par le niveau de bruit sur la position particulièrement exagéré (3,6 m de dérive horizontale en fin de profil) comparé aux performances obtenues lors de la campagne d'essai (dispersion horizontale d'écart-type égal à 2 m). L'amélioration du positionnement du sous-marin demeure essentielle pour la restitution de la composante verticale avec une résolution plus fine que 1 km. En présence des seules erreurs de position, les performances sur la restitution du tenseur de Marussi sont particulièrement remarquables puisque l'erreur reste en-dessous

9. Il s'agit ici d'un filtre à moyenne mobile.

de 1 E jusqu'à 2 m de résolution. L'erreur de position n'est donc pas le facteur limitant pour l'estimation des gradients avec le système « GRAVIMOB ».

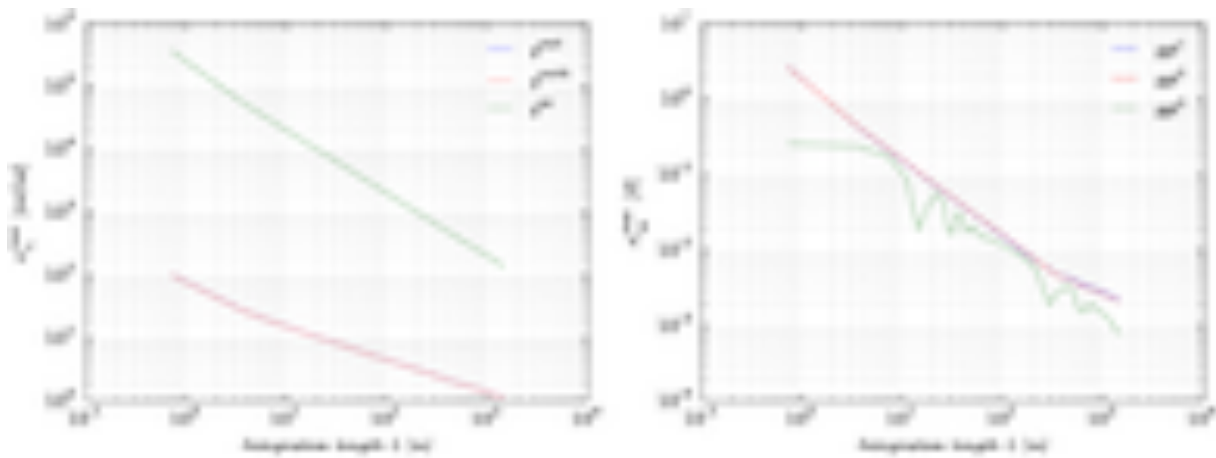


FIGURE 6.91 – Graphes de l'erreur d'estimation des composantes g_E^n , g_N^n , g_U^n de l'accélération gravitationnelle et des trois éléments ggt^1 , ggt^2 , ggt^3 de la 3^e colonne tenseur de Marussi dans le repère b en fonction de la longueur d'intégration L . La simulation suppose ici que seules les mesures de position sont affectées par du bruit (scénario 1).

D'après Roussel et al., 2015 (act1).

La situation s'inverse radicalement en présence des seules erreurs de mesure de l'orientation (scénario 2, fig. 6.92, p. 302). Alors qu'une erreur inférieure à 1 mGal peut être atteinte sur la composante verticale g_U^n à seulement 40 m de résolution, celle qui affecte les composantes horizontales est encore de presque 200 mGal. Ce phénomène est encore plus flagrant sur les gradients de gravité horizontaux pour lesquels l'erreur d'estimation dépasse encore 2000 E à 1 km de résolution, soit quasiment 100 % du signal gravitationnel observable. Le gradient vertical, bien que moins affecté, présente néanmoins une erreur de l'ordre de 200 E à 1 km de résolution, soit encore 10 % d'erreur relative. Ces résultats suggèrent qu'un effort tout particulier doit être consenti sur les performances des capteurs d'orientation, en vue d'une utilisation du « GRAVIMOB » en gravimètre vectoriel et en gradiomètre.

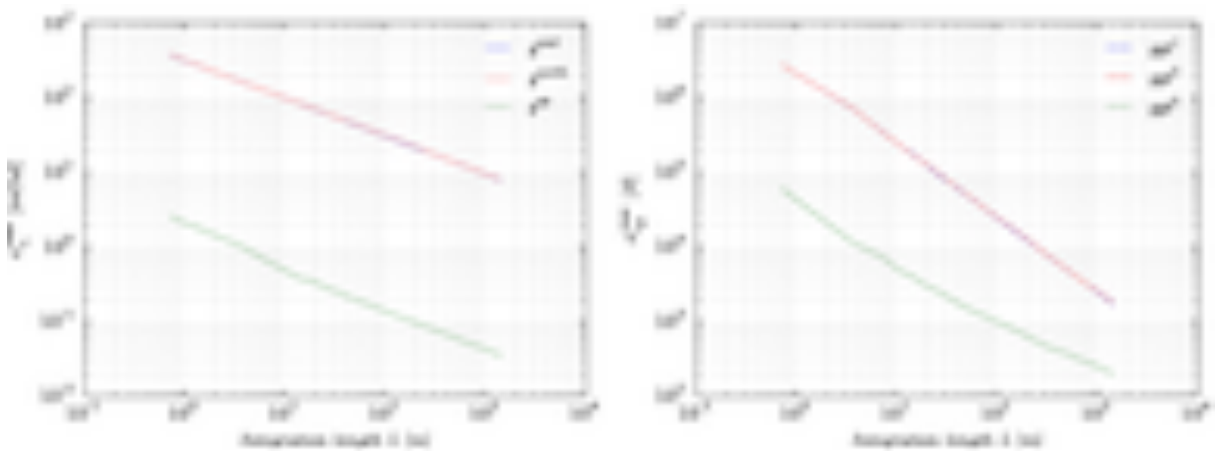


FIGURE 6.92 – Graphes identiques à ceux de la figure 6.91 (p. 302) en supposant que seules les mesures d'orientation sont affectées par du bruit (scénario 2).

D'après Roussel et al., 2015 (act1).

Enfin, un phénomène prévisible, mais très surprenant, apparaît dans la simulation qui considère la position et l'orientation parfaitement connues (scénario 3, fig 6.93, p. 303) : les erreurs d'estimation de l'accélération gravitationnelle et des gradients de gravité demeurent quasiment constantes quelle que soit la résolution. En réalité, le filtre passif utilisé dans le processus de calcul ne convient pas au filtrage du bruit non stationnaire (marche aléatoire du 1^{er} ordre) qui affecte les mesures d'accélération. Le traitement d'un tel bruit passe obligatoirement par l'utilisation de méthodes de filtrage optimal dans lesquelles la nature du bruit peut être modélisée dans les équations d'évolution. Afin de pallier les insuffisances du filtre de Kalman étendu, en particulier, l'apparition d'instabilités dans le filtrage de par l'utilisation d'équations d'observation linéarisées, une nouvelle méthode basée sur le filtre de Kalman « unscented » (Unscented Kalman Filter (UKF)) est expérimentée dans le travail de thèse de Clément Roussel (these2). Le filtre UKF ne nécessitant pas de linéarisation (JULIER et UHLMANN, 1997), il s'avère particulièrement robuste (Fig. 6.94, p. 304) même en présence d'équations d'observation ou d'évolution fortement non linéaires, telle l'équation 6.27 (p. 191). Pour revenir sur la figure 6.93, il apparaît que le graphe de l'erreur d'estimation de l'accélération gravitationnelle est conforme aux performances des accéléromètres (Tab. 6.13, p. 281). En revanche, le graphe des gradients de gravité montre un niveau d'erreur considérable compris entre 5.10^4 et 7.10^4 E dû aux seules imperfections des accéléromètres, qui ne pourra pas vraisemblablement être atténué par le seul filtrage optimal. Pour espérer atteindre sur les gradients de gravité, un niveau d'erreur compatible avec les cibles sous-marines envisagées, il apparaît essentiel d'envisager l'utilisation d'accéléromètres à très faible bruit, avant même d'améliorer quoi que ce soit sur les capteurs d'orientation.

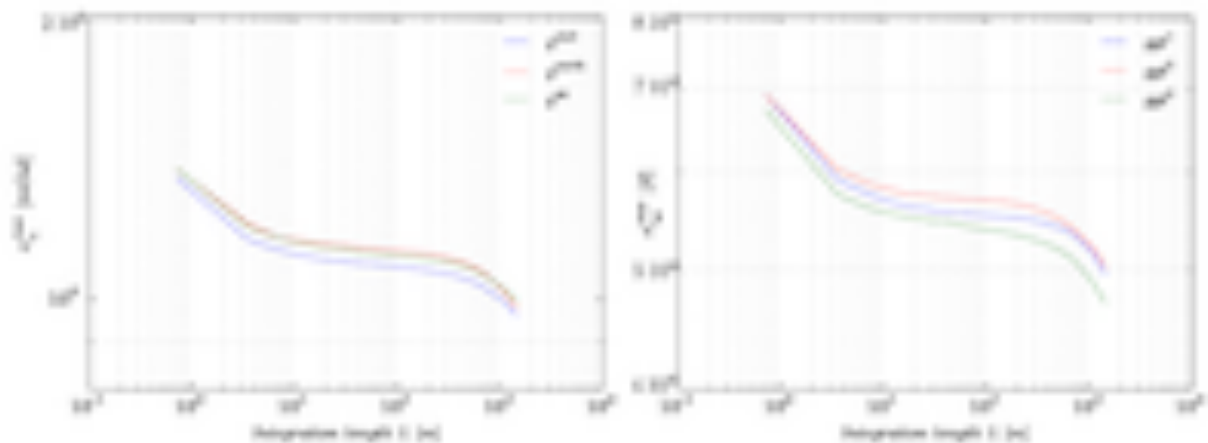


FIGURE 6.93 – Graphes identiques à ceux de la figure 6.91 (p. 302) en supposant que seules les mesures d'accélération sont affectées par du bruit (scénario 3).

D'après Roussel et al., 2015 (acti1).

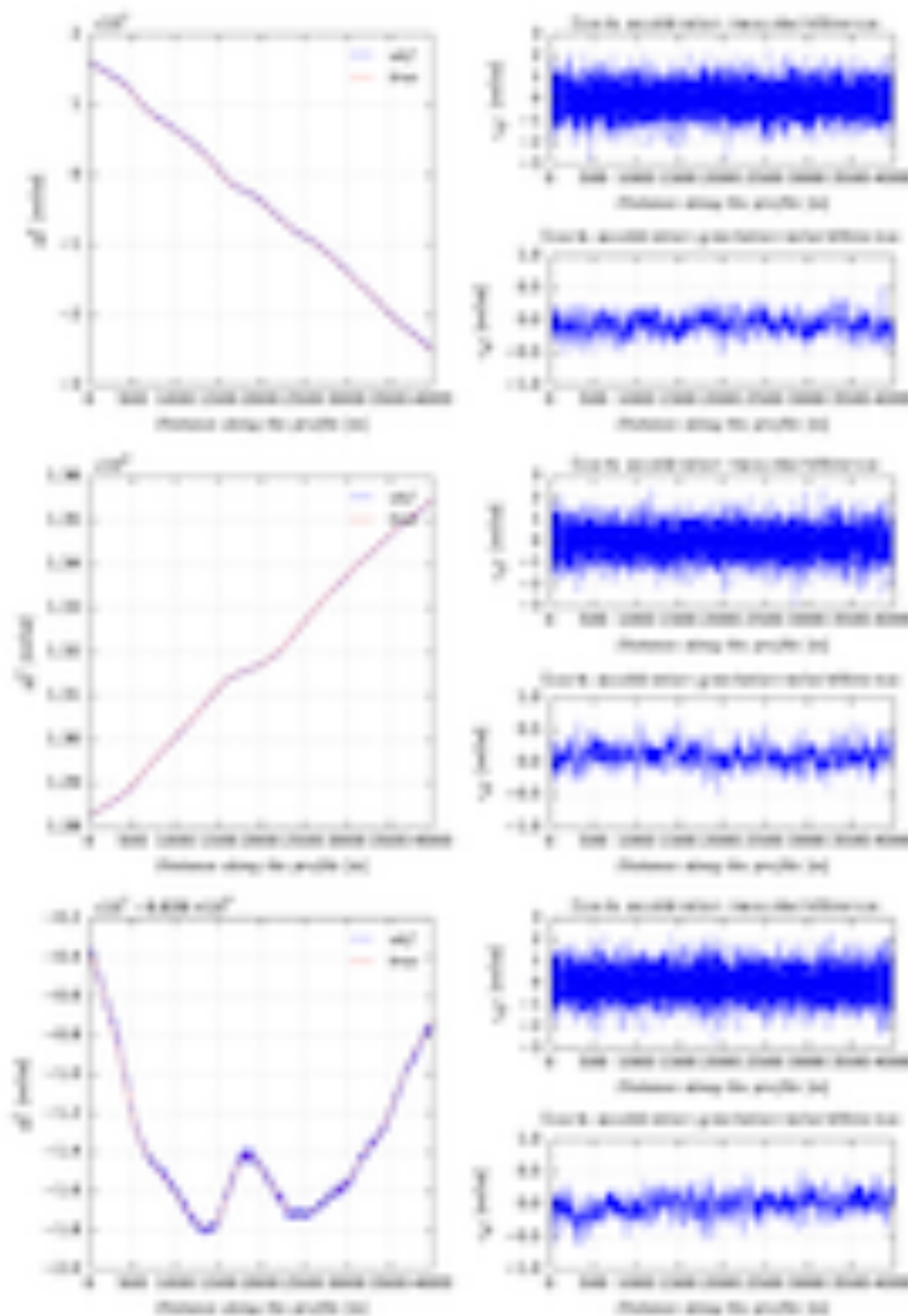


FIGURE 6.94 – Graphes de l'évolution des trois composantes est (g_P^E), nord (g_P^N) et verticale (g_P^U) de l'accélération gravitationnelle estimées par un filtre de Kalman « unscented » sur un profil de 4 km (colonne de gauche). Les données sont issues de simulation dans lesquelles les courbes en trait continu rouge, constitue la référence. Les graphes des écarts à la référence (colonne de droite) avant et après filtrage, indiquent une réduction du niveau de bruit d'un facteur égal à 4,5.

D'après Roussel et al., 2015 (act1).

Cette étude, riche d'enseignements, montre que l'utilisation du système « GRAVIMOB » en gravimètre mobile scalaire ultra-léger, adapté aux sous-marins autonomes, est réalisable à condition d'améliorer le positionnement horizontal du submersible d'au moins deux ordres de grandeur. Les résultats de la campagne d'essai devraient en apporter une confirmation définitive relatée dans la thèse de Clément Roussel (these2) et publiée dans Roussel et al., 2017 (acl1aa). Il ne faut pas perdre de vue que la démarche présentée ici présuppose un étalonnage du dispositif sans défaut. Les manipulations d'étalonnage dont la conception, la validation et la mise en œuvre constituent une grande part du travail de thèse, sont donc particulièrement cruciales.

Une amélioration substantielle des capteurs d'orientation permettrait d'envisager un fonctionnement du système « GRAVIMOB » en gravimètre vectoriel. L'utilisation in situ d'un réseau de balises géodésiques équipées d'émetteurs acoustiques, installées en fond de mer ou en surface, en vue de la trilatération de plusieurs points du sous-marin, est tout à fait possible. Cependant, la complexité de la mise en place d'un tel réseau alourdirait fortement la pratique des levés, ce qui nuirait à la souplesse d'utilisation d'un sous-marin autonome opérable à partir d'un seul navire. Une solution intermédiaire pourrait consister en l'emploi de plusieurs liaisons acoustiques, en plus de celle issue du navire porteur, qui pourraient s'établir à partir d'embarcations légères, voire d'autres submersibles, qui accompagneraient le sous-marin depuis la surface ou en fond de mer (navigation coopérative). Encore faudrait-il s'assurer que ce positionnement par de multiples liaisons acoustiques, permette une restitution de l'attitude avec l'incertitude requise. L'ajout de gyromètres ou de triades d'accéléromètres complémentaires en vue de la constitution d'un capteur d'orientation « gyro free » (CHEN et al., 1994) sont des voies qui mériteraient d'être explorées au prix d'une complexification des dispositifs de navigation du sous-marin.

Le verrou technologique à lever pour espérer réaliser des mesures de gradiométrie sous-marine exploitables à l'aide du système « GRAVIMOB », concerne le capteur d'accélération. La sensibilité des accéléromètres qui équipent le prototype devrait être améliorée de presque deux ordres de grandeur pour espérer atteindre les cibles sous-marines envisagées. Le développement d'un capteur dédié, à l'image du dispositif élaboré au Japon par l'agence JAMSTEC (cf §6.3.1, p. 270) apparaît donc comme incontournable dans la perspective d'évolution de l'instrument vers un gradiomètre 1D, sans perdre de vue que la véritable gradiométrie requiert obligatoirement une structure à, au moins, quatre paires de triades d'accéléromètres qu'il faudrait pouvoir intégrer dans un volume équivalent à celui du système « GRAVIMOB ». Tout développement de capteur d'accélération dédié devra donc prendre en compte ces spécifications.

6.4 Projets de recherche

6.4.1 Préceptes de la gravimétrie mobile « rapprochée »

Mon expérience et mon expertise acquises dans la gravimétrie mobile légère avec les systèmes gravimétriques « Limo-g » et « GRAVIMOB », me permettent d'identifier trois préceptes fondamentaux pour la conception de gravimètres et gradiomètres pour les mesures en champ proche de la gravité.

Le premier élément d'une importance capitale est le capteur de lever gravimétrique, constitué essentiellement d'un accéléromètre. Outre un encombrement réduit et une faible consommation, une très bonne sensibilité s'avère absolument indispensable, plus particulièrement en vue de la réalisation d'un gradiomètre. Sur ce dernier point, les accéléromètres électrostatiques développés à l'ONERA, ont pris de l'avance avec une sensibilité record de $10^{-4} \mu\text{Gal}/\sqrt{\text{Hz}}$. En plus d'une grande sensibilité, l'accéléromètre doit avoir une gamme de mesure assez large ($\pm g$) pour éviter tout phénomène de saturation en cours d'acquisition. Il est clair que l'étendue de cette gamme peut être très largement diminuée si le capteur est monté sur une plate-forme stabilisée. De mon point de vue, cette configuration sort du cadre strict de la gravimétrie légère de par l'encombrement de telles plates-formes. Par exemple, il serait impossible aujourd'hui d'installer un capteur d'accélération sur une plate-forme stabilisée dans un sous-marin autonome ou un micro-drone aérien¹⁰. Un autre point important concerne l'immunité de l'accéléromètre aux variations des conditions extérieures, telles les variations de température. Les contraintes sur les dimensions et l'alimentation électrique du dispositif sur un porteur, font qu'il n'est pas toujours possible d'utiliser une enceinte de protection thermorégulée. Par conséquent, les capteurs d'accélération les mieux adaptés sont ceux pour lesquels les mesures brutes varient peu suite aux variations des conditions extérieures, qui se produisent inévitablement en cours de lever. Une correction de ces effets en post traitement à partir de mesures complémentaires de température et de pression, est recommandée voire indispensable, ce qui suppose un étalonnage du capteur particulièrement soigné. Ce point précis fait partie de la qualification du capteur d'accélération qui doit être exemplaire, non seulement dans la détermination des coefficients d'étalonnage, mais aussi dans l'identification des bruits et la quantification de leur niveau. Actuellement, les technologies qui pourraient surpasser les accéléromètres vibrants tels ceux utilisés dans les systèmes « Limo-g » et « GRAVIMOB » sont représentées par les accéléromètres :

- miniatures à « MEMS » (Fig. 6.95, p.307) ;
- électrostatiques ;
- à atomes froids.

À ce stade des développements instrumentaux, aucune technologie n'a pris l'avantage. Une collaboration très étroite entre la communauté des géophysiciens et celle des physiciens et ingénieurs en instrumentation, devrait permettre de trancher, pour peu que la première quantifie très précisément les spécifications et les contraintes matérielles du capteur à la seconde. De ce point de vue, des rapprochements très prometteurs ont d'ores et déjà eu lieu, comme dans le cas du projet « ISAAC » (proj1) évoqué dans la suite.

10. Drone dont la charge utile n'excède pas 2 kg.

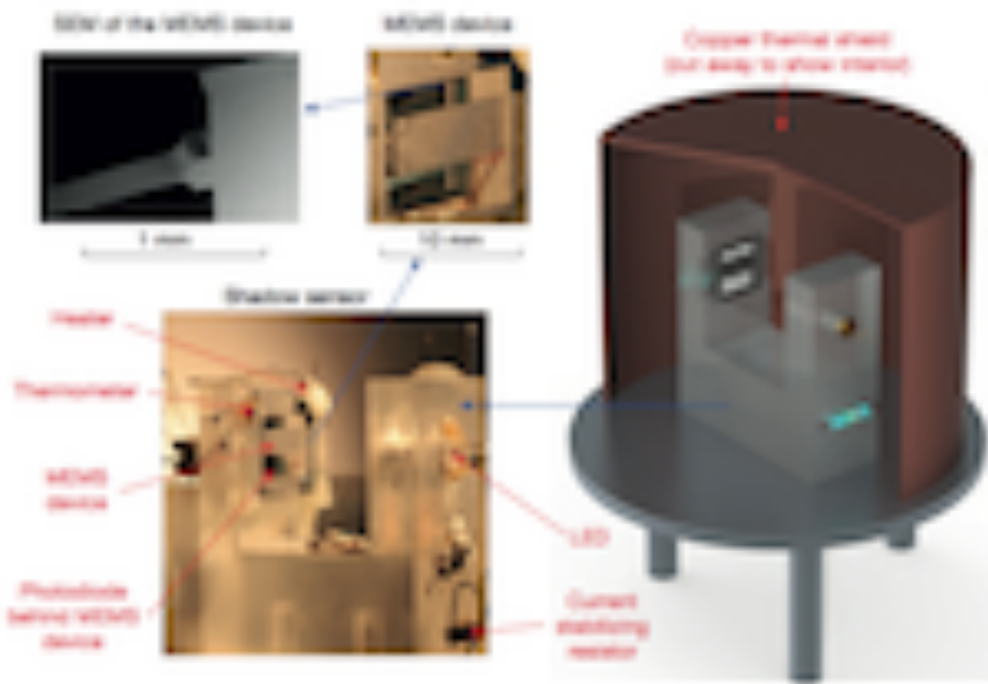


FIGURE 6.95 – Vue du capteur gravimétrique à MEMS développé par une équipe de l’université de Glasgow en Écosse au Royaume Uni. La sensibilité de ce capteur est estimée à $40 \mu\text{Gal}/\sqrt{\text{Hz}}$, ce qui est exceptionnel pour un capteur dont le volume est de l’ordre de quelques cm^3 .

D’après MIDDLEMISS *et al.* (2016).

Le second précepte de la gravimétrie mobile légère concerne les capteurs de position et d’orientation du porteur. L’obtention d’une cartographie la plus exacte possible du champ de gravité nécessite naturellement un positionnement de qualité. De surcroît, les mesures de position participent également à l’estimation des accélérations du porteur qui entre dans l’équation fondamentale de la gravimétrie mobile. Par exemple, les incertitudes sur la position affectent très fortement la restitution de la composante verticale g_U^n en gravimétrie mobile vectorielle. Fort heureusement, le positionnement dynamique des porteurs terrestres, y compris des drones aériens et marins, sont aujourd’hui particulièrement performants. Les systèmes mobiles de lever qui utilisent centrales inertielles et récepteurs GNSS, éventuellement complétés par de l’odométrie visuelle, se positionnent très couramment à mieux que 5 cm aussi bien en planimétrie qu’en altimétrie. Sur des porteurs très légers, tels les micro-drones, le positionnement s’appuie sur une centrale inertielle « MEMS » couplé à un récepteur GNSS, qui peut s’effectuer avec des incertitudes inférieures à 10 cm en planimétrie et 1 m en altimétrie. Si, de plus, le micro-drone est équipé d’une caméra, le traitement des images par photogrammétrie avec seulement un point connu au sol, permet de descendre l’incertitude sur l’altimétrie à un niveau inférieur à 10 cm. Le verrou lié au positionnement des porteurs légers et ultra-légers est sur le point d’être définitivement levé. En revanche, le positionnement dynamique en domaine sous-marin reste un problème critique, qui se pose également pour les levers bathymétriques. Une prise de conscience des concepteurs et opérateurs de drones sous-marins sur la nécessité d’un positionnement de qualité pour les mesures géophysiques, s’opère actuellement. Il ne s’agit plus seulement de pratiquer une navigation pour éviter les obstacles, mais de suivre le plus fidèlement possible les profils demandés en respectant la profondeur d’immersion requise. Les efforts consentis dans cette voie d’amélioration du positionnement sous-marin, doivent être fortement encouragés par la communauté des géophysiciens.

Dans ce même précepte figure la détermination de l'attitude du porteur qui entre également dans l'équation fondamentale de la gravimétrie mobile. Les incertitudes sur l'orientation du porteur affectent directement les composantes horizontales g_E^n et g_N^n de l'accélération de la pesanteur, ainsi que les gradients de gravité. Comme l'ont montré les simulations présentées au §6.3.3.5 (cf Fig. 6.92, p. 302), la détermination des angles d'attitude au centième de degré près, permet seulement une restitution des composantes horizontales à 10 mGal près pour 1 km de résolution spatiale. Dans le même temps, les incertitudes sur les gradients de gravité s'étendent de 100 à 1 000 E. Les systèmes d'orientation performants contiennent généralement une centrale d'attitude dont les données sont combinées à celles d'autres capteurs tels des récepteurs GNSS ou des magnétomètres. Une telle complexification de l'instrumentation s'avère souvent incompatible avec les contraintes d'installation sur les porteurs légers (véhicule routier, petit bateau, drones aérien, marin et sous-marin) voire ultra-légers tels les micro-drones aériens. C'est pourquoi un capteur intégré de type « gyrofree », qui serait composé uniquement de capteurs d'accélération à haute sensibilité, pourrait constituer une solution élégante au problème d'estimation de l'orientation. De ce point de vue, la configuration du gradiomètre de la mission GOCE (cf Fig. 6.86, p. 297) avec ses six paires d'accéléromètres 3D, pourrait convenir pourvu que la réalisation d'un capteur de plus faible encombrement, adaptée aux porteurs terrestres, soit possible.

Le troisième et dernier précepte de la gravimétrie mobile légère rapprochée, est reliée aux méthodes de traitements des données d'accélération, de position et d'orientation. Nous avons vu le raffinement apporté dans le filtrage optimal, par l'utilisation de modèles d'évolution des grandeurs estimées, y compris le champ de gravité. Une voie d'amélioration possible qui mériterait d'être examinée sérieusement, serait de reformuler le problème d'estimation de la gravité depuis une plate-forme mobile en tant que problème d'assimilation. Cette nouvelle formalisation nécessite l'écriture des équations fondamentales d'évolution qui résultent notamment de l'application des lois de la dynamique au porteur. Le modèle pourrait inclure des paramètres physiques d'origine aéro- ou hydrodynamique pour décrire très finement le mouvement du porteur, par ailleurs observé par les capteurs de position et d'orientation. Il suffirait alors d'introduire dans le modèle, des termes perturbateurs d'un champ de gravité a priori, pour réaliser une estimation de la gravité par assimilation de données sur chaque profil gravimétrique.

Pour conclure, les deux voies de recherche que je propose de poursuivre à court terme, pour lever les derniers verrous de la gravimétrie mobile légère, sont :

1. le développement, en collaboration avec les concepteurs d'accéléromètres tel ceux rencontrés à l'ONERA, d'une plate-forme multi-accéléromètres, de type « gyrofree », qui pourrait être rigidement fixée sur des porteurs légers équipés par ailleurs d'un système de positionnement ;
2. la reformulation complète du problème de la restitution de la gravité et ses gradients à partir de mesures depuis une plate-forme mobile, en un problème d'assimilation de données d'accélération, de position et d'orientation sur un ensemble des profils gravimétriques.

Une application concrète de la gravimétrie mobile légère dans le cadre d'une application géophysique, a été envisagée dans le projet « ISAAC » (proj1) que nous allons décrire ci-après.

6.4.2 Instrumentation sui generis pour les levers côtiers et fluviaux

L'idée du projet « ISAAC » (proj1) (Instrumentation Scientifique embarquée Autonome pour l'Analyse hydro- et géomorphologique de l'environnement Côtier) vient de ma participation à des travaux sur la morphologie des rivières de faible énergie (projets « SÉDILOIR » (proj5) et « CEZURES » (proj4)) menés en collaboration avec des géographes du laboratoire GeF-L2G et du laboratoire Espaces & SOciétés (ESO) de l'université du Maine. L'une des problématiques abordées dans ces travaux concernent l'étude quantitative de l'érosion des berges des rivières de faible énergie – en l'occurrence les sections du Loir et L'Huisne situées en Sarthe (72) –, et ses conséquences sur le méandrage. La méthodologie employée consiste à réaliser des mesures LiDAR terrestre à l'aide d'un scanner laser depuis le sol ou à bord d'un bateau (Figs. 6.96 et 6.97 p. 310) à différentes époques de l'année, pour obtenir des nuages de points des berges étudiées. Une mise en référence dans le Réseau Géodésique Français 1993 (RGF93), permet une auscultation de la berge, c'est-à-dire le suivi de sa déformation dans le temps, pour évaluer notamment le volume de matière érodée. Le bateau embarque également un échosondeur et un célérimètre en vue de cartographier la topographie du fond de la rivière. La méthodologie et les premiers travaux d'interprétation ont été étudiés dans le travail de fin d'étude de Maryem Fadili 2015 (M2[3]), présentés dans Bonnefond et al., 2012 (aff4), 2013 (aff3) et 2015 (aff1) et en cours de publication dans Corbonnois et al., 2016 (acl1a).



FIGURE 6.96 – Vue du bateau rigide utilisé au laboratoire GeF-L2G pour les mesures LiDAR et bathymétriques en milieu fluvial. Photo : Éric Labergerie, laboratoire GeF-L2G.

Le bilan des capteurs embarqués sur le bateau, permet de distinguer les capteurs de lever – échosondeur, célérimètre et LiDAR –, des capteurs de position – récepteur GNSS RTK – et d'orientation – centrale d'attitude à MEMS –. Une telle plate-forme instrumentale et une méthodologie similaire peuvent tout à fait s'adapter à l'étude du domaine littoral, notamment les zones intertidales et estuariennes. C'est l'objectif que s'est fixé le projet « ISAAC » (proj1) : développer une plate-forme instrumentale innovante, équipée de capteurs de position et d'orientation, dotée de capteurs de lever comprenant un LiDAR, une caméra, un échosondeur multifaisceaux et complétée par un sondeur de sédiments et un gravimètre léger sur le modèle des systèmes « Limo-g » et « GRAVIMOB ». Outre les bateaux pour petits fonds, la plate-forme doit pouvoir également s'installer sur un véhicule amphibie (Fig. 6.98, p. 311). Les images acquises par caméra de la plate-forme ont un double rôle : en plus de l'acqui-

sition d'images des milieux étudiés, elles seront utilisées en combinaison avec les capteurs de lever et d'orientation pour améliorer la qualité du géoréférencement, par des méthodes relevant de l'odométrie visuelle. Ces méthodes sont étudiées par ailleurs dans le cadre de la thèse de Boris Leroux (these1) que je co-encadre.

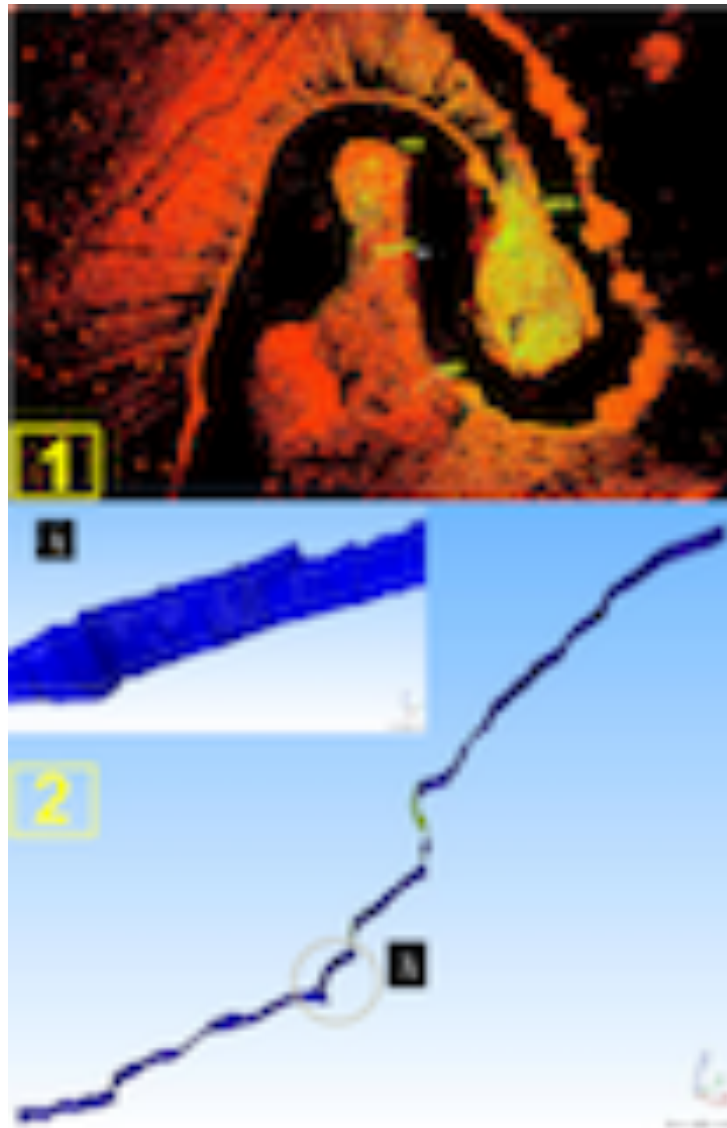


FIGURE 6.97 – 1. Nuage de points obtenu par un lever LiDAR (scanner laser) sur les berges de l'Huisne à Connerré (72). 2. Vue du modèle numérique de la berge après le calcul du maillage du nuage de points levé par scanner laser. En déterminant de tels modèles à différentes époques de l'année, il est possible de suivre la déformation de la berge au cours du temps et d'estimer les volumes de matière érodée.

D'après Fadili, 2015 (M2[3]).

En plus du développement, de la qualification et du déploiement de cette instrumentation, le projet comprend deux volets méthodologiques principaux :

1. la détermination de modèles numériques de terrain du domaine littoral et estuarien, sans discontinuité entre l'estran et les côtes ou les berges ;
2. la réalisation d'inversions couplant les données sismologiques fournies par la sondeur de sédiments et les données gravimétriques en vue de produire des modèles des structures sédimentaires.

Le verrou essentiel qui demeure dans l'élaboration d'une telle plate-forme, provient bien entendu du système gravimétrique. Il s'agit en effet de concevoir ici un gravimètre ou gradiomètre léger dont la sensibilité atteigne le niveau des instruments de la gravimétrie spatiale. Une étude de sensibilité indique, en effet, qu'une variation de densité de 1 gcm^{-3} sur une épaisseur de 1 m de sédiments induit une variation de l'attraction gravitationnelle de l'ordre du 100^e de milligal. La même variation de densité sur une épaisseur de 100 m de sédiments entraîne une variation de l'attraction gravitationnelle de l'ordre de 1 mGal. D'autre part, la sensibilité des mesures gradiométriques dépend explicitement du rapport entre l'épaisseur et la profondeur de la structure sédimentaire étudiée. Plus précisément, une variation de densité de 1 gcm^{-3} sur une épaisseur de sédiments de 1 m induirait une variation des valeurs des gradients de l'ordre de 100 E à 1 m de profondeur, et seulement 10 E à 10 m. En revanche, avec une épaisseur de 100 m de sédiments à 10 m de profondeur, la variation des valeurs des gradients atteindrait 1 000 E pour une variation de densité de 1 gcm^{-3} . Compte tenu de ces exigences sur la sensibilité, le projet ISAAC prévoit la réalisation d'une première plate-forme sur la base du système « GRAVIMOB » pour l'expérimentation du dispositif. Les résultats de cette expérimentation permettront ensuite de fixer définitivement les spécifications du capteur gravimétrique à haute sensibilité, nécessaire pour le type de cibles recherchées en domaine côtier.



FIGURE 6.98 – Schéma de la plate-forme instrumentale développée dans le projet ISAAC, installée sur un véhicule amphibie de type Argo 8 × 8TM. 1 : gravimètre; 2 : échosondeur multi-faisceaux + célérimètres; 3 : système d'acquisition et de synchronisation; 4 : antenne GNSS RTK + compas de cap; 5 : centrale d'attitude; 6 : scanner laser.

Schéma réalisé par Mathieu Bonnefond, laboratoire GeF-L2G.

Pour assumer la grande variété des tâches dévolues à ce projet, un consortium pluridisciplinaire a été constitué comprenant, outre les géodésiens et géographes du laboratoire GeF-L2G, des géologues de l'environnement côtier et des géophysiciens marins du laboratoire Littoral, ENvironnement et Sociétés (LIENSs) (UMR CNRS 7266, université de la Rochelle), et des ingénieurs de l'ONERA, spécialisés dans le développement d'accéléromètres pour le domaine spatial. Le projet « ISAAC » (proj1) a été soumis à l'appel d'offre ANR ASTRID (Agence Nationale de la Recherche et Accompagnement Spécifique des Travaux de Recherches et d'Innovation Défense) en 2015 où il a été fort bien reçu (cf rapport d'évaluation p. 379). Seul le niveau de maturation technologique du projet a été jugé trop élevé pour ce type d'appel d'offre. Les évaluateurs nous incitent très fortement à une nouvelle soumission du projet

dans le cadre de l'appel d'offre Astrid Maturation, ce que nous prévoyons de réaliser en mars 2017 avec un consortium élargi comprenant des ingénieurs du SHOM, des chercheurs du laboratoire LDO et l'entreprise partenaire « @MAPPEM Geophysics », qui a déjà réalisé le système « GRAVIMOB ».

6.4.3 Champs d'application

Les champs d'application de la plate-forme instrumentale du projet « ISAAC » (proj1) sont considérables. Nous avons d'ores et déjà évoqué (cf Chap. 5, Sec. 5.3, p. 166), les problématiques de la détermination du géoïde en domaine côtier (cf §5.3.1, p. 166) et de modélisation des structures géologiques en vue de comprendre les interactions terre/océan et d'anticiper les phénomènes d'érosion côtière (cf §5.3.3, p. 172). Ce sont là des visées essentielles dont les retombées dépassent largement du strict cadre des géosciences pour concerner la société toute entière.

Les études du domaine fluviatile pourront également tirer un large profit des données issues d'une telle plate-forme sachant que les problématiques d'érosion des berges, en relation avec l'écoulement des cours d'eau, leur charge sédimentaire, et la morphologie et la composition des lits, s'apparentent, à une échelle plus locale, aux problématiques de l'environnement côtier. Les premiers résultats sur la quantification de l'érosion des berges de rivière, à partir de mesures LiDAR et bathymétriques depuis le bateau du laboratoire GeF-L2G, sont très encourageants [Corbonnois et al., 2016 (acl1a)]. Ils ont permis de valider définitivement la méthodologie de traitement des nuages de points pour déterminer le champ de déplacement des berges (Fig. 6.99, p. 313). Les mesures physiques supplémentaires fournies par la plate-forme instrumentale ISAAC, amèneront des informations nécessaires pour déterminer les dimensions, la forme et la composition des structures sédimentaires sous les lits de rivière. Ce sont là des données essentielles qui, comme sur le littoral et les estuaires, permettent de comprendre l'évolution géomorphologique des milieux. C'est à cette recherche passionnante, fondamentalement pluridisciplinaire, et orientée vers des problématiques environnementales fortes, que je souhaite me consacrer à très court terme.

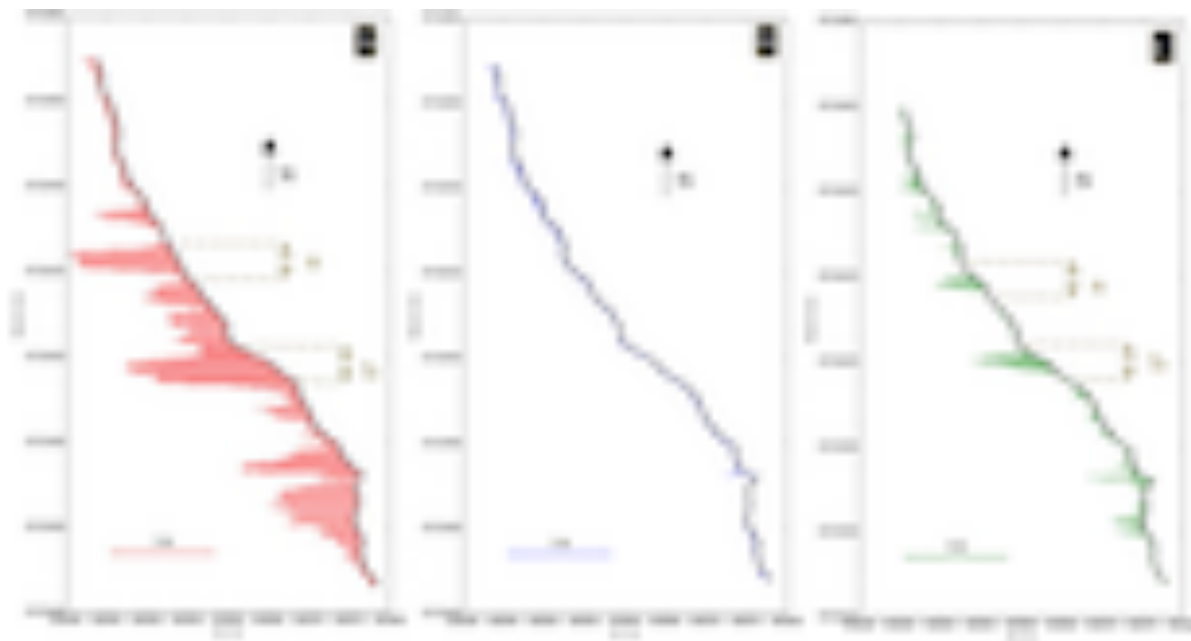


FIGURE 6.99 – Champs de déplacement d'une berge du Loir à Vaas (72) dans la direction Est-Ouest. A : entre juin 2013 et juillet 2014; B : entre juillet 2014 et octobre 2014; C : entre octobre 2014 et mars 2015.

D'après Fadili, 2015 (M2[3]) et Corbonnois et al., 2016 (acl1a).

Chapitre 7

Modélisation de sources de la gravité

« Pour expliquer un brin de paille, il faut démonter tout l'univers »

Remy De Gourmont

Le Chemin de velours. Nouvelles dissociations d'idées.

L'exploitation des mesures gravimétriques pour la modélisation des structures géologiques, suppose une bonne maîtrise des calculs analytiques et numérique du champ de gravité à partir de sources préalablement définies. Les méthodes mathématiques mises en jeu pour ces calculs, servent également à la production de champs de gravité synthétiques en vue de la détermination d'anomalies de la gravité ou la réalisations de simulations numériques. La diversité des échelles spatiales de la gravité concernées par les mesures gravimétriques, rend nécessaire la description des sources de la gravité à différents niveaux de détail. Il en résulte une grande variété de méthodes de calcul qui diffèrent par la nature analytique ou numérique des résultats obtenus, la représentation fonctionnelle adoptée pour décrire le champ de gravité, et le type de partition choisi pour décomposer le volume qui délimite les sources.

Aussi, ce chapitre dresse le bilan des méthodes de calcul du champ de gravité que j'ai abordées dans mes activités de recherche, en montrant leur complémentarité avec celles menées en gravimétrie mobile. Les perspectives de recherche présentées en fin du présent chapitre, concernent l'assimilation des données de gravimétrie spatiale et mobile dans les modèles géophysiques de la Terre, et l'affinement des modèles régionaux sur les territoires faiblement couverts par des mesures gravimétriques et sismologiques.

7.1 Les « débouchés » de la modélisation

La modélisation des sources de la gravité consiste à déterminer une fonction scalaire $\rho(\mathbf{r})$ définie sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, éventuellement confondu avec l'espace tout entier, qui renvoie la valeur de la densité en tout point. La définition précédente n'exclue pas la prise en compte de possibles variations temporelles d'origine géophysique ; il suffirait alors de considérer dans la fonction ρ une variable temporelle supplémentaire comprise dans un intervalle de temps donné. La connaissance exhaustive du champ de gravité de la Terre à partir de la loi de Newton, nécessite une extension du domaine $\mathcal{D}$ suffisante pour englober la Terre et son atmosphère. En se limitant à la restitution d'anomalies de la gravité, le domaine $\mathcal{D}$ peut être significativement réduit pour se concentrer autour de sources principales génératrices des anomalies. C'est là le principe de l'utilisation de mesures de la gravité pour l'étude des structures géologiques ou la prospection. Cette utilisation peut se mener de deux façons : soit par une approche directe (problème direct), en se donnant la fonction $\rho(\mathbf{r})$ et le domaine $\mathcal{D}$ à partir desquels le calcul du champ de gravité et sa comparaison avec les mesures peuvent être réalisés ; soit par une approche inverse (problème inverse), en estimant la fonction $\rho(\mathbf{r})$ et le domaine $\mathcal{D}$, éventuellement contraints par d'autres données géologiques ou sismologiques, qui minimisent l'écart entre la champ de gravité mesuré et celui déterminé à partir de la source $(\mathcal{D}, \rho(\mathbf{r}))$.

Les problèmes de calcul numérique inhérents aux approches directe et inverse, suscitent de nombreuses recherches qui visent notamment à améliorer l'exactitude des calculs directs de la gravité, et à rendre plus fiable la restitution des sources dans l'approche inverse. Même en travaillant plus en amont sur l'instrumentation et le traitement de données en gravimétrie, il est primordial de disposer d'outils numériques de calcul du champ de gravité suffisamment performants pour espérer produire des champs synthétiques réalistes. Les simulations numériques du champ de gravité nous renseignent, par exemple, sur la sensibilité que doit atteindre un instrument de mesure pour espérer détecter un type de source donné. La démarche appliquée pour le développement du système « GRAVIMOB » [Roussel et al., 2015 (act1)] qui consiste à produire une carte du champ de gravité sous-marin en présence de blocs minéraux, en est une bonne illustration. Outre cet aspect de spécification des caractéristiques d'un capteur, c'est toute la chaîne de traitement, depuis l'acquisition jusqu'à la restitution du champ de gravité, qui peut être éprouvée et validée étant donné le champ de gravité tiré d'un modèle numérique de ses sources. Cette utilisation reste tout à fait valable lorsqu'il s'agit, par exemple, de valider une méthode de calcul du géoïde en évitant les artefacts dans les calculs numériques, ou d'évaluer des effets de terrain compatibles avec la résolution spatiale des modèles numériques de terrain récents. Dès lors que l'emploi de méthodes de calcul de champ et de logiciels associés devient indispensable, il est assez naturel de vouloir s'intéresser aux algorithmes de calcul, non seulement pour s'assurer de l'utilisation du bon outil, mais aussi en connaître les limites. Ce faisant, ces préoccupations de nature méthodologique ouvrent la voie de recherches consacrées aux structures géologiques, qui profitent actuellement de l'afflux des données d'échelle globale issues de la gravimétrie spatiale. Ce cheminement qui conduit de la méthodologie et l'instrumentation en gravimétrie à l'étude géophysique de structures de la Terre par la gravimétrie spatiale, n'est finalement pas si insolite étant donné que les instruments modernes au service de cette technique, tel le gradiomètre embarqué sur le satellite GOCE, utilisent les mêmes principes de mesure que la gravimétrie mobile terrestre. Une bonne connaissance de ces principes de mesure assortie d'une expérience pratique sont d'une aide précieuse pour l'utilisation de données satellitaires. Les sections suivantes sont donc consacrées à la présentation de mes travaux

de recherche sur les calculs numériques du champ de gravité et les perspectives de travail dans cette voie, notamment en vue de l'utilisation des données de gravimétrie spatiale pour étudier des structures géologiques régionales.

7.2 Calculs directs des anomalies de gravité

7.2.1 Modèles géophysiques exhaustifs de la Terre

À l'instar de la « jungle » des modèles de géopotential (cf Chap. 5, Sec. 5.1, §5.1.2, Tab. 5.1, p. 130), il existe aujourd'hui toute une collection de modèles géophysiques régionaux et globaux de la Terre qui donnent les valeurs de la densité (Tab. 7.1, p. 318). En incluant les modèles issus de la tomographie d'échelle régionale, les modèles de la croûte et de la lithosphère et compte tenu des efforts consentis par les sismologues et les géodynamiciens pour tenir à jour des modèles de plus en plus raffinés, il est clair que l'offre en matière de modèles de Terre est considérable. La question clé qui se pose à ce stade précis, relève de notre aptitude à utiliser ces modèles pour calculer numériquement et de façon fiable, les grandeurs relatives au champ de gravité mesurées par ailleurs en gravimétrie spatiale. Plus précisément, le premier défi à relever consiste en la comparaison de valeurs mesurées par satellite assorties de leur propre incertitude, avec des valeurs tirées d'un modèle géophysique dans lequel la position des sources et leurs densité sont également entachées d'incertitude. En bref, les méthodes numériques développées pour le calcul du champ de gravité se doivent de maintenir l'erreur de calcul – incluant les erreurs inhérentes à la méthode et à la propagation d'arrondis – bien en-dessous des incertitudes de mesure et de modélisation.

TABEAU 7.1 – Modèles géophysiques de la Terre proposés par le consortium « Incorporated Research Institutions for Seismology (IRIS) ». *D'après TRABANT et al. (2012)*

Modèle	Description	Référence
PREM	« Preliminary Reference Earth Model »; il s'agit d'un modèle moyen qui tient compte de la dispersion anélastique des ondes sismiques et de l'anisotropie.	DZIEWONSKI et ANDERSON (1981)
PEM	« Parametric Earth Models; il s'agit de trois modèles (moyen, continental et océanique) pour lesquels les variations de la densité et des vitesses des ondes sismiques sont représentées par des fonctions continues par morceaux. Les trois modèles sont identiques au-delà de 420 km de profondeur.	DZIEWONSKI et al. (1975)
ak135-f	Ce modèle est une variante du modèle ak135 dans lequel ont été ajoutés la densité et le facteur de qualité déterminés par MONTAGNER et KENNETT (1996).	KENNETT et al. (1995)
iasp91	Ce modèle de vitesses sismiques a été construit pour rendre compte des temps d'arrivée observés durant les principales phases des séismes.	KENNETT (1991)
MC35	Ce modèle est basé sur le modèle continental de PEM dans lequel les zones à haute et faible vitesse du manteau supérieur jusqu'à 210 km de profondeur, ont été remplacées par une couche à vitesse des ondes S constante, égale à 4,5 km/s.	VAN DER LEE et NOLET (1997)
STW105	Il s'agit d'un modèle transversalement isotrope, également connu sous le nom de REM.	KUSTOWSKI et al. (2008)
Suite des modèles page suivante		

TABLEAU 7.1 : Modèles géophysiques de la Terre – suite –.

Modèle	Description	Référence
TNA/SNA	Ce modèle est une moyenne entre les modèles « Tectonic North America (TNA) » et « Shield North America (SNA) » de GRAND et HELMBERGER (1984).	SIMMONS et al. (2010)
CRUST2.0	Il s'agit d'un modèle global de la croûte qui donne notamment la densité et les vitesses des ondes P et S au pas de 2° par 2°.	BASSIN et al. (2000)
CRUST1.0	Ce nouveau modèle de croûte, au pas de 1° par 1°, intègre une version mise à jour du modèle global de l'épaisseur des sédiments.	LASKE et al. (2013)
Fin de la liste		

La seconde contrainte à respecter pour une confrontation pertinente entre champs de gravité synthétiques et mesurés, réside dans l'adéquation des échelles et des résolutions spatiales avec lesquelles le champ est restitué dans les deux cas. L'une des façons pour garantir cette adéquation est d'utiliser une représentation fonctionnelle commune pour décrire à la fois les sources de la gravité et le champ de gravité mesuré. Par exemple, en exprimant la distribution de densité d'une source par une décomposition en harmoniques sphériques, il est possible de déterminer son effet gravitationnel par une décomposition semblable, c'est-à-dire étendue jusqu'au même degré $L_{\max}$ (cf Chap. 2, Sec. 2.3, p. 27). Cet effet devient alors directement comparable avec un modèle de géopotential déterminé jusqu'au au même degré $L_{\max}$. De par son caractère spectral, la décomposition en harmoniques sphériques constitue une représentation fonctionnelle tout à fait adaptée pour contrôler l'étendue du spectre d'un champ qu'il soit synthétique – c'est-à-dire calculé à partir d'un modèle de ses sources – ou déduit de mesures gravimétriques. Par contre, le point faible de cette représentation apparaît dans les tentatives de restitutions très locales de la gravité. Par définition, les coefficients de Stokes qui forment les séries d'harmoniques sphériques résultent d'une intégration de la distribution de densité sur toutes les échelles spatiales (cf Chap. 2, Sec. 2.3, §2.3.1, Éq. 2.33, p. 28). Une estimation fiable de ces coefficients, quelle que soit la résolution, nécessite donc, théoriquement, des mesures à toutes les échelles spatiales, ce qui est impossible en pratique. L'inexactitude qui affecte la détermination par les mesures des coefficients de Stokes, vient en partie de cette limitation des mesures. Cette faiblesse de la représentation spectrale est compensée par les représentations « échelle/longueur d'onde » telles que les ondelettes sur la sphère, qui sont bien adaptées pour les modélisations locales du champ de gravité (HAYN et al., 2012, PANET et al., 2011). Ces représentations très prometteuses méritent une attention toute particulière au vu du bénéfice obtenu sur les modélisations locales du champ de gravité. Néanmoins, un effort sur la théorie doit encore être consenti pour lever un dernier verrou : la détermination d'une famille d'ondelettes sur la sphère qui constitue, plus qu'un simple repère, mais un système complet de fonctions sur la sphère (PANET, 2015). Pour l'heure, nous allons rester sur les représentations spectrales de la gravité pour examiner le calcul numérique de ces dernières lorsque la source peut se décomposer en polyèdres.

7.2.2 Représentation spectrale du potentiel gravitationnel de polyèdres

7.2.2.1 Les vertus des polyèdres

Le polyèdre est un solide largement répandu pour la modélisation des corps massifs en géodésie physique et en géophysique. Les possibilités de localiser précisément ses sommets et de multiplier le nombre de faces polygonales pour épouser la forme des structures en font

un outil de modélisation très commode. Ainsi, le calcul des effets de terrain sont-ils généralement réalisés par sommation des contributions gravitationnelles de polyèdres qui décrivent la distribution de densité sous la surface topographique (TSOULIS, 2001). De même, ce sont encore des décompositions en polyèdres qui permettent le calcul du champ de gravité des corps planétaires (SIMONELLI et al., 1993, WERNER et SCHEERES, 1996), y compris les astéroïdes et les comètes (Figs. 7.1 et 7.2, p. 321).

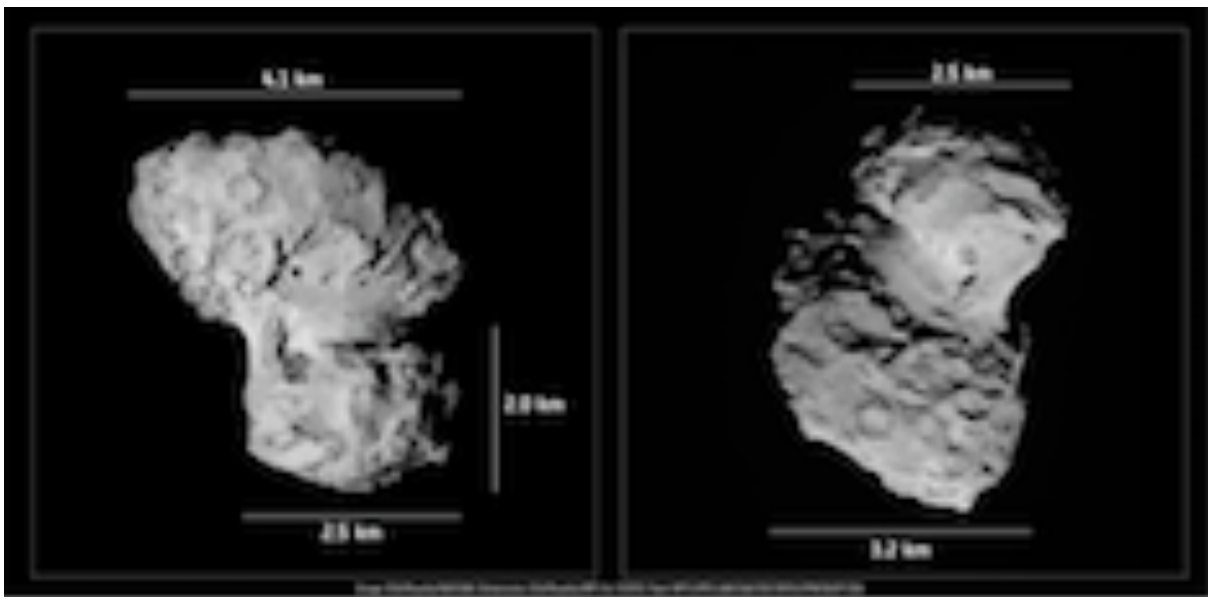


FIGURE 7.1 – Images de la comète « 67P Churyumov Gerasimenko » obtenues depuis la sonde spatiale « Rosetta ». Le CNES, en charge du module d'accométage « Philae », a confié au Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale (GRGS), le calcul de modèles du champ de gravité généré par la comète, à partir d'hypothèses et de données de mesure sur sa constitution.

D'après LAURENT-VARIN (2014).

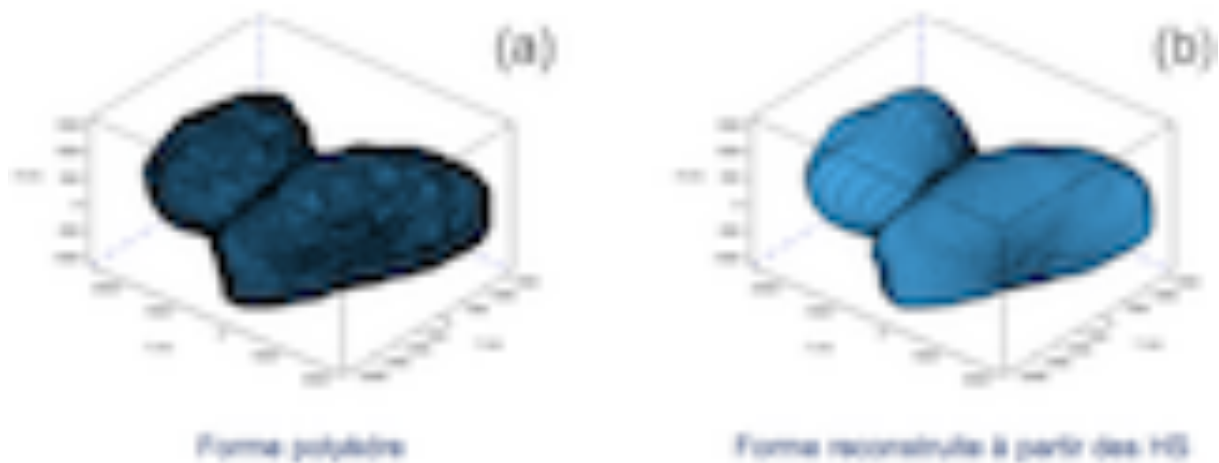


FIGURE 7.2 – Modélisations de la comète « 67P Churyumov Gerasimenko » (a) à l'aide de polyèdres et (b) à partir d'une décomposition en harmoniques sphériques jusqu'au degré 20, calculée à partir des polyèdres.

D'après LAURENT-VARIN (2014).

Parmi les stratégies de calcul de l'effet gravitationnel d'un polyèdre en tout point de l'espace figurent :

1. la méthode analytique qui fournit des relations pour le calcul du potentiel et de l'accélération gravitationnelle, ainsi que du tenseur des gradients de gravité, d'un polyèdre quelconque, de densité constante; ces relations restent également valables sur les faces du polyèdre, ainsi que sur les côtés et les sommets des polygones qui forment sa surface (PETROVIĆ, 1996, TSOULIS et PETROVIĆ, 2001);
2. la méthode spectrale qui consiste à calculer numériquement les coefficients de Stokes du potentiel gravitationnel généré par un polyèdre quelconque de densité constante;
3. la méthode numérique qui utilise une formule de quadrature pour réaliser l'intégration numérique de l'expression du potentiel gravitationnel issu de la loi de Newton.

L'intérêt porté à la méthode spectrale qui nous occupe ici, remonte aux premiers travaux de calcul des champs de gravité d'objets planétaires à partir des perturbations d'orbite de satellite, qui utilisent essentiellement des développements en série d'harmoniques sphériques. Il a donc paru naturel d'utiliser cette même représentation pour exprimer les champs synthétiques issus de modèles physiques des corps planétaires en question. Deux approches sont généralement employées pour obtenir les coefficients de Stokes du potentiel gravitationnel d'un polyèdre. La première s'appuie sur le développement en harmoniques sphériques du rayon-vecteur entre la source et le point d'observation (cf Chap. 2, Sec. 2.3, §2.3.3, Éq. 2.37, p. 29), qui conduit aux expressions des coefficients de Stokes par des méthodes analytiques (BALMINO, 1994, MARTINEC et al., 1989) ou numériques (CHAO et RUBINCAM, 1989). La seconde s'appuie sur des relations de récurrence qui relient les coefficients de Stokes du potentiel gravitationnel généré par un tétraèdre. Comme suggéré par WERNER (1997), une partition de tout polyèdre quelconque s'obtient en décomposant ce dernier en tétraèdres reliés par l'un de leur sommet. Connaissant les coefficients de Stokes relatifs à un tétraèdre,

il est possible d'obtenir ceux relatifs au polyèdre entier par une simple sommation. La complexité de la méthode de WERNER est de l'ordre du carré du nombre N de coefficients de Stokes à déterminer, ce qui reste assez coûteux et limite la portée de la méthode aux coefficients de bas degré. Une nouvelle méthode basée sur un algorithme « linéaire », c'est-à-dire de complexité de l'ordre de N , a été développée par JAMET et THOMAS (2004). Cette dernière permet d'atteindre des coefficients de plus haut degré que celle proposée par WERNER pour un même coût de calcul. Les recherches initiées par la suite dans le travail de fin d'études de Nicolas Gonindard, 2008 (M1[1]), poursuivies dans le cadre d'une collaboration avec l'université de Thessalonique (projet « SHEGP-POLYHEDRON » (proj7)) et publiées dans Tsoulis et al., 2009 (acl2), ont permis de remédier à certaines instabilités numériques de l'algorithme linéaire. Pour ce, une extension de ce dernier pour les harmoniques sphériques normalisés s'est avérée nécessaire. Le principe général de l'algorithme linéaire et l'évaluation de ses performances font l'objet des deux paragraphes ci-après.

7.2.2.2 Formulation de l'algorithme linéaire

Considérons un polyèdre de densité constante, de masse M , délimitant un domaine $\mathcal{D}$. Un repère orthonormé $(Oxyz)$ d'origine O , permet d'attribuer des coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou sphériques (λ, θ, r) à tout point de l'espace. La représentation spectrale du potentiel gravitationnel du polyèdre en un point extérieur de coordonnées (λ, θ, r) , s'exprime de façon générale par :

$$V(\lambda, \theta, r) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^l \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) (C_l^m \cos m\lambda + S_l^m \sin m\lambda) \right], \quad (7.1)$$

où G désigne la constante gravitationnelle, a , le rayon de la sphère circonscrite au domaine $\mathcal{D}$, P_l^m , la fonction associée de Legendre de degré l et d'ordre m , et C_l^m et S_l^m correspondent aux coefficients de Stokes à déterminer.

Dans le cas d'un polyèdre de densité constante, les coefficients de Stokes se déduisent de relations intégrales qui s'expriment par :

$$\begin{bmatrix} C_l^m \\ S_l^m \end{bmatrix} = \frac{2 - \delta_{0,m}}{M a^l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{Q \in \mathcal{D}} \mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q) d^3 \mathbf{x}_Q, \quad (7.2)$$

où $\mathbf{h}_l^m$ est la fonction vectorielle définie en tout point $Q \in \mathcal{D}$, de coordonnées sphériques $(\lambda_Q, \theta_Q, r_Q)$, par :

$$\mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q) = r_Q^l P_l^m(\cos \theta_Q) \begin{bmatrix} \cos m\lambda_Q \\ \sin m\lambda_Q \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

L'algorithme linéaire de JAMET et THOMAS (2004) permet le calcul de l'intégrale de la fonction $\mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q)$ étendue sur un polyèdre de densité constante. Au préalable, le polyèdre doit être décomposé en un ensemble de tétraèdres $\mathcal{T}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ dont un sommet coïncide avec l'origine O . Le volume $V(\mathcal{D})$ du domaine $\mathcal{D}$ peut alors être reconstitué par la somme algébrique des volumes respectifs $V(\mathcal{T}_k)$ des tétraèdres par une relation de la forme :

$$V(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k V(\mathcal{T}_k), \quad (7.4)$$

où α_k égale +1 (resp. -1) suivant que la normale au domaine $\mathcal{D}$ est dirigée vers l'extérieur (resp. l'intérieur) du tétraèdre $\mathcal{T}_k$. La figure 7.3 illustre cette décomposition dans le cas où le polyèdre $\mathcal{D}$ est un simple cube.

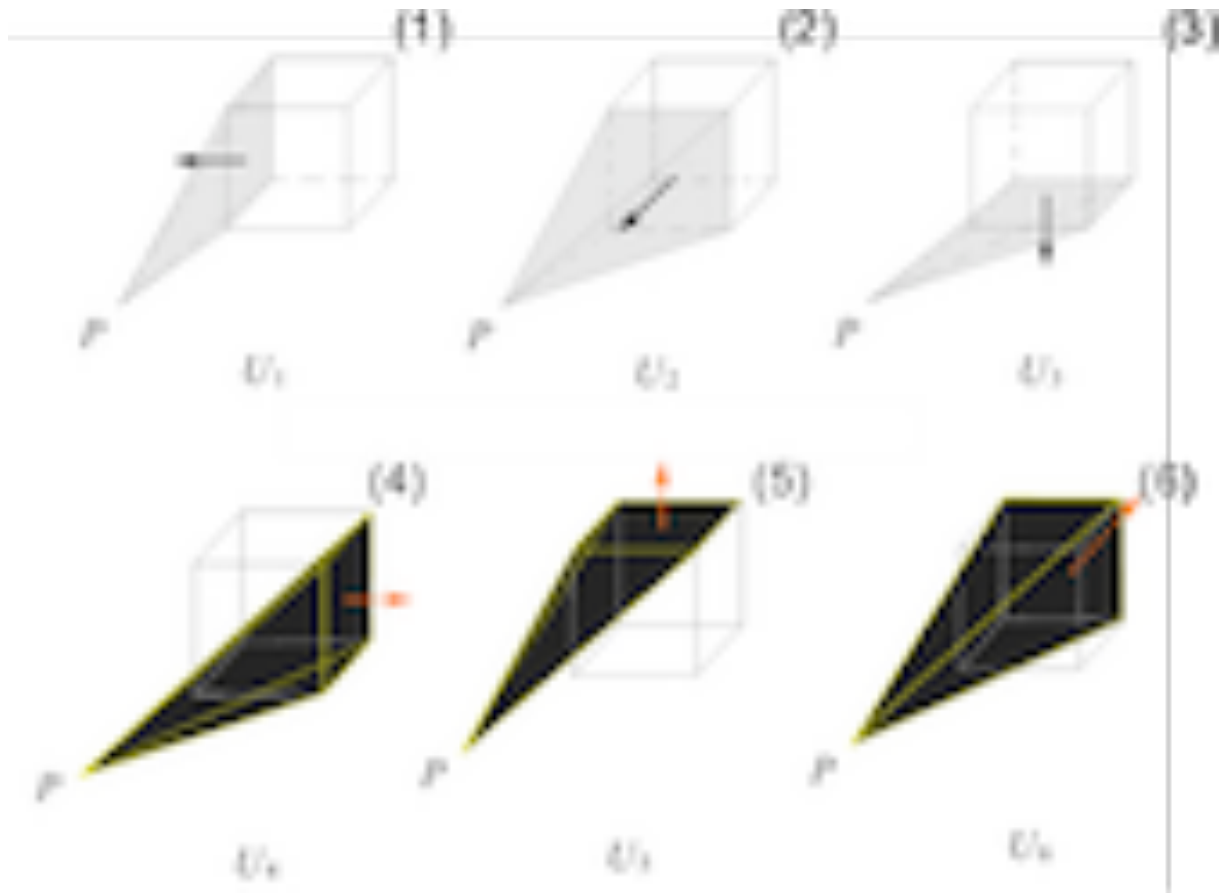


FIGURE 7.3 – Décomposition du volume d'un cube en six tétraèdres possédant un sommet P en commun et dont l'une des faces coïncide avec l'une des faces du cube. Selon que la normale sortante de la face du cube demeure une normale sortante du tétraèdre (cas (4), (5), (6)) ou devient une normale entrante (cas (1), (2), (3)), la contribution du potentiel gravitationnel du prisme considérée, est comptée soit positivement, soit négativement. Le potentiel gravitationnel U du cube s'exprime donc par $U = -U_1 - U_2 - U_3 + U_4 + U_5 + U_6$ où U_i désigne le potentiel gravitationnel du i^{e} tétraèdre pour $i = 1, 2, \dots, 6$.

D'après Tsoulis et al., 2009 (acl2).

Si $C_l^m(k)$ et $S_l^m(k)$ désignent le couple de coefficients de Stokes associés au potentiel gravitationnel du tétraèdre $\mathcal{T}_k$ seul, alors la linéarité de l'équation de Newton implique que :

$$\begin{bmatrix} C_l^m \\ S_l^m \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \begin{bmatrix} C_l^m(k) \\ S_l^m(k) \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Le relation préalable au calcul des coefficients de Stokes par l'équation 7.5 consiste donc en l'intégrale de la fonction $\mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q)$ sur un tétraèdre $\mathcal{T}_k$ quelconque. Si $\mathcal{T}$ désigne l'un de ces tétraèdres (Fig. 7.4), l'intégrale impliquée dans le calcul des coefficients C_l^m et s_l^m sera notée $\mathbf{H}_l^m$ et définie par :

$$\mathbf{H}_l^m = \int_{Q \in \mathcal{T}} \mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q) d^3 \mathbf{x}_Q. \quad (7.6)$$

L'intégrale $\mathbf{H}_l^m$ et son intégrande $\mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q)$ ont chacune deux composantes qui seront désignées indifféremment par H_l^m et h_l^m respectivement.

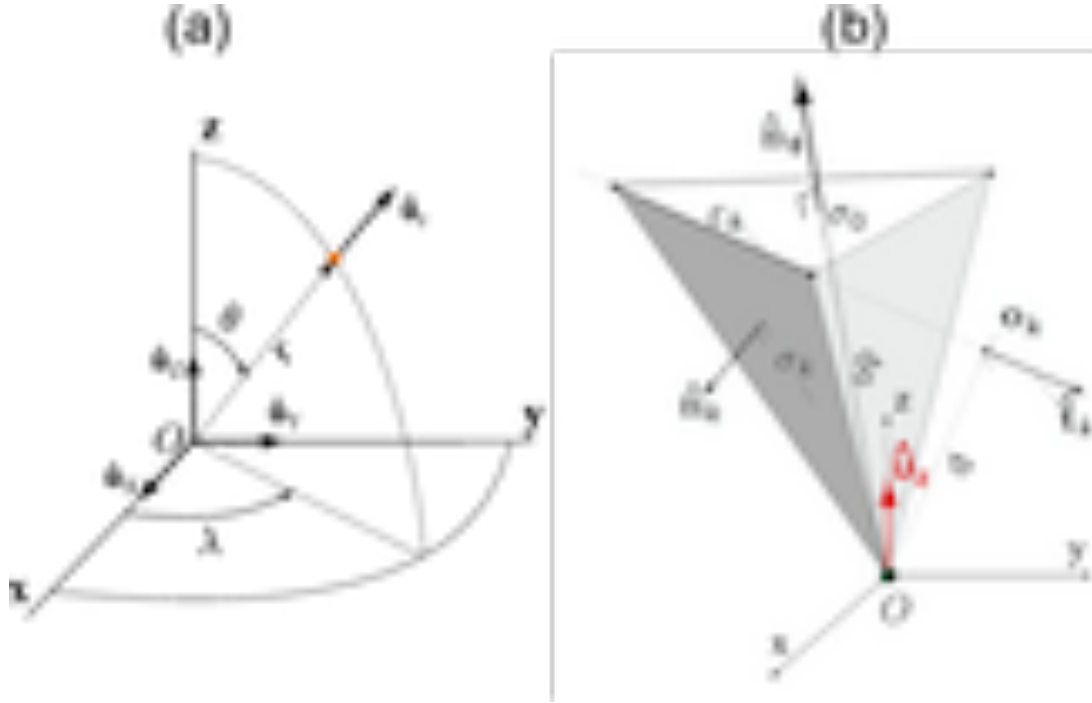


FIGURE 7.4 – (a) Coordonnées sphériques utilisées pour repérer les points sources et les points d'observation dans le repère orthonormé $(Oxyz)$. (b) Définition et notations concernant le tétraèdre $\mathcal{T}$ de sommet O dont il faut exprimer le potentiel gravitationnel en un point extérieur quelconque. D'après Tsoulis et al., 2009 (acl2).

Le raisonnement qui conduit à l'expression de l'intégrale H_l^m , repose sur l'application successive des théorèmes de Gauss et de Stokes à l'issue de laquelle l'intégrale H_l^m ne contient plus que des intégrales curvilignes. En notant $\hat{\mathbf{u}}_r$ le vecteur unitaire radial et $\hat{\mathbf{n}}_o$ le vecteur normal unitaire de la face σ_o du tétraèdre $\mathcal{T}$ opposée à l'origine, l'expression de H_l^m devient, avec le théorème de Gauss :

$$H_l^m = \frac{1}{l+3} \int_{Q \in \sigma_o} r_Q h_l^m(\mathbf{x}_Q) \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{n}}_o d^2 \mathbf{x}_Q = \frac{d_o}{l+3} \int_{Q \in \sigma_o} h_l^m(\mathbf{x}_Q) d^2 \mathbf{x}_Q, \quad (7.7)$$

où d_o désigne la distance de l'origine jusqu'au plan de la face σ_o .

Désignons à présent par ε_k , $k = 1, 2, 3$ les trois arêtes qui délimitent la face σ_o et par $\hat{\mathbf{t}}_k$ le vecteur directeur unitaire de l'arête ε_k . L'application du théorème de Stokes dans la relation 7.7 conduit à :

$$H_l^m = \frac{d_o(l+m)}{(l+3)(\hat{\mathbf{u}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}}_o)} H_{l-1}^m - \frac{d_o}{(l+2)(l+3)(\hat{\mathbf{u}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}}_o)} \sum_{k=1}^3 \int_{Q \in \varepsilon_k} \begin{bmatrix} y_Q h_l^m(\mathbf{x}_Q) \\ -x_Q h_l^m(\mathbf{x}_Q) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{t}}_k d\mathbf{x}_Q, \quad (7.8)$$

où $\hat{\mathbf{u}}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe (Oz).

La relation 7.8 montre qu'une récurrence s'applique sur le premier terme seulement. Le travail de JAMET et THOMAS a permis d'exprimer les intégrales curvilignes qui composent le second terme, par des relations de récurrence. Pour y parvenir, il faut d'abord obtenir une représentation paramétrique des arêtes. Nous désignerions par ε l'une, quelconque, des trois arêtes et par $\hat{\mathbf{t}}$ son vecteur directeur unitaire. La représentation paramétrique cherchée établit les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point courant Q du segment confondu avec l'arête ε et un paramètre s compris dans l'intervalle fermé $[s_{min}, s_{max}]$. Ces relations s'écrivent :

$$\begin{cases} x = o_x + t_x s \\ y = o_y + t_y s \\ z = o_z + t_z s \end{cases}, \quad (7.9)$$

où (o_x, o_y, o_z) et (t_x, t_y, t_z) désignent les coordonnées cartésiennes de l'origine o de l'arête ε et du vecteur directeur unitaire $\hat{\mathbf{t}}$.

Ce faisant, si a et b sont les points aux extrémités de l'arête ε , le paramètre s vérifie :

$$s(a) = s_{min}; \quad (7.10)$$

$$s(b) = s_{max}; \quad (7.11)$$

$$s(o) = 0. \quad (7.12)$$

Tous les points de l'arête correspondent donc à une valeur s strictement comprise entre s_{min} et s_{max} . Munies de cette représentation, les intégrales curvilignes de la relation 7.8 s'expriment par :

$$\int_{Q \in \varepsilon} \begin{bmatrix} y_Q h_l^m(\mathbf{x}_Q) \\ -x_Q h_l^m(\mathbf{x}_Q) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{t}}_k d\mathbf{x}_Q = (t_x o_y - t_y o_x) \int_{\varepsilon} h_l^m(\mathbf{x}_Q) d\mathbf{x}_Q. \quad (7.13)$$

La détermination des intégrales curvilignes données par la relation 7.13 nécessite donc l'évaluation de la quantité $\int_{\varepsilon} h_l^m(\mathbf{x}_Q) d\mathbf{x}_Q$ pour chacune des arêtes et pour les deux coefficients de Stokes C_l^m et S_l^m . En revenant à l'expression vectorielle de h_l^m , les relations de récurrence établies dans JAMET et THOMAS (2004) impliquent les trois quantités vectorielles suivantes :

$$\mathbf{I}_l^m = \int_{Q \in \varepsilon} \mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q) d\mathbf{x}_Q; \quad (7.14)$$

$$\mathbf{J}_l^m = \int_{Q \in \varepsilon} s \mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q) d\mathbf{x}_Q; \quad (7.15)$$

$$\mathbf{K}_l^m = \int_{Q \in \varepsilon} s^2 \mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_Q) d\mathbf{x}_Q. \quad (7.16)$$

Ces trois quantités sont alors reliées par trois relations de récurrence à ordre m constant, de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_l^m &= \mathcal{R}_1(\mathbf{I}_{l-1}^m, \mathbf{I}_{l-2}^m, \mathbf{J}_{l-1}^m, \mathbf{K}_{l-2}^m), \\ \mathbf{J}_l^m &= \mathcal{R}_2(\mathbf{I}_l^m, \mathbf{I}_{l-1}^m, \mathbf{J}_{l-1}^m), \\ \mathbf{K}_l^m &= \mathcal{R}_3(\mathbf{I}_l^m, \mathbf{J}_l^m, \mathbf{J}_{l-1}^m, \mathbf{K}_{l-1}^m), \end{aligned} \quad (7.17)$$

où les fonctions $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ ne dépendent plus que du degré l , de l'ordre l , de $\mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_a)$ et $\mathbf{h}_l^m(\mathbf{x}_b)$ et des caractéristiques du tétraèdre.

Le schéma de calcul représenté par les relations 7.17 (p. 326) permet la détermination de tous les coefficients de degré l et d'ordre m compris entre 0 et $l-1$ inclus étant donné l'initialisation des termes « diagonaux » $\mathbf{I}_l^l$, $\mathbf{J}_l^l$, $\mathbf{K}_l^l$ et $\mathbf{H}_l^l$. Il faut convenir, de plus, que chaque terme impliqué dans la récurrence est nul dès que $m > l$. La relation d'initialisation des termes diagonaux s'écrit alors :

$$\mathbf{I}_l^l = \begin{bmatrix} o_x & -o_y \\ o_y & o_x \end{bmatrix} \mathbf{I}_{l-1}^{l-1} + \begin{bmatrix} t_x & -t_y \\ t_y & t_x \end{bmatrix} \mathbf{J}_{l-1}^{l-1}, \quad (7.18)$$

où le terme $\mathbf{J}_{l-1}^{l-1}$ se déduit des relations 7.17 en posant $\mathbf{I}_{l-2}^{l-1} = \mathbf{J}_{l-2}^{l-1} = 0$.

La contribution essentielle de Tsoulis et al., 2009 (acl2) a consisté à reformuler les relations de récurrence 7.17 pour les harmoniques sphériques normalisés. Ces derniers se construisent à partir des fonctions associées de Legendre éponymes, dont la méthode de détermination numérique est réputée plus stable que celle employée pour les fonctions associées de Legendre dépourvues de normalisation. Un point important pour l'implémentation de l'algorithme linéaire sur ordinateur est la possibilité de paralléliser les calculs en travaillant indépendamment sur chacun des tétraèdres qui forment la source. La validation définitive de l'algorithme requiert des comparaisons avec des déterminations indépendantes du même effet gravitationnel, que nous allons examiner ci-après.

7.2.2.3 Performances de l'algorithme linéaire revisité

Une comparaison directe des coefficients de Stokes jusqu'au degré 4, obtenus respectivement par l'algorithme linéaire et celui de WERNER a révélé une adéquation à mieux que 10^{-16} près. Au moins pour ces quatre premiers degrés, les résultats donnés par les deux algorithmes peuvent être considérés comme identiques et l'algorithme linéaire plus avantageux du point de vue du temps de calcul.

La validation des coefficients peut être également menée de façon indirecte, en examinant la convergence ponctuelle du développement en harmoniques sphériques de l'effet gravitationnel d'un tétraèdre donné vers l'expression analytique de ce même effet. Cette expérience a été menée en un premier point, puis en un second deux fois plus éloigné du tétraèdre source que le premier. Ces deux points seront désignés respectivement par « point proche » et « point distant ». Les résultats montrent que la vitesse de convergence est plus élevée sur le point distant que sur le point proche. En effet, l'écart du potentiel calculé par sa série d'harmoniques sphériques et celui obtenu par le calcul analytique au point distant, passe en dessous de $2.10^{-13} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ à partir du degré 6 (Fig. 7.5, p. 327). Il faut atteindre le degré 25 pour qu'un écart du même ordre ($9.10^{-14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$) soit observé au point proche (Figs. 7.6 et 7.7, p. 328). L'écart se stabilise ensuite à $10^{-15} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ au-delà de degré 7 pour le point distant (Fig. 7.5), et il oscille autour de $10^{-15} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ entre les degrés 30 et 50 pour le point proche (Fig. 7.7).

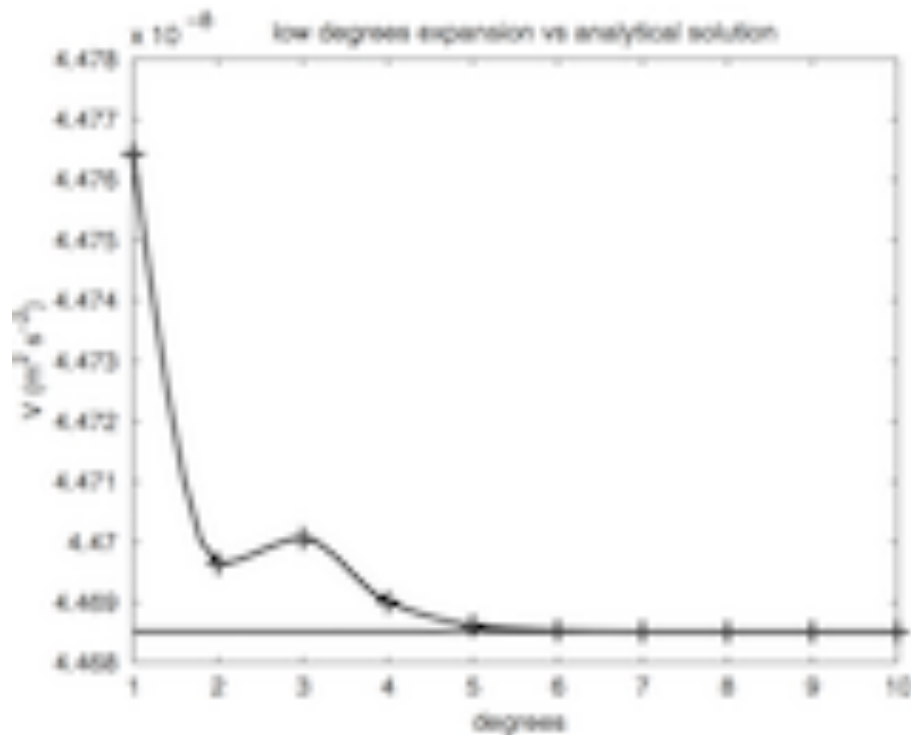


FIGURE 7.5 – Potentiel gravitationnel créé par un tétraèdre de densité constante ($5,52 \text{ gcm}^{-3}$) au point distant, calculé, d'une part, à l'aide de sa décomposition en harmoniques sphériques déduite de l'algorithme linéaire jusqu'au degré indiqué en abscisse (croix noires) et, d'autre part, à l'aide de sa formule analytique. L'écart entre les deux calculs est inférieur à $2 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ lorsque les six premiers degrés sont pris en compte dans la décomposition.

D'après Tsoulis et al., 2009 (acl2).

Étonnamment, pour des degrés plus élevés, l'adéquation entre les valeurs issues respectivement de la décomposition en harmoniques sphériques et du calcul analytique n'est pas la même au point proche et au point distant. Plus exactement, au degré 360, l'écart des potentiels atteint 10^{-22} pour le point distant, soit une valeur inférieure de cinq ordres de grandeur à celle (10^{-17}) atteinte pour le point proche. En outre, ces valeurs limites de l'écart sont obtenues dès le degré 30 pour le point distant, et seulement au degré 100 pour le point proche. La convergence rapide de la série d'harmoniques sphériques pour les points éloignés s'explique par la plus faible contribution des harmoniques de degrés élevés, amoindris par le facteur multiplicatif en $(a/r)^l$. L'effet de l'inexactitude des coefficients de Stokes n'est plus suffisamment atténué par ce facteur multiplicatif pour les points proches, ce qui explique la stabilisation de l'écart au calcul analytique, même lorsque la série d'harmoniques sphériques s'étend vers les hauts degrés. Malgré tout, les valeurs des écarts observés restent proches de l'inexactitude numérique inhérente aux calculateurs, ce qui constitue une validation de l'algorithme linéaire dans la configuration des expériences numériques réalisées, c'est-à-dire lorsque l'un des sommets du tétraèdre est confondu avec l'origine du repère.

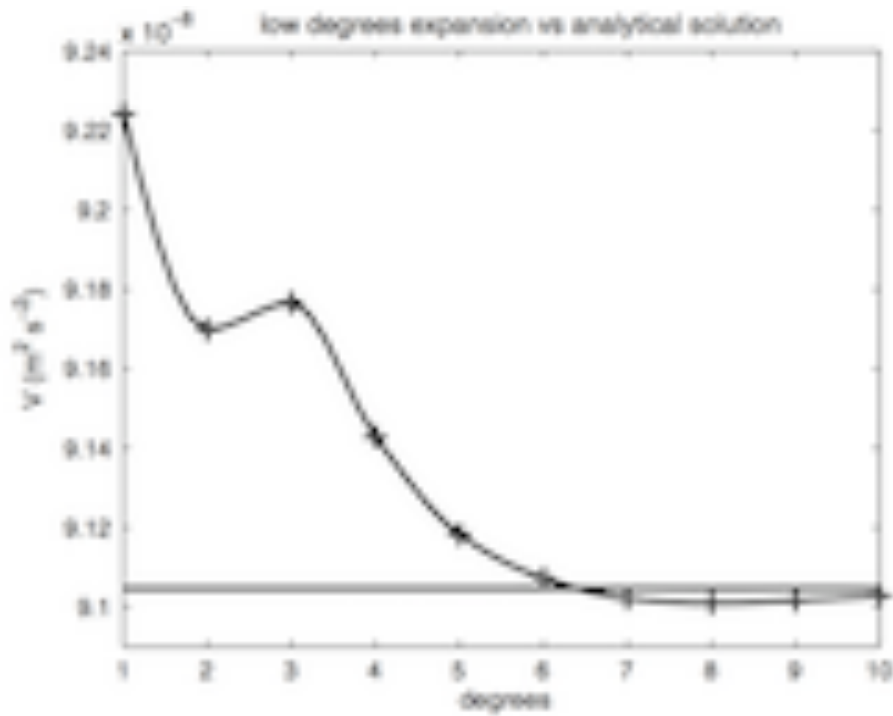


FIGURE 7.6 – Mêmes graphes que ceux représentés sur la figure 7.5 pour le point proche. L'écart demeure encore non négligeable au degré 10.

D'après Tsoulis et al., 2009 (acl2).

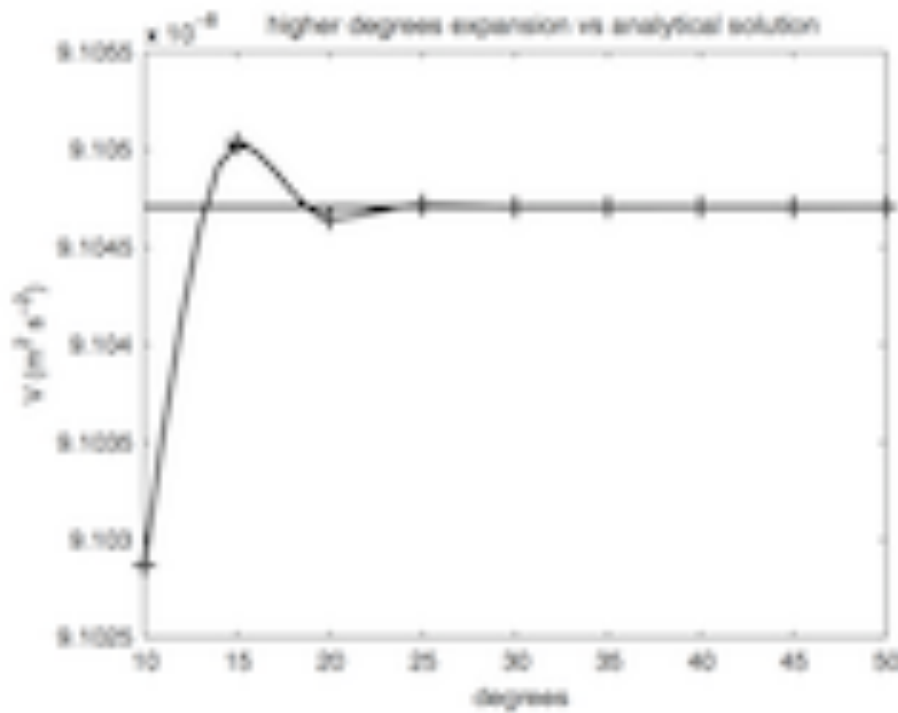


FIGURE 7.7 – Mêmes graphes que ceux représentés sur la figure 7.6 pour le point proche, étendus jusqu'au degré 50. L'écart atteint la valeur $9.10^{-14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ seulement pour le degré 25.

D'après Tsoulis et al., 2009 (acl2).

En reproduisant les expériences précédentes pour un tétraèdre localisé arbitrairement par rapport au repère d'étude, l'algorithme linéaire a montré de sévères divergences qu'il fallait expliquer. L'étude théorique de la stabilité du schéma de calcul impliquant les relations de récurrence 7.8 et 7.17 (p. 326) a montré deux faits capitaux :

1. la relation de récurrence 7.8 est stable à condition que la position du tétraèdre permette que : $\frac{d_0}{a \hat{\mathbf{u}}_z \cdot \hat{\mathbf{n}}_o} < 1$;
2. les relations 7.17 sont toujours instables à bas degré, quelle que soit la position du tétraèdre, mais cette instabilité devient modérée lorsque le rapport l/m croît.

La condition de stabilité de la relation 7.8 est naturellement satisfaite lorsque la face du tétraèdre opposée à l'origine du repère est horizontale. Il suffit alors de réaliser le calcul du potentiel gravitationnel pour chaque tétraèdre dans le repère adapté, après avoir préalablement exprimé, à l'aide d'une simple rotation, les coordonnées des points où le potentiel doit être calculé dans ce même repère. L'instabilité inhérente aux relations 7.17 peut être tolérée dans la mesure où elle induit une erreur acceptable dans le calcul des coefficients de Stokes. Une expérience numérique consistant à perturber les valeurs initiales des relations de récurrence 7.17, a permis de tracer le graphe de l'évolution de l'erreur relative sur les coefficients de Stokes pour chaque degré et chaque ordre (Fig. 7.8, p. 329). Ce graphe montre très clairement la croissance de l'erreur relative au début de la récurrence ($l = m$), c'est-à-dire lorsque, pour un ordre m donné, le degré l évolue depuis des valeurs proches de m . Cette dernière atteint un maximum puis diminue ensuite lorsque la valeur du rapport l/m s'accroît. Malgré cette limitation, l'algorithme linéaire demeure utilisable sur des corps massifs complexes sous réserve de contrôler la stabilité numérique des coefficients de Stokes estimés par ce dernier.

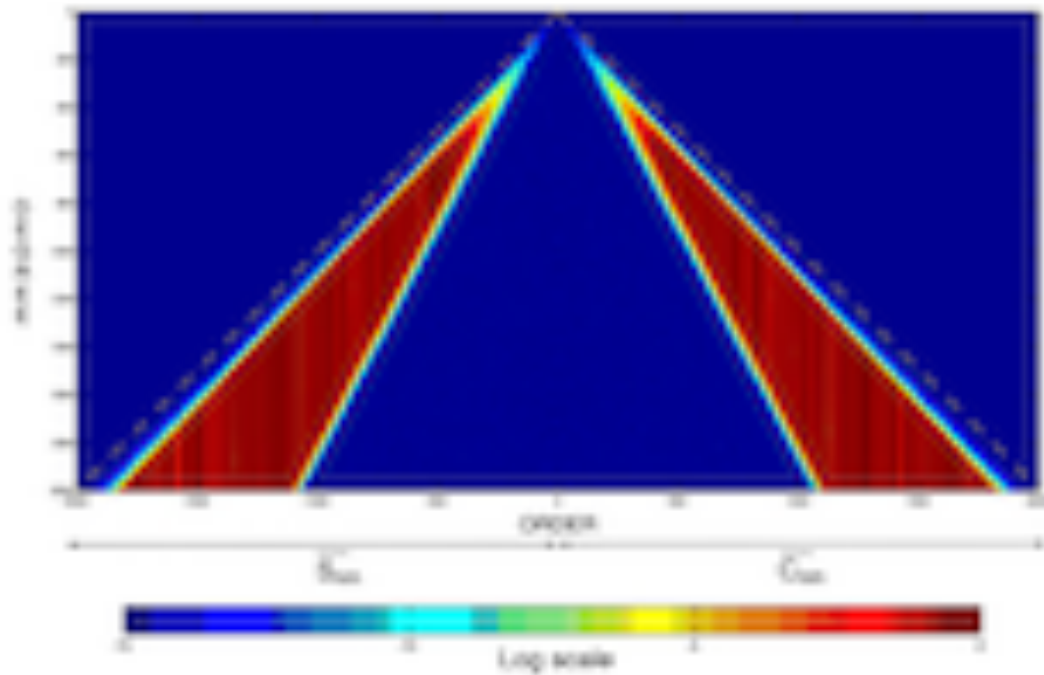


FIGURE 7.8 – Erreur relative sur les coefficients de Stokes déterminés à l'aide de l'algorithme linéaire. D'après Tsoulis et al., 2009 (acl2).

Une telle démarche a été appliquée au calcul du potentiel gravitationnel engendré par l'astéroïde EROS 433 (Fig. 7.9, p. 330). La surface de ce dernier a été triangulée de sorte que chaque triangle obtenu corresponde à l'une des faces d'un tétraèdre dont le sommet coïncide avec l'origine du repère d'étude. Pour chaque tétraèdre, la stabilité du calcul de la relation 7.8 (p. 325) est assurée par l'utilisation d'un repère de calcul dans lequel la face opposée à l'origine est horizontale. Une vérification de la stabilité des relations 7.17 (p. 326) est réalisée en comparant les coefficients de Stokes obtenus par le calcul direct à ceux issus d'un calcul aux conditions initiales perturbées. La règle de sélection consiste ensuite à mettre à zéro tous les coefficients qui présentent une différence entre calcul direct et calcul perturbé supérieure à 10^{-2} . Afin d'évaluer la qualité de la restitution, une comparaison des valeurs de potentiel gravitationnel données par la décomposition en harmoniques sphériques et par le calcul analytique, a été réalisée en 10 000 points distribués de façon aléatoire sur une sphère de rayon a .

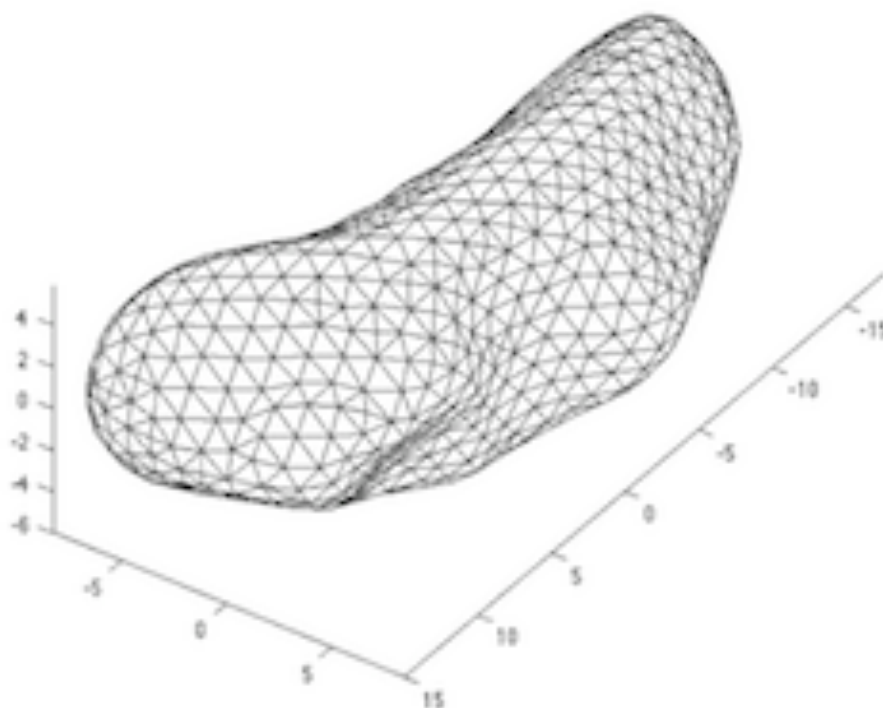


FIGURE 7.9 – Modélisation de la surface de l'astéroïde EROS 433 par une triangulation à 1 708 facettes. Les axes sont gradués en km.

D'après *Planetary Science Institute (USA)*, disponible à partir de <http://www.psi.edu/pds/archive/shape.html>.

Les résultats attestent d'une bonne convergence de la série d'harmoniques sphériques jusqu'au degré 68, suivie d'une légère dégradation jusqu'au degré 100 (Fig. 7.10, p. 331). L'implication des relations de récurrence 7.17 dans la déstabilisation du calcul pour les degrés supérieurs à 68, a été démontrée de façon incontestable en procédant aux mêmes calculs après avoir déterminé les intégrales curvilignes de la relation 7.8, non plus par les relations de récurrence 7.17, mais par une méthode d'intégration numérique. Les résultats montrent alors très clairement qu'aucune dégradation de la convergence n'apparaît dans la gamme des degrés compris entre 0 et 100 (Fig. 7.11, p. 331).

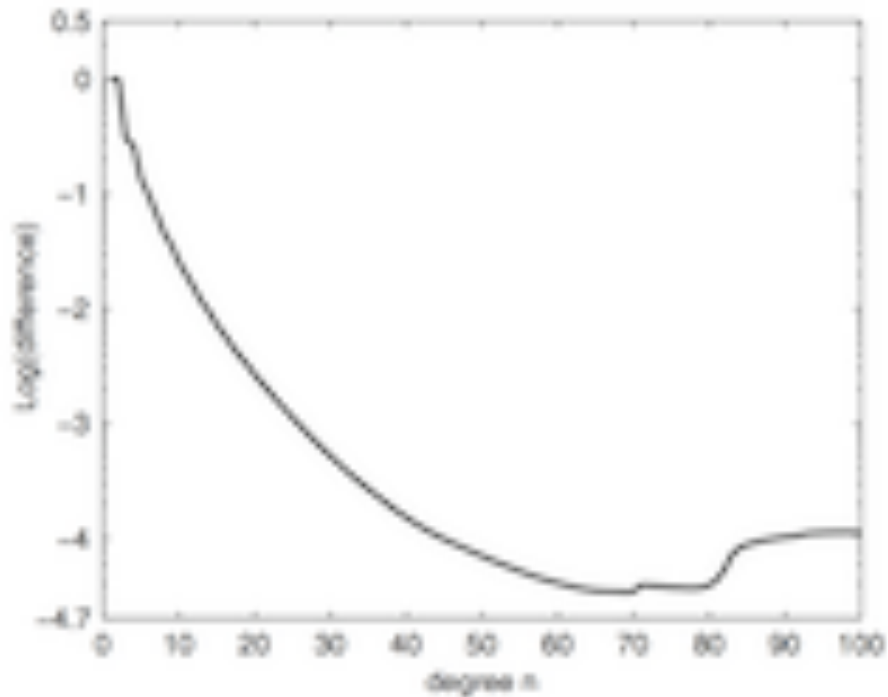


FIGURE 7.10 – Différence entre le potentiel gravitationnel de l'astéroïde EROS 433 obtenu par sa décomposition en harmoniques sphériques et par sa formule analytique. Une légère dégradation de la convergence vers zéro est observée à partir du degré 68.

D'après Tsoulis et al., 2009 (acl2).

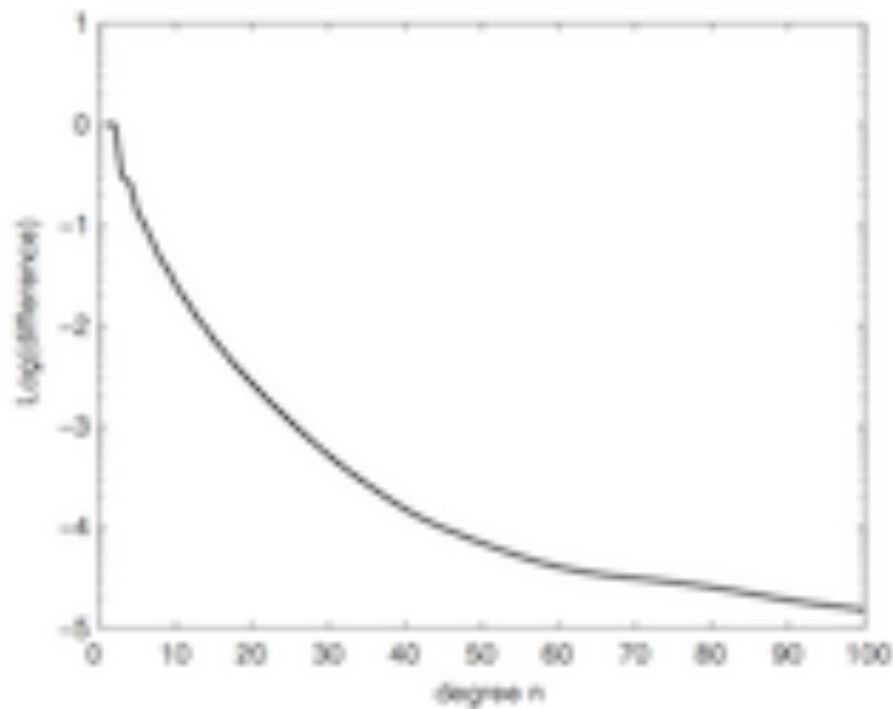


FIGURE 7.11 – Même graphe que celui représenté sur la figure 7.10. Les coefficients de Stokes de la décomposition en harmoniques sphériques ont été calculés, non pas par l'algorithme linéaire, mais par une intégration numérique. La convergence vers zéro s'effectue à présent sans à-coup, ce qui montre l'incidence des relations de récurrence 7.17 (p. 326).

D'après Tsoulis et al., 2009 (acl2).

Malgré ses insuffisances, l'algorithme linéaire développé dans Tsoulis et al., 2009 (acl2) a le mérite de fournir une variante numérique performante de l'algorithme de WERNER et des valeurs de comparaison avec les méthodes analytiques de détermination des coefficients de Stokes, telle celle développée par BALMINO (1994), appliquée notamment pour le calcul du champ de gravité de la comète « 67P Churyumov Gerasimenko » (LAURENT-VARIN, 2014) (Fig. 7.12), et celui des anomalies de gravité mondiales dans le modèle WGM2012 (BONVALOT et al., 2012) (cf Chap. 3, Fig. 3.2, p. 47 et Chap. 4, Fig. 4.2, p. 68).

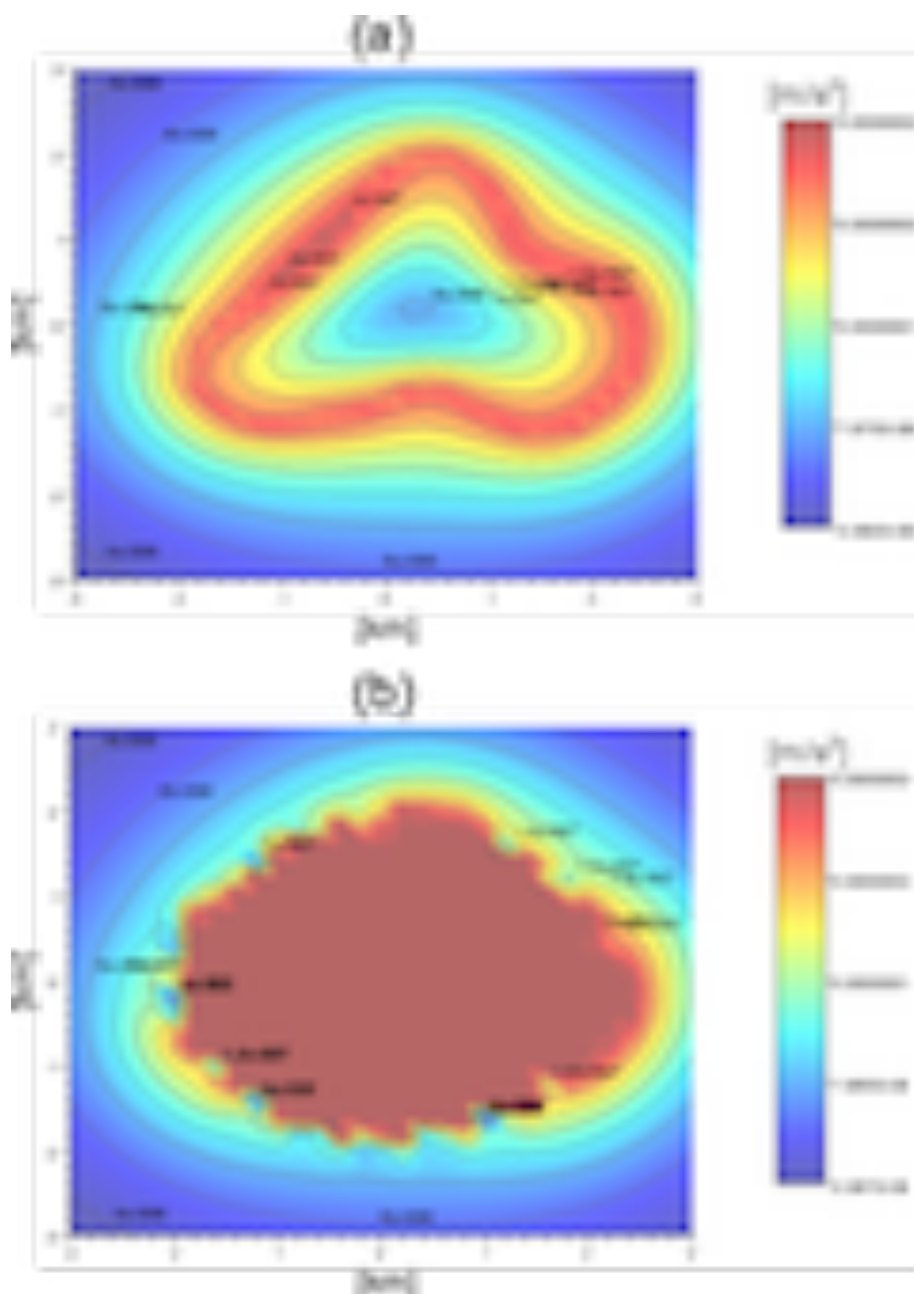


FIGURE 7.12 – Accélération gravitationnelle de la comète « 67P Churyumov Gerasimenko » dans un plan médiateur, calculée à partir (a) de relations analytiques appliquées à chaque tétraèdre de sa partition composée de 464 862 tétraèdres (Fig. 7.1, p. 320) ; (b) de la décomposition en harmoniques sphériques de sa surface (Fig. 7.2, p. 321) .

D'après LAURENT-VARIN (2014).

Il convient de remarquer que l'essence de la formulation pour le calcul des coefficients de Stokes, repose finalement sur la forme de la source élémentaire sur laquelle les calculs d'intégrales sont menés (Éq. 7.2, p. 322). Le choix de cette source élémentaire provient de la possibilité d'obtenir une quasi-partition de l'objet massif étudié, c'est-à-dire une décomposition exhaustive d'un volume d'approximation de l'objet avec des éléments de matière disjoints deux à deux. Comme évoqué précédemment, l'un des avantages du tétraèdre est de s'appuyer sur une triangulation de la surface extérieure au corps massif, ce qui permet de décrire des surfaces complexes à condition de disposer d'un modèle numérique de terrain suffisamment fin. En général, la source élémentaire la plus simple utilisée pour décomposer le volume d'un corps massif, est le parallélépipède rectangle, autrement appelé prisme droit. Ce choix résulte d'un compromis sur l'erreur d'approximation tolérable sur le champ synthétique, étant donné les incertitudes qui existent par ailleurs sur les distributions de masse en termes de forme et de valeurs de densité, et sur les mesures de gravité avec lesquelles le champ synthétique va être utilisé. Lorsque l'étendue de la structure étudiée ne permet plus de négliger la courbure de la surface de la Terre, l'emploi du prisme sphérique devient nécessaire. C'est le cas notamment dès qu'il s'agit de calculer l'effet gravitationnel des distributions de densité qui couvrent la Terre entière, telles celles données par les modèles géophysiques globaux. L'affinement des techniques de la gravimétrie spatiale fait qu'il devient absolument indispensable de limiter l'erreur d'approximation à des niveaux compatibles avec les incertitudes des mesures spatiales. En s'interrogeant sur l'amplitude de l'erreur d'approximation qui serait compatible avec les données de la mission GOCE, a émergé l'idée que le prisme ellipsoïdal devrait permettre un partitionnement plus exact de la Terre. La présentation des résultats de nos investigations sur ce point précis, est proposée ci-après.

7.2.3 Partitions de la planète Terre

7.2.3.1 Une Terre aplatie jusqu'au cœur

Comme évoqué au chapitre 3 (Sec. 3.2, §3.2.1, p. 50), la figure d'équilibre d'une Terre en rotation dont la distribution de densité présente une symétrie de révolution autour de l'axe de rotation, se confond avec celle d'un ellipsoïde de révolution suivant le même axe et aplati aux pôles. Une telle distribution correspond, par exemple, au modèle PREM (Tab. 7.1, p. 318), présenté comme un modèle moyen en couches successives de la Terre, duquel est tiré notamment le graphe de la densité moyenne $\rho(r)$ par couche en fonction du rayon géocentrique r (Fig. 7.13, p. 335). Avec une telle distribution, les figures d'équilibre hydrostatique des couches successives conservent la forme d'un ellipsoïde de révolution. Cependant, l'aplatissement des ellipsoïdes successifs décroît depuis la surface jusqu'au noyau. La distribution de densité $\rho(r)$ étant donnée, la distribution des aplatissements f obéit à l'équation de Clairaut (cf Chap. 3, Sec. 3.2, §3.2.1, Éqs. 3.27 et 3.28, p. 51). La résolution numérique de l'équation de Clairaut pour la distribution de densité issue du modèle PREM, a été réalisée par Venturi, 2016 (M2[1]) (Fig. 7.14, p. 336).

Cette résolution a nécessité de fixer deux conditions aux limites sur la couche considérée comme la plus interne. Plus précisément, l'équation 3.27 (p. 51) permet d'établir une relation entre les aplatissements f et f_0 mesurés respectivement en surface et pour la couche la plus interne, qui s'écrit :

$$f_0 = \frac{\frac{5\Omega^2}{8\pi G} + \rho_m f}{\frac{2}{3}\rho_0 + \rho_m}, \quad (7.19)$$

où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre, G , la constante gravitationnelle, et ρ_m et ρ_0 , la densité moyenne de la Terre et celle de la couche la plus interne respectivement.

Une telle condition aux limites implique également que la valeur de l'aplatissement doit correspondre à un minimum de la distribution $f(r)$. Autrement dit, si r_0 désigne le rayon de la couche la plus interne, il vient :

$$\left(\frac{df}{dr}\right)_{r_0} = 0. \quad (7.20)$$

À partir des valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} G &= 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \\ \Omega &= 7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} \quad (\text{GRS80}), \\ \rho_m &= 5500 \text{ kg m}^{-3}, \\ \rho_0 &= 13086,32 \text{ kg m}^{-3} \quad (\text{PREM}), \\ f &= 0,00335281068118 \quad (\text{GRS80}), \end{aligned}$$

il vient : $f_0 = 0,002411 = 1/414,7$.

Ainsi, sur la base du seul modèle PREM, la variation relative de l'aplatissement depuis la surface ($r = 6371$ km) jusqu'à la limite supérieure du noyau interne ($r = r_0 = 1221,5$ km) atteint-elle 28 %. En terme de raccourcissement entre demi-grands axes équatorial et polaire, cette variation d'aplatissement correspond respectivement à 21 km en surface et 3 km au niveau du noyau interne. Une modélisation adéquate des couches internes d'une Terre en rotation en équilibre hydrostatique, dotée d'une distribution de densité à symétrie de révolution, comprend donc une succession d'ellipsoïdes de révolution concentriques dont les aplatissements croissent depuis le noyau interne jusqu'à la surface. Le prisme ellipsoïdal apparaît donc, à première vue, comme l'élément de masse le plus adapté au partitionnement de la Terre. Encore faut-il vérifier qu'il existe des différences mesurables entre les effets gravitationnels calculés à partir de prismes ellipsoïdaux et ceux obtenus par des approximations plus classiques tels les prismes sphériques et parallélépipédiques.

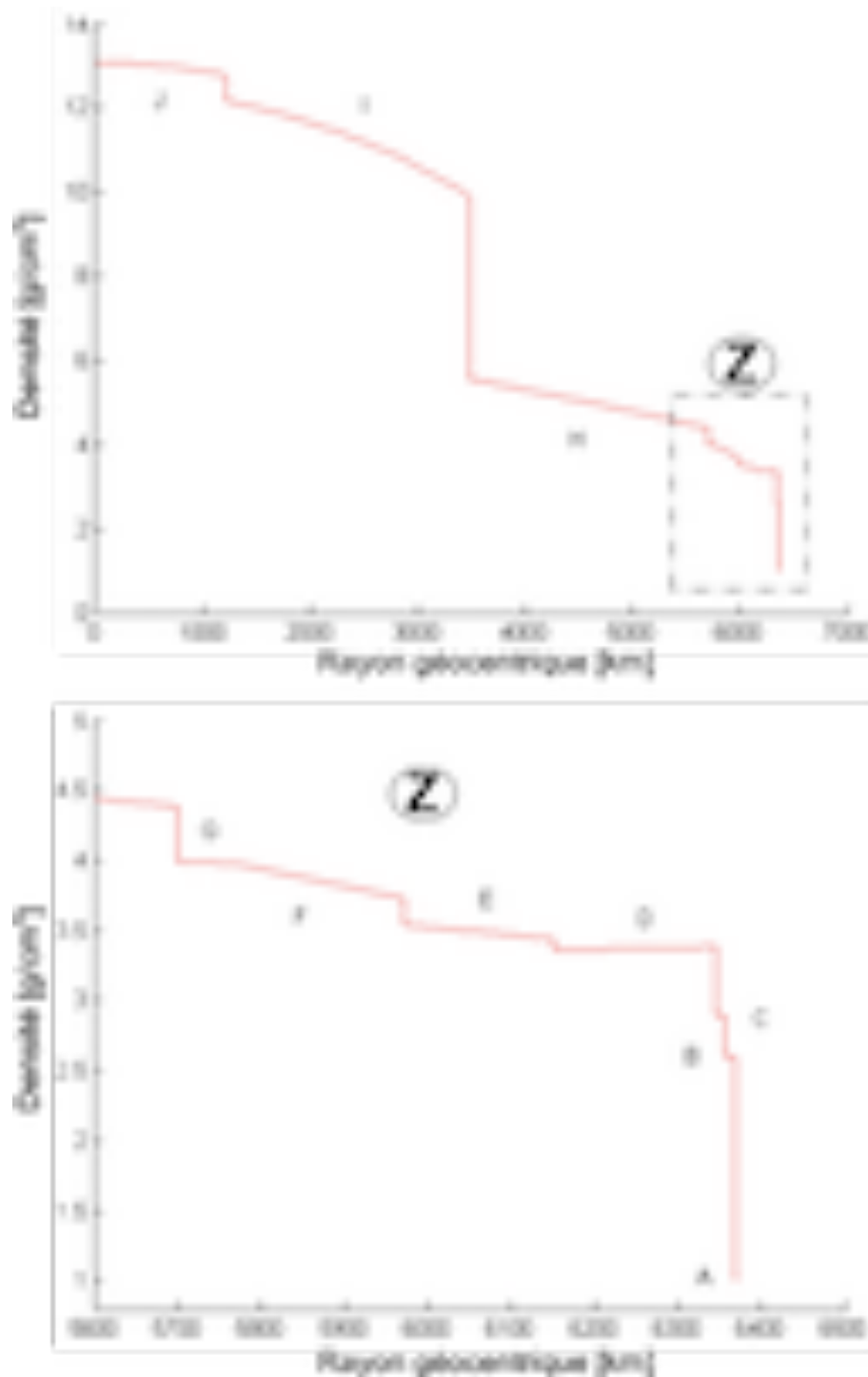


FIGURE 7.13 – Distribution de la densité en fonction du rayon géocentrique d'après le modèle PREM. Un agrandissement des 800 premiers kilomètres depuis la surface est représenté sur le graphe **Z**. Les dix couches classiquement définies dans ce modèle, sont les suivantes : océan (A), croûte supérieure (B), croûte inférieure (C), manteau lithosphérique (LID) et zone à faible vitesse (LWZ) (D), zone de transition (E, F, G), manteau inférieur (H), noyau externe (I), noyau interne (J).

D'après DZIEWONSKI et ANDERSON (1981).

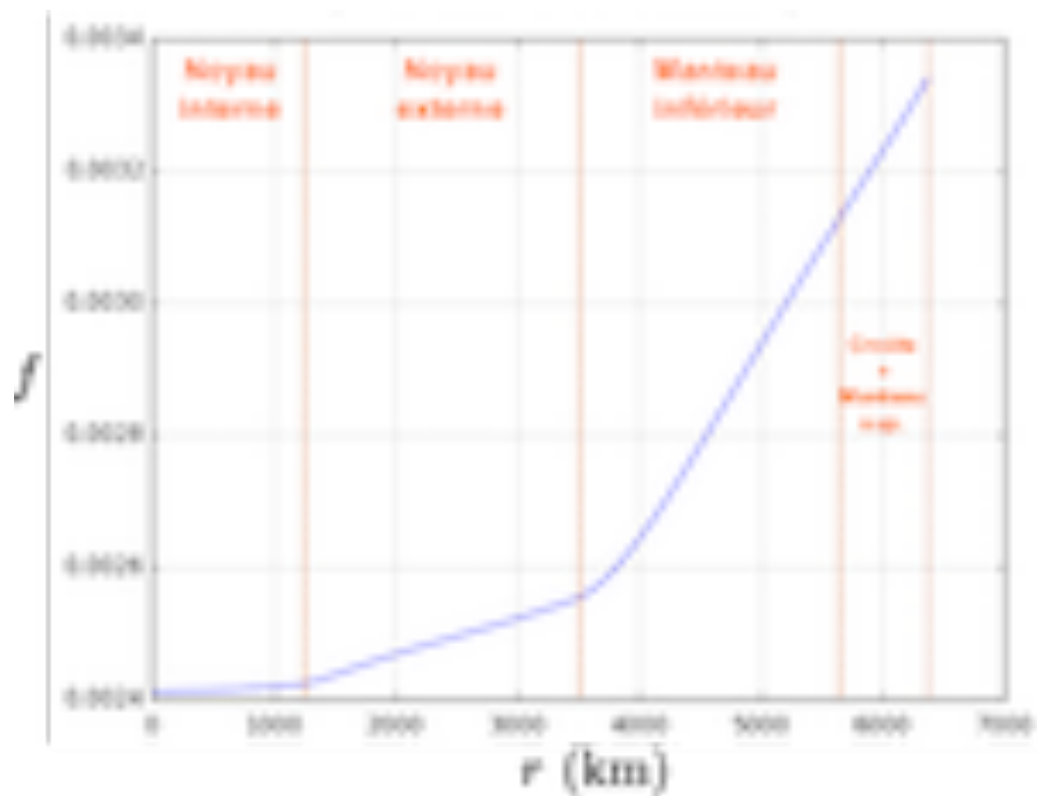


FIGURE 7.14 – Graphe de l'évolution de l'aplatissement f de la Terre en fonction du rayon géocentrique r , déduit de la résolution numérique de l'équation de Clairaut à partir de la distribution de densité du modèle PREM.

D'après Venturi, 2016 (M2[1]).

7.2.3.2 Le prisme ellipsoïdal : élément clé des calculs affinés

L'étude de l'impact de la forme de l'élément de masse dans le calcul direct des effets gravitationnels de la Terre, a été abordée dans le travail de fin d'études de Clément Roussel Roussel, 2013 (M2[5]), puis dans le cadre du projet « GEOPHYGOCE » (proj6). Les résultats ont été présentés par Roussel et al., 2014 (aff2), Verdun et al., 2014 (com4) et publiés dans Roussel et al., 2015 (acl1). La question essentielle posée notamment par le calcul numérique des gradients de gravité à partir de modèles géophysiques de la Terre, consiste en l'adéquation de l'exactitude des intégrations numériques avec les redoutables performances de la gravimétrie spatiale, et, plus particulièrement, celles du satellite GOCE. Pour fixer un seuil critique, nous considérerons dorénavant l'incertitude des mesures des gradients de gravité par le satellite GOCE de l'ordre de 1 mE. Toute méthode numérique adaptée pour une utilisation conjointe avec les données de ce satellite, devra nécessairement présenter une erreur inférieure d'au moins d'un ordre de grandeur. La première source d'erreur dans le calcul numérique de l'effet gravitationnel de la Terre entière, provient de ce que la forme des éléments de masse discrets utilisés pour décomposer le volume de la Terre, ne s'accorde qu'imparfaitement à la forme globale de la Terre. Il en résulte une erreur de calcul dont il faut contrôler l'impact, parfois au prix d'une multiplication notable du nombre d'éléments de masse discrets. Le problème se pose effectivement lors de la décomposition d'une Terre formée de couches ellipsoïdales par des prismes sphériques. Pour estimer de façon quantitative cette erreur, nous avons proposé dans Roussel et al., 2015 (acl1) un calcul somme toute assez simple que nous allons expliquer à présent.

L'idée fondamentale de ce calcul est qu'une part importante de l'erreur numérique, résulte de l'estimation erronée de la masse d'une Terre ellipsoïdale, lorsqu'elle est décomposée en prismes sphériques. Considérons, par exemple, un point P d'observation placé à l'altitude du satellite GOCE. L'élément de masse placé au point S à l'intérieur de la Terre où la densité est $\rho(\mathbf{x}_S)$, crée en P le potentiel gravitationnel d^3V donné par :

$$d^3V(\mathbf{x}_P) = G \frac{\rho(\mathbf{x}_S) d^3\mathbf{x}_S}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_S\|}. \quad (7.21)$$

Si (λ, θ, r) désignent les coordonnées sphériques du point P , alors le gradient élémentaire d^3V_{rr} de la composante radiale de l'accélération gravitationnelle causée par l'élément de masse, calculé dans la direction radiale¹, s'exprime par :

$$d^3V_{rr}(\mathbf{x}_P) = \partial_{rr} d^3V(\mathbf{x}_P) = G \rho(\mathbf{x}_S) \partial_{rr}^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_S\|} \right) d^3\mathbf{x}_S. \quad (7.22)$$

Le gradient élémentaire par unité de masse au point P , noté τ_{rr}^S , dû à l'élément de masse placé en S , peut alors se calculer par :

$$\tau_{rr}^S = \frac{d^3V_{rr}(\mathbf{x}_P)}{\rho(\mathbf{x}_S) d^3\mathbf{x}_S} = G \partial_{rr}^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_S\|} \right). \quad (7.23)$$

1. Il s'agit ici de la valeur élémentaire d^3V_{rr} de l'élément V_{rr} du tenseur de Marussi exprimé en coordonnées sphériques.

L'équation 7.23 (p. 337) montre qu'une fois ramené à l'unité de masse, le gradient élémentaire ne dépend plus que de la position relative du point source S et du point d'observation P . La valeur moyenne de la quantité τ_{rr}^S lorsque S parcourt un volume sphérique de rayon a , en constitue une bonne estimation. Elle s'exprime littéralement par :

$$\langle \tau_{rr}^S \rangle_a = G \partial_{rr}^2 \left\langle \frac{1}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_S\|} \right\rangle_a = G \partial_{rr}^2 \left(\frac{1}{r^3} \right),$$

puisque $\left\langle \frac{1}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_S\|} \right\rangle_a = \frac{1}{r}$, lorsque P est à l'extérieur du volume sphérique.

Finalement, la valeur moyenne de la quantité τ_{rr}^S au point P s'exprime par :

$$\langle \tau_{rr}^S \rangle_a = \frac{2G}{r^3} \text{ avec } r = \|\mathbf{x}_P\|. \quad (7.24)$$

En considérant que le point P se situe sur l'orbite du satellite GOCE à une hauteur de 260 km au-dessus de la sphère terrestre moyenne de rayon 6371 km, il vient numériquement pour $r = 6\,631$ km :

$$\langle \tau_{rr}^S \rangle_a = 4,57 \cdot 10^{-19} \text{ mE/kg.}$$

Cette valeur indique qu'une erreur sur l'estimation de la masse qui atteindrait $2,19 \cdot 10^{18}$ kg (soit $1/\langle \tau_{rr}^S \rangle_a$), peut, en moyenne, engendrer une erreur sur l'élément V_{rr} du tenseur de Marussi de 1 mE. Pour évaluer l'erreur d'estimation de la masse due à la décomposition en prismes sphériques d'une Terre ellipsoïdale, nous avons calculé la différence cumulée entre la masse des couches du modèle PREM obtenue à partir de l'expression analytique du volume de couches ellipsoïdales concentriques et homothétiques et celle dans laquelle le volume des couches est calculé par une intégration numérique à partir de prismes ellipsoïdaux. Cette différence, une fois mise à l'échelle à partir du coefficient $\langle \tau_{rr}^S \rangle_a$ permet de tracer le graphe de l'erreur cumulée sur l'élément V_{rr} en fonction de la profondeur de la dernière couche du modèle considérée dans la calcul (Fig. 7.15, p. 339). Le graphe obtenu montre que l'erreur cumulée atteint 1 mE à partir de 230 km de profondeur, c'est-à-dire à la base de la zone à faible vitesse (« Low Velocity Zone »). L'erreur cumulée poursuit sa croissance jusqu'à atteindre 20 mE lorsque l'intégralité du modèle est pris en compte. S'il fallait limiter cette erreur cumulée à 0,1 mE, il est clair qu'un calcul avec des prismes ellipsoïdaux serait nécessaire pour déterminer les effets gravitationnels lithosphériques.

Une critique légitime du calcul réalisé jusqu'ici serait qu'en considérant les couches du modèle PREM homothétiques, il suppose leurs aplatissements invariables, tous égaux à celui de la couche externe. Or, l'équilibre hydrostatique du modèle implique des aplatissements décroissants avec la profondeur des couches (cf Fig. 7.14, p. 336), si bien que leurs formes tendent de plus en plus vers la sphère. Il devrait donc se produire une stabilisation de l'erreur cumulée plus franche que celle observée, l'approximation en prismes sphériques devenant de plus en plus licite avec la profondeur. En fait, la variation de l'aplatissement sur les mille premiers kilomètres de profondeur reste inférieure à 10 %. En considérant ce facteur correspond également à la part de diminution de l'erreur cumulée, elle atteindrait encore 0,9 mE à 230 km, ce qui ne dément pas les conclusions précédentes. La principale leçon à tirer de cette étude est que les calculs numériques directs d'effets gravitationnels, notamment les gradients de gravité, à partir de modèles géophysiques globaux, requièrent une vigilance toute particulière pour ce qui concerne l'erreur de calcul. Comme nous allons voir ci-après, l'utilisation de prismes ellipsoïdaux n'entraîne pas de difficulté supplémentaire comparée à celle de leurs homologues sphériques. Leur généralisation à tous les calculs de champ mérite donc d'être envisagée.

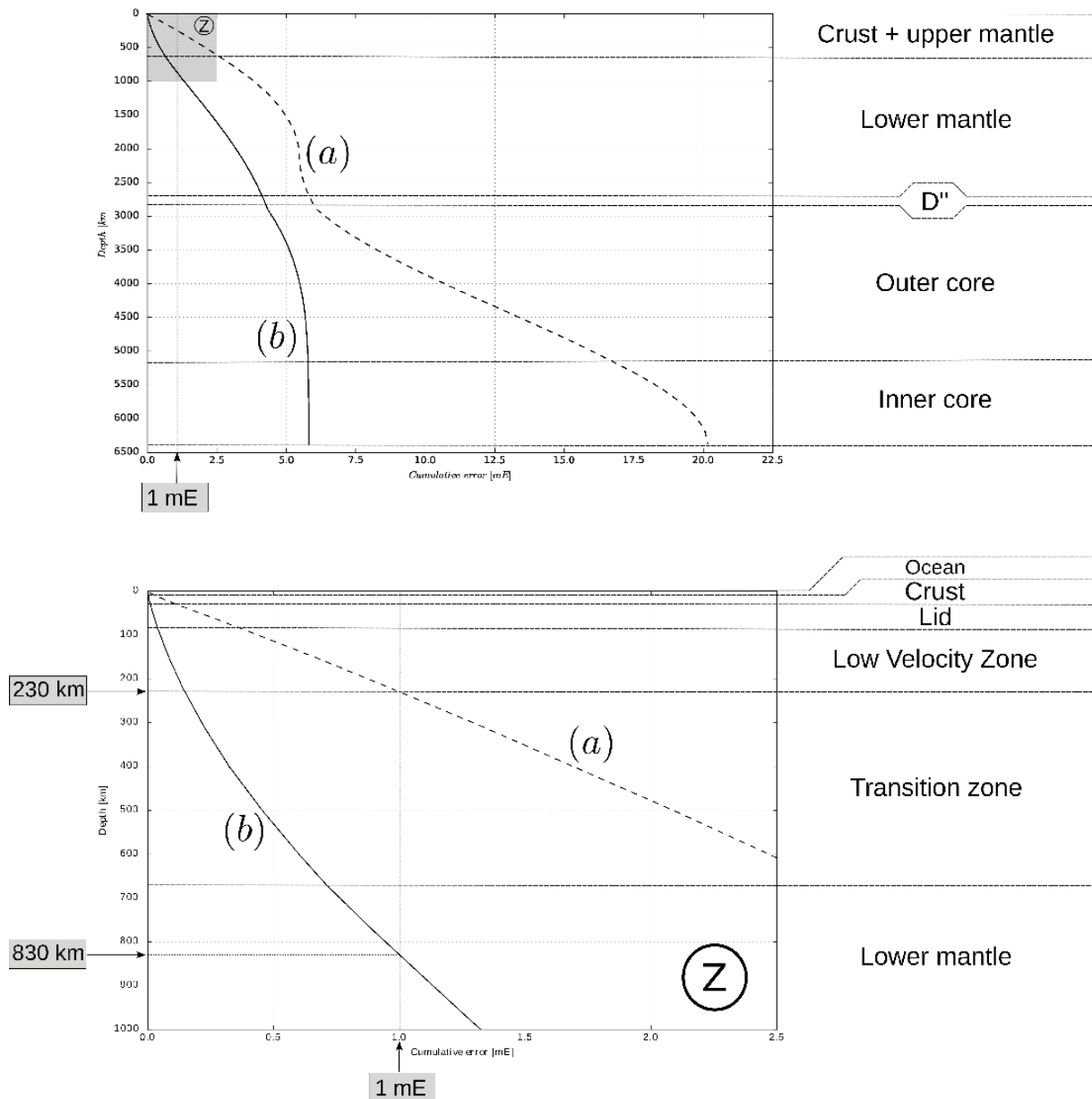


FIGURE 7.15 – (a) Graphe de l'erreur cumulée sur le gradient radial V_{rr} produit par une Terre ellipsoïdale, dont la distribution de densité est issue du modèle PREM. (b) Même graphe que celui représenté en (a) après ajustement de la densité des prismes sphériques.

D'après Roussel et al., 2015 (acl1).

7.2.3.3 Intégration numérique à partir de prismes ellipsoïdaux

À l'inverse du prisme parallélépipédique (NAGY, 1966, NAGY et al., 2000, PLOUFF, 1976), il n'existe pas de relations analytiques exactes pour calculer les effets gravitationnels produits par les prismes sphériques et ellipsoïdaux. Parmi les stratégies employées pour calculer numériquement ces effets, figurent les méthodes d'intégration numérique (VON FRESE et al., 1981a, KU, 1977), et plus particulièrement, la quadrature de Gauss-Legendre (VON FRESE et al., 1981b, WILD-PFEIFFER, 2008). ASGHARZADEH et al. (2007) ont proposé une formulation pour le calcul numérique du champ gravitationnel et du tenseur des gradients de gravité d'un corps arbitraire par la quadrature de Gauss-Legendre. Cette formulation a ensuite été appliquée par UIEDA et al. (2016) pour le développement du logiciel libre de calcul de champ « Tesseroids ». La formulation de la quadrature de Gauss-Legendre pour le prisme ellipsoïdal a été établie dans Roussel et al., 2015 (acl1). Pour y parvenir, il fallait tout d'abord s'accorder sur un paramétrage de l'ellipsoïde qui permette une définition claire du prisme ellipsoïdal.

Nous avons vu au chapitre 4 (cf Sec. 4.1, Éqs. 4.1, 4.2 et 4.3, pp. 65 et 66) comment repérer un point S quelconque par ses coordonnées géographiques, constituées par la longitude λ_S , la latitude géographique φ_S et la hauteur h_S au-dessus d'un ellipsoïde de révolution $\mathcal{E}_{a,e}$ fixé par convention et défini par son demi-grand axe a et sa première excentricité e . Or il s'avère que la surface parallèle à la surface de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{a,e}$, formée de l'ensemble des points de hauteur constante ($h_S = \text{cste}$), ne coïncide pas avec celle d'un ellipsoïde. Il n'est donc pas possible d'utiliser la hauteur ellipsoïdale pour définir des couches ellipsoïdales concentriques. Pour remédier à ce problème, il suffit d'utiliser une nouvelle coordonnée u_S définie comme la grandeur sans dimension telle que :

$$u_S = \sqrt{\frac{X_S^2 + Y_S^2}{a^2} + \frac{Z_S^2}{b^2}}, \quad (7.25)$$

où X_S , Y_S et Z_S désignent les coordonnées cartésiennes géocentriques du point S et $b = a\sqrt{1 - e^2}$, le demi-petit axe de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{a,e}$.

D'un point de vue géométrique, la quantité u_S correspond au facteur d'homothétie à appliquer à l'ellipsoïde de référence $\mathcal{E}_{a,e}$ pour obtenir un ellipsoïde homothétique $\mathcal{E}_{a,e}$ de qui passe par le point S en question. Il suffit alors de se donner les coordonnées $(\lambda_S, \varphi_S, u_S)$ pour repérer n'importe quel point de l'espace. Ainsi définie, la coordonnée u_S est strictement positive, inférieure, égale ou supérieure à un suivant que le point S se situe à l'intérieur, sur la surface ou à l'extérieur de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{a,e}$. En utilisant les coordonnées « ellipsoïdales » $(\lambda_S, \varphi_S, u_S)$, toute équation de la forme $u = \text{cste}$ représente la surface d'un ellipsoïde de révolution homothétique de l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{a,e}$ et de même centre. Il convient de noter que tout ellipsoïde déduit de l'ellipsoïde de référence $\mathcal{E}_{a,e}$ par une homothétie, garde la même excentricité que $\mathcal{E}_{a,e}$ et donc le même aplatissement.

Les coordonnées cartésiennes géocentriques du point S sont reliées aux coordonnées $(\lambda_S, \varphi_S, u_S)$ par les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} X_S &= u_S N(\varphi_S) \cos \varphi_S \cos \lambda_S \\ Y_S &= u_S N(\varphi_S) \cos \varphi_S \sin \lambda_S \\ Z_S &= u_S N(\varphi_S) (1 - e^2) \sin \varphi_S \end{cases}, \quad (7.26)$$

$$\text{où } N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Tout prisme ellipsoïdal $\mathcal{P}_e$ est défini par la donnée de deux longitudes $\lambda_1 < \lambda_2$, deux latitudes géographiques $\varphi_1 < \varphi_2$ et deux facteurs d'homothétie $0 < u_1 < u_2$. Le volume élémentaire $d^3\mathbf{x}_S$ construit à partir de variations infinitésimales des coordonnées $(\lambda_S, \varphi_S, u_S)$ s'exprime par :

$$d^3\mathbf{x}_S = \left| \frac{D(X_S, Y_S, Z_S)}{D(\lambda_S, \varphi_S, u_S)} \right| d\lambda_S d\varphi_S du_S,$$

où $\frac{D(X_S, Y_S, Z_S)}{D(\lambda_S, \varphi_S, u_S)}$ correspond au déterminant de la matrice jacobienne de l'application, définie par les relations 7.26 (p. 340), qui associe au triplet des coordonnées géographiques $(\lambda_S, \varphi_S, u_S)$, celui des coordonnées cartésiennes (X_S, Y_S, Z_S) .

Tous calculs faits, l'expression de l'élément de volume $d^3\mathbf{x}_S$ du prisme ellipsoïdal s'exprime par :

$$d^3\mathbf{x}_S = \frac{a^3 (1 - e^2) u_S^2 \cos \varphi_S}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_S)^{\frac{3}{2}}} d\lambda_S d\varphi_S du_S = N^3(\varphi_S) (1 - e^2) u_S^2 \cos \varphi_S d\lambda_S d\varphi_S du_S. \quad (7.27)$$

Si ρ_S désigne la densité du prisme $\mathcal{P}_e$, supposée constante, alors le potentiel gravitationnel V généré par ce dernier au point d'observation P de coordonnées cartésiennes (X_P, Y_P, Z_P) est donné par :

$$V(\mathbf{x}_P) = G\rho_S \int_{u_1}^{u_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{N^3(\varphi_S) (1 - e^2) u_S^2 \cos \varphi_S}{\sqrt{(X_P - X_S)^2 + (Y_P - Y_S)^2 + (Z_P - Z_S)^2}} d\lambda_S d\varphi_S du_S. \quad (7.28)$$

L'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ et le tenseur des gradients de gravité $T(\mathbf{x}_P)$ dérivent de ce potentiel par les relations :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_P) = \nabla_P V(\mathbf{x}_P) \quad \text{et} \quad T(\mathbf{x}_P) = \nabla_P (\nabla_P V(\mathbf{x}_P)),$$

où l'opérateur ∇_P s'exprime en fonction des changements de position du point d'observation P .

L'opérateur ∇_P peut s'exprimer dans différents repères selon la nature des coordonnées choisies pour repérer le point d'observation. Par exemple, si les coordonnées cartésiennes de P sont utilisées, l'accélération gravitationnelle $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ et le tenseur $T(\mathbf{x}_P)$ verront leurs éléments exprimés dans la base cartésienne $(\hat{\mathbf{e}}_X, \hat{\mathbf{e}}_Y, \hat{\mathbf{e}}_Z)$. Les relations développées dans Roussel et al., 2015 (acl1) ont été établies dans le cas où le point P est repéré par ses coordonnées sphériques (λ_P, ϕ_P, r_P) (Fig. 7.16). Dans ce cas, les éléments de $\mathbf{g}(\mathbf{x}_P)$ et $T(\mathbf{x}_P)$ sont rapportés à la base locale mobile $(\hat{\mathbf{e}}_\lambda, \hat{\mathbf{e}}_\phi, \hat{\mathbf{e}}_r)$, également utilisée pour les gradients de gravité issus des mesures du satellite GOCE.

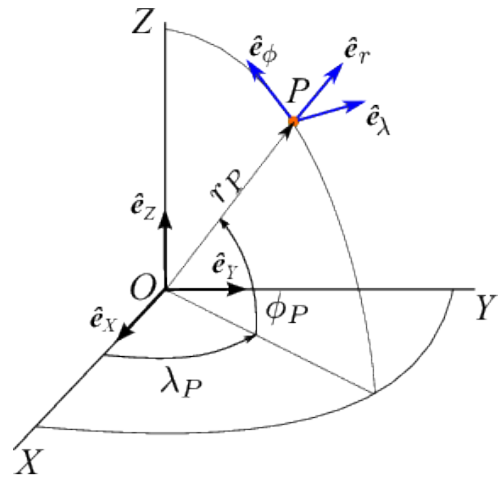


FIGURE 7.16 – Repérage du point P par ses coordonnées sphériques.

Quel que soit le mode de repérage choisi pour le point d'observation, les relations qui expriment les grandeurs relatives au champ gravitationnel du prisme ellipsoïdal sont toutes de la forme :

$$\int_{u_1}^{u_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(X_P, Y_P, Z_P, \lambda_S, \varphi_S, u_S) d\lambda_S d\varphi_S du_S. \quad (7.29)$$

La quadrature de Gauss-Legendre permet de calculer numériquement les intégrales du type 7.29 grâce à une somme finie qui s'exprime par :

$$\frac{1}{8} (\lambda_2 - \lambda_1) (\varphi_2 - \varphi_1) (u_2 - u_1) \sum_{i=1}^{n_\lambda} \sum_{j=1}^{n_\varphi} \sum_{k=1}^{n_u} \omega_i \omega_j \omega_k f(X_P, Y_P, Z_P, \lambda_{S_i}, \varphi_{S_j}, u_{S_k}), \quad (7.30)$$

où la fonction f doit être évaluée en $n_\lambda \times n_\varphi \times n_u$ points, appelés *nœuds de Legendre*, et ω_i , ω_j et ω_k sont des coefficients de pondération liés aux nœuds de Legendre.

Les nœuds de Legendre sont déterminés de la même façon pour chacune des coordonnées λ , φ , u . Prenons l'exemple de la latitude φ . Le j^{e} nœud de Legendre φ_{S_j} est obtenu par la relation :

$$\varphi_{S_j} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \hat{\varphi}_{S_j} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$$

où $\hat{\varphi}_{S_j}$ est la j^{e} racine du polynôme de Legendre P_{n_φ} de degré n_φ dans l'intervalle $[-1, +1]$.

Le poids ω_j affecté à ce nœud est alors donné par la relation :

$$\omega_j = \frac{2}{n_\varphi P_{n_\varphi-1}(\hat{\varphi}_{S_j}) P'_{n_\varphi}(\hat{\varphi}_{S_j})},$$

où $P_{n_\varphi-1}$ et P'_{n_φ} désignent respectivement le polynôme de Legendre de degré $n_\varphi-1$ et la dérivée première du polynôme de Legendre de degré n_φ .

L'erreur de calcul induite par la quadrature de Gauss-Legendre diminue lorsque le nombre de nœuds s'accroît. Afin de fixer le nombre de nœuds adéquats pour limiter l'erreur de calcul selon nos spécifications, nous avons comparé les gradients de gravité produits par une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques (Fig. 7.17, p. 343), sur une orbite méridienne de 260 km de hauteur, et déterminés respectivement par la quadrature de Gauss-Legendre et les formules analytiques établies dans Roussel, 2013 (M2[5]), à partir de l'expression du potentiel gravitationnel d'un ellipsoïde homogène (KELLOGG, 1954).

Les résultats indiquent que le choix $(n_\lambda, n_\varphi, n_u) = (3, 3, 2)$ garantit une erreur de calcul inférieure au 10^e de millieötvös quelle que soit la latitude avec des prismes de 1° par 1° (Fig. 7.18, p. 344). En outre, cette erreur peut encore être diminuée sans changer le nombre de nœuds par simple réduction des dimensions du prisme. Le calcul direct des effets gravitationnels d'une Terre ellipsoïdale à distribution de densité quelconque peut donc être réalisé à l'altitude du satellite GOCE par la quadrature de Gauss-Legendre, tout en conservant une erreur de calcul compatible avec les données satellitaires. L'apport de la méthode présentée ici, réside essentiellement dans le partitionnement plus réaliste du volume terrestre permis par les prismes ellipsoïdaux, sans complication excessive comparée à la formulation impliquant des prismes sphériques. Une marge de progression de la méthode reste toujours possible par augmentation du nombre de nœuds et réduction de la taille des prismes, en vue d'applications à l'échelle locale, qui nécessitent des calculs de champ à la surface de la Terre.

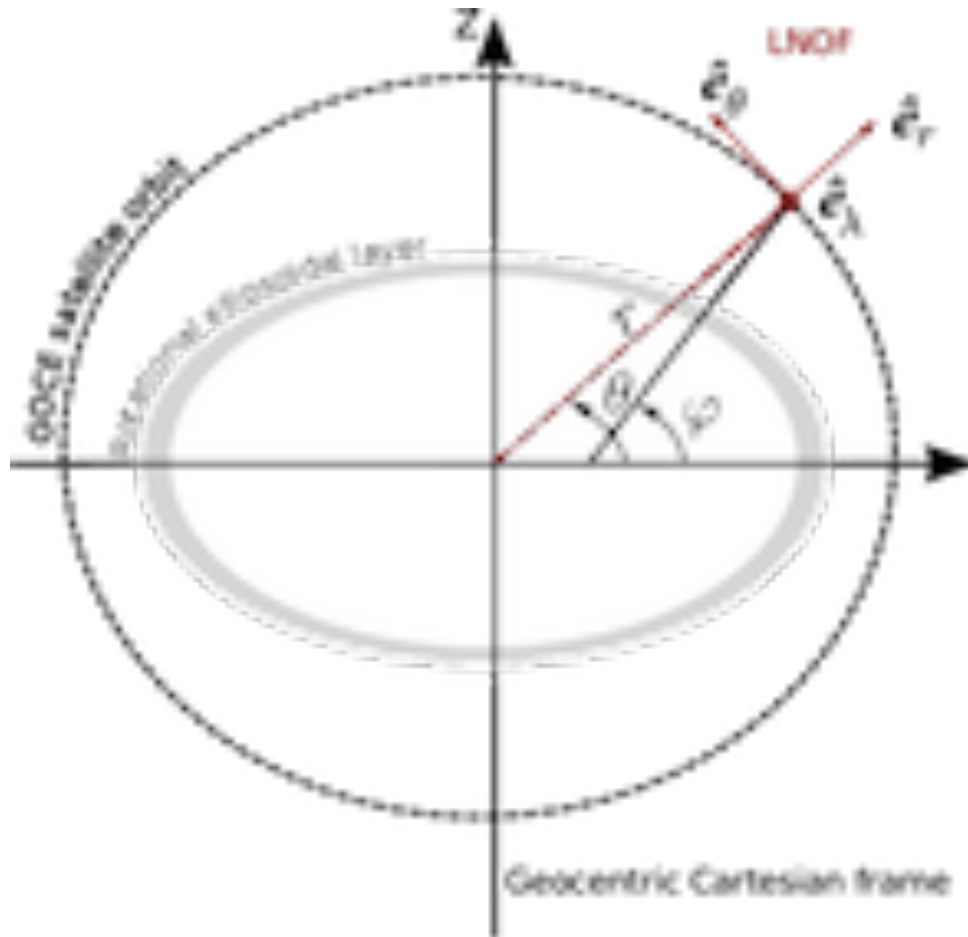


FIGURE 7.17 – Vues de la couche ellipsoïdale homogène (densité : $10\,000\text{ kgm}^{-3}$) et de l'orbite méridienne utilisées pour la validation de la quadrature de Gauss-Legendre. La couche ellipsoïdale voit sa hauteur varier entre 10,000 km à l'équateur et 9,996 km aux pôles. La quadrature de Gauss-Legendre a été appliquée sur des prismes définis par : $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 1^\circ$, $u_1 = 1,000\,00$ et $u_2 = 1,001\,57$. Les gradients de gravité de la couche ellipsoïdale ont été calculés numériquement sur un ensemble de points régulièrement répartis tous les 1° de latitude sur l'orbite méridienne, et leurs valeurs comparées à celles données par les formules analytiques. Les éléments du tenseur ont été exprimés dans un repère sphérique local ($\hat{e}_\lambda, \hat{e}_\theta, \hat{e}_r$) identique à celui défini sur la figure 7.16 avec $\theta = \phi$. Ce repère est désigné selon la terminologie « Local North Oriented Frame » ou repère « LNOF ».

D'après Verdun et al., 2014 (com4).

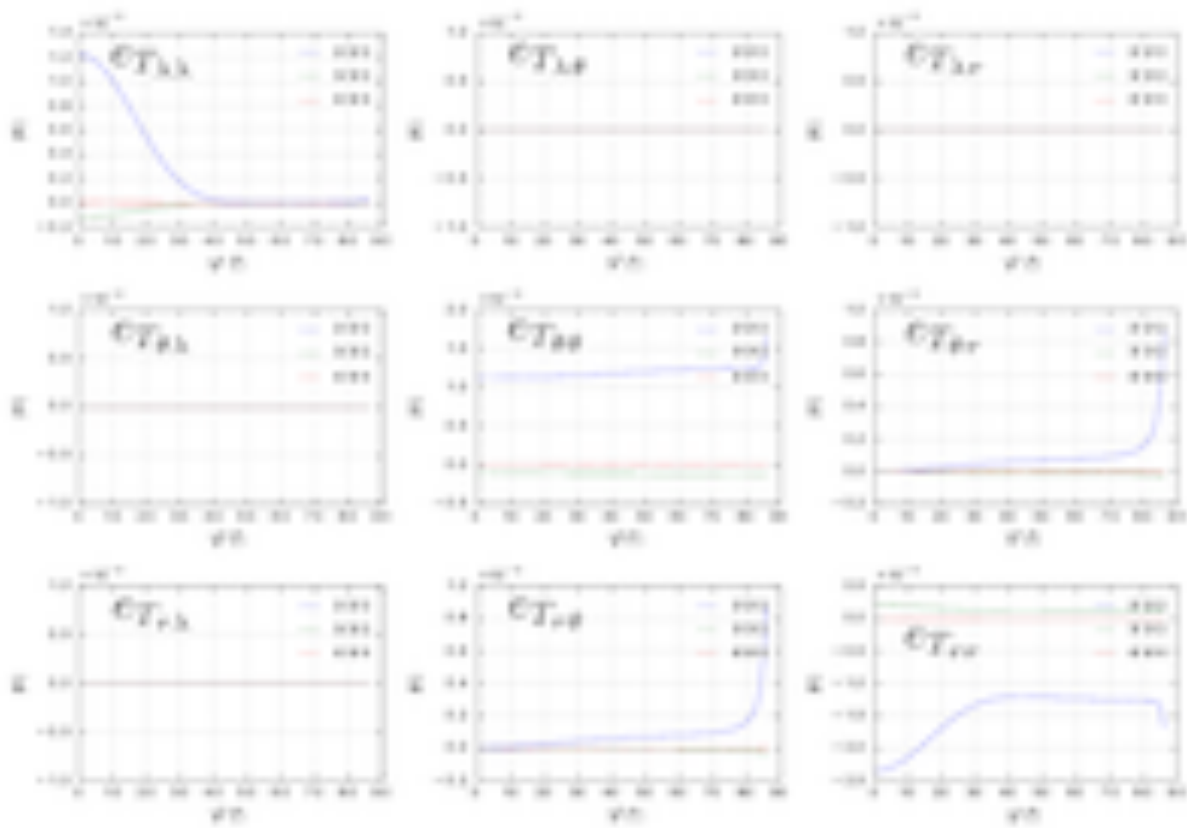


FIGURE 7.18 – Erreurs $e_{T_{\alpha\beta}}$, $\alpha, \beta = \lambda, \theta, r$ sur les gradients de gravité produit par la couche ellipsoïdale définie sur la figure 7.17, p. 343 en fonction de la latitude géographique φ , et exprimés dans le repère LNOF.

D'après Roussel et al., 2015 (acl1).

7.2.3.4 Ajustement ad hoc des prismes sphériques pour la lithosphère

Nous avons vu au §7.2.3.2 (p. 337) dans quelle mesure l'erreur de calcul cumulée résultant de la décomposition d'un volume ellipsoïdal en prismes sphériques, pouvait altérer de façon manifeste la détermination des effets gravitationnels. Un ajustement très simple permet néanmoins de réduire substantiellement cette erreur. Considérons un modèle géophysique qui attribue au point S de coordonnées géographiques (λ, φ, h) et cartésiennes (X_S, Y_S, Z_S) , la densité ρ_S . Supposons également que les pas d'échantillonnage du modèle soient égaux respectivement à $\Delta\lambda$ en longitude, $\Delta\varphi$ en latitude et Δh en hauteur. Il est donc possible de former l'élément de matière compris entre le point S et le point S' de coordonnées géographiques $(\lambda + \Delta\lambda, \varphi + \Delta\varphi, h + \Delta h)$, et de coordonnées cartésiennes $(X_{S'}, Y_{S'}, Z_{S'})$ (Figs. 7.19 et 7.20).

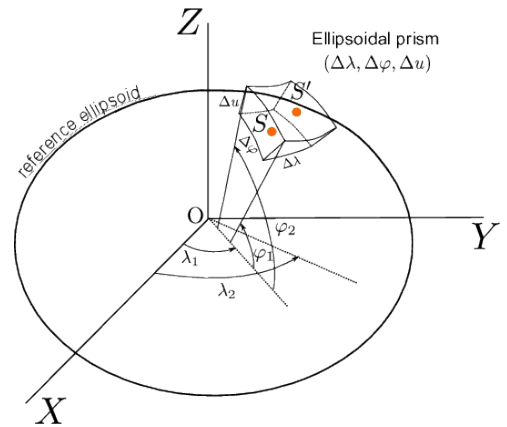


FIGURE 7.19 – Définition d'un prisme ellipsoïdal.

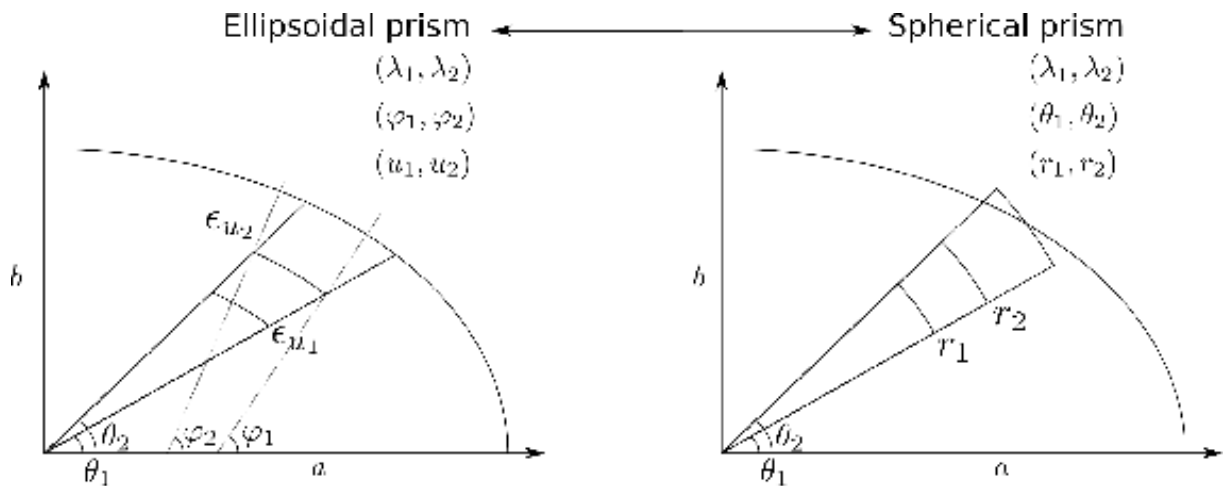


FIGURE 7.20 – Définition du prisme ellipsoïdal et du prisme sphérique à partir des pavés $[\lambda_1, \lambda_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [u_1, u_2]$ et $[\lambda_1, \lambda_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2]$ respectivement. D'après Roussel et al., 2015 (acl1).

Cet élément de matière peut ensuite être défini de deux façons selon la nature du prisme utilisé pour décrire son volume. En tant que prisme ellipsoïdal, il est formé de l'ensemble des points dont les coordonnées ellipsoïdales appartiennent au pavé $[\lambda_1, \lambda_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [u_1, u_2]$, avec :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} & \lambda_2 = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \\ \varphi_1 = \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2} & \varphi_2 = \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}, \\ u_1 = \sqrt{\frac{X_S^2 + Y_S^2}{a^2} + \frac{Z_S^2}{b^2}} & u_2 = \sqrt{\frac{X_{S'}^2 + Y_{S'}^2}{a^2} + \frac{Z_{S'}^2}{b^2}}. \end{cases}$$

En tant que prisme sphérique, l'élément de matière considéré est formé de l'ensemble des points dont les coordonnées sphériques appartiennent au pavé $[\lambda_1, \lambda_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2]$, avec :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} & \lambda_2 = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}, \\ \theta_1 = \arctan\left((1 - e^2) \tan\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right) & \theta_2 = \arctan\left((1 - e^2) \tan\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right), \\ r_1 = \sqrt{X_S^2 + Y_S^2 + Z_S^2} & r_2 = \sqrt{X_{S'}^2 + Y_{S'}^2 + Z_{S'}^2}. \end{cases}$$

Les deux pavés ainsi définis n'ont pas le même volume. Si $\mathcal{V}_{\text{ell}}$ et $\mathcal{V}_{\text{sph}}$ désignent les volumes respectifs du prisme ellipsoïdal et du prisme sphérique, il vient par simple intégration sur les pavés correspondants :

$$\mathcal{V}_{\text{ell}} = \frac{1}{3} a^3 (1 - e^2) (\lambda_2 - \lambda_1) (u_2^3 - u_1^3) \left[\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \quad (7.31)$$

$$\mathcal{V}_{\text{ell}} = \frac{1}{3} a^3 (\lambda_2 - \lambda_1) (r_2^3 - r_1^3) (\sin \theta_2 - \sin \theta_1). \quad (7.32)$$

L'ajustement à réaliser pour opérer les intégrations à partir de prismes sphériques dans un volume ellipsoïdal, consiste à multiplier la densité ρ_S par le rapport $\mathcal{V}_{\text{ell}}/\mathcal{V}_{\text{sph}}$. Le résultat de cet ajustement sur l'erreur cumulée représentée sur la figure 7.14 (cf graphe (b), p. 336), s'avère tout à fait probant : l'épaisseur limite de la couche de matière terrestre à partir de laquelle l'erreur de calcul dépasse 1 mE passe de 230 km à 830 km. Par ailleurs, l'erreur de calcul atteint seulement 6 mE en considérant l'intégralité des couches du modèle PREM. Autrement dit, sous réserve d'effectuer cet ajustement de densité pour chaque prisme, il est possible d'effectuer les calculs d'effets gravitationnels à partir de prismes sphériques au moins pour la lithosphère avec moins d'un millieötvös d'erreur de calcul.

Afin de vérifier ce résultat sur des structures comportant des hétérogénéités latérales de densités, nous avons évalué les gradients de gravité produits par un modèle combinant le modèle de lithosphère « LITHO1.0 » (PASYANOS et al., 2014) et le modèle PREM (Figs. 7.21 et 7.22, pp. 347 et 348). Plus précisément, le modèle LITHO1.0 est formé de cellules de 1° par 1° constituées d'un empilement de couches de matière d'épaisseur variables, jusqu'à la profondeur maximale de 400 km. Dans le modèle combiné, chaque cellule est complétée au-delà de sa profondeur maximale par la distribution de densités du modèle PREM. L'avantage de cette combinaison est que l'anomalie de gravité du modèle combiné par rapport au

modèle PREM, s'obtient en calculant l'effet gravitationnel des contrastes de densité entre le modèle LITHO1.0 et le modèle PREM. L'examen des cartes des différences entre les quadratures à base de prismes ellipsoïdaux et de prismes sphériques ajustées (Fig. 7.23, p. 349), enregistrées sur une grille régulière à l'altitude du satellite GOCE, révèle que l'amplitude de ces dernières ne dépasse pas 1 mE pour tous les éléments du tenseur de Marussi. Cette étude a révélé l'influence considérable de la forme de l'élément de masse sur le calcul direct des effets gravitationnels d'une Terre ellipsoïdale par une intégration numérique. C'est justement en développant la méthode d'intégration pour le prisme ellipsoïdal que les insuffisances du prisme sphérique ont pu être mises en évidence, ce qui constitue la percée importante permise par les travaux de Roussel et al., 2015 (acl1).

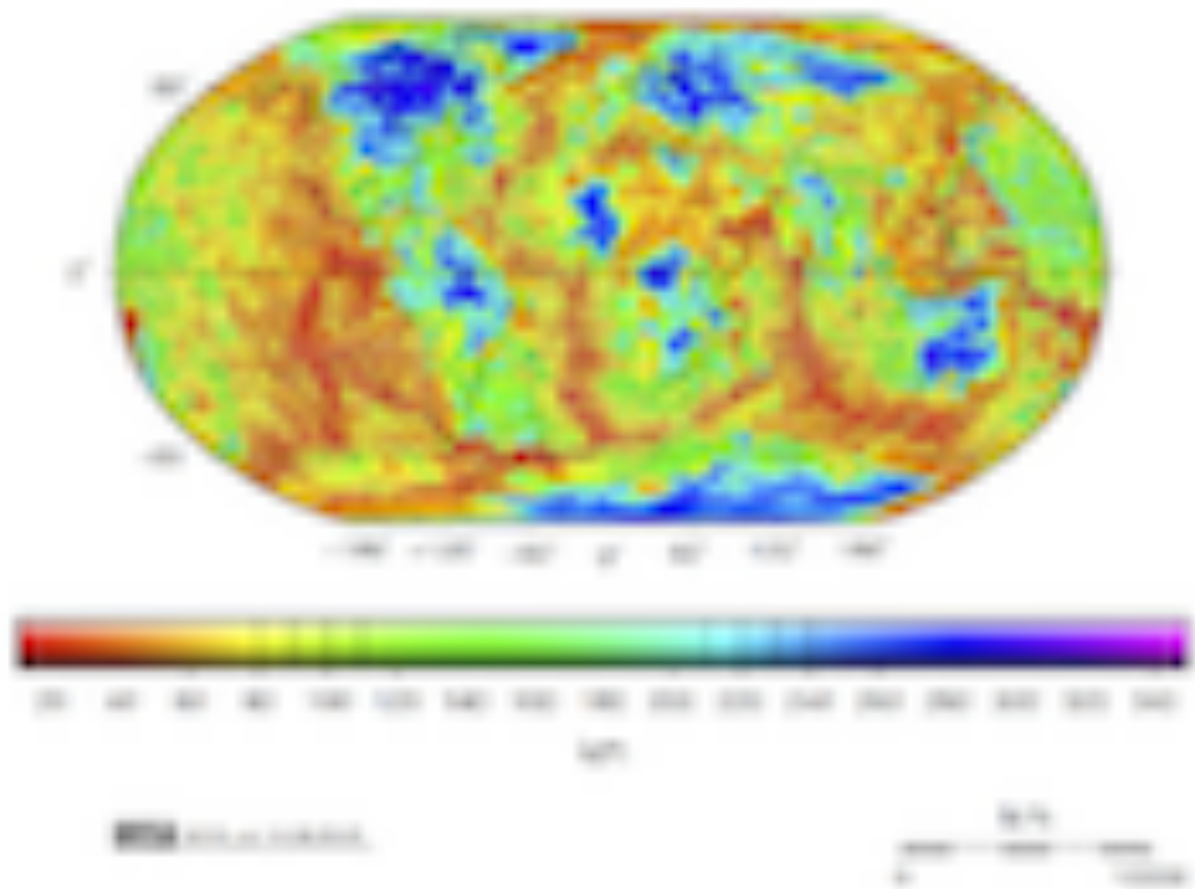


FIGURE 7.21 – Profondeur du modèle géophysique « LITHO1.0 » (PASYANOS et al., 2014). Ce modèle est composée de dix couches successives : (1) glaces, (2) mers, (3) sédiments superficiels, (4) sédiments intermédiaires, (5) sédiments profonds, (6) croûte supérieure, (7) croûte intermédiaire, (8) croûte inférieure, (9) manteau lithosphérique, (10) asthénosphère.

D'après Venturi, 2016 (M2[1]).

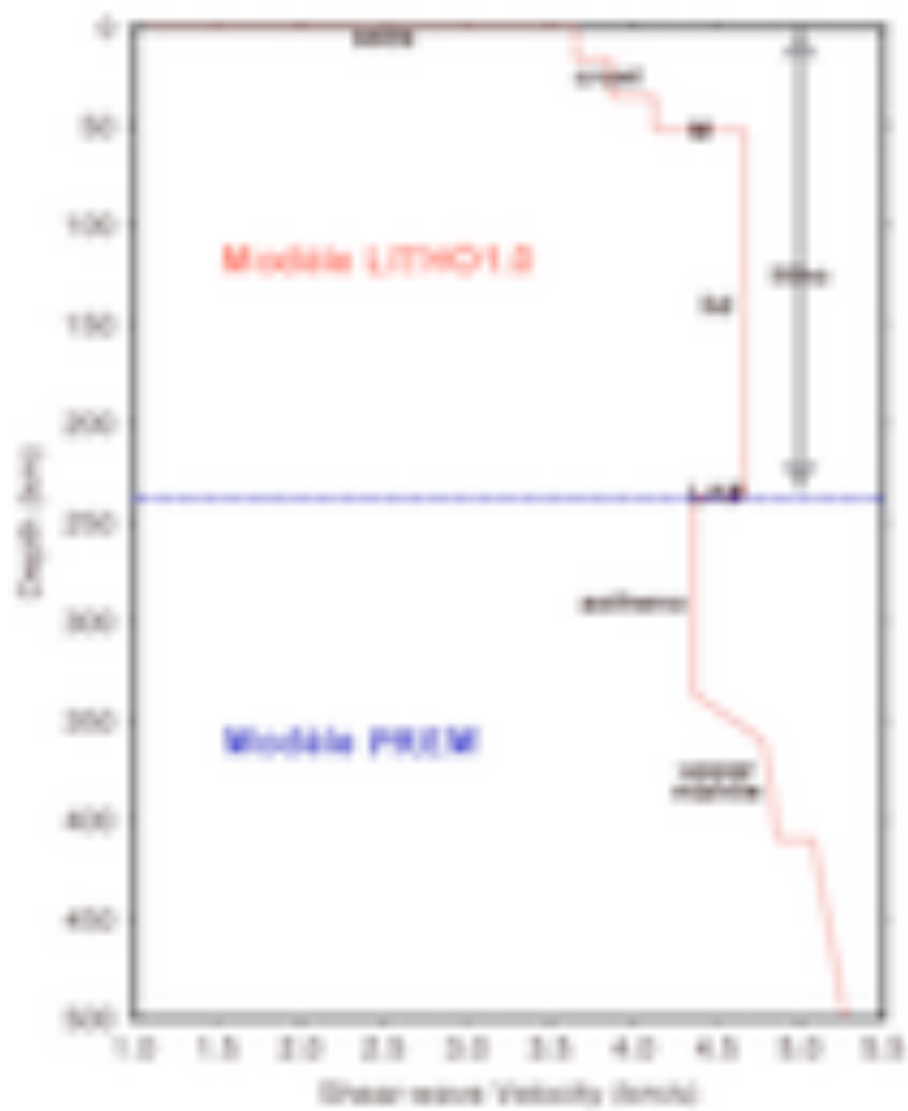


FIGURE 7.22 – Variation de la vitesse des ondes S en fonction de la profondeur d'après le modèle combiné, formé de la réunion des modèles LITHO1.0 et PREM.
D'après PASYANOS *et al.* (2014).

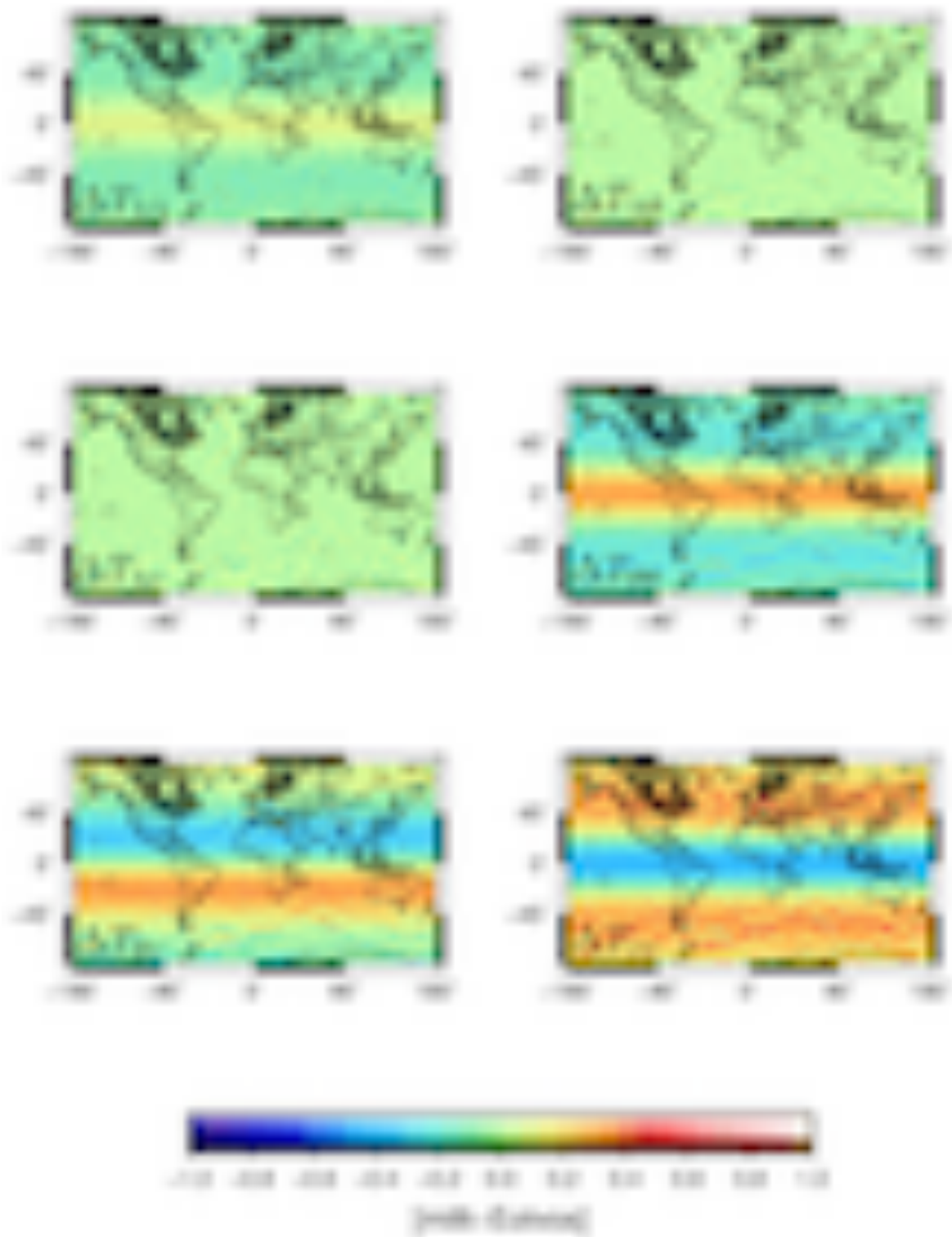


FIGURE 7.23 – Cartes des écarts $\Delta T_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = \lambda, \theta, r$ entre les déterminations des gradients de gravité produits par le modèle combiné, obtenues à partir de prismes ellipsoïdaux et de prismes sphériques ajustés respectivement.

D'après Roussel et al., 2015 (acl1).

7.3 Projets de recherche

7.3.1 Assimilation des mesures gravimétriques satellitaires

Le développement de méthodes de calcul direct du champ gravitationnel d'un corps arbitraire, constitue une étape indispensable vers la formulation de problèmes inverses. Pour illustrer plus concrètement cette affirmation, prenons l'exemple de la détermination des gradients de la gravité terrestre. Le calcul direct de l'élément T_{ij} du tenseur de Marussi au point P repose sur une formule intégrale de la forme :

$$T_{ij}(\mathbf{x}_P) = \int_{\text{Terre}} \left[\nabla_P \left(\nabla_P \left(\frac{G \rho(\mathbf{x}_S)}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_S\|} \right) \right) \right]_{ij} d^3 \mathbf{x}_S.$$

Le calcul direct de cette intégrale s'appuie sur une modélisation de la distribution de densité de la Terre. En supposant cette dernière décomposée en N prismes ellipsoïdaux $\mathcal{P}_e^k$, de densité ρ_k ($k = 1, 2, \dots, N$), une valeur approchée $\bar{T}_{ij}$ de l'élément T_{ij} s'obtient par la formule sommatoire suivante :

$$\bar{T}_{ij}(\mathbf{x}_P) = \sum_{k=1}^N \rho_k I_k(\mathbf{x}_P),$$

où $I_k(\mathbf{x}_P)$ est une intégrale étendue sur le prisme $\mathcal{P}_e^k$ qui s'exprime, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, par :

$$I_k(\mathbf{x}_P) = \int_{\mathcal{P}_e^k} \left[\nabla_P \left(\nabla_P \left(\frac{G}{\|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_S\|} \right) \right) \right]_{ij} d^3 \mathbf{x}_S.$$

Les intégrales I_k peuvent être calculées par la quadrature de Gauss-Legendre présentée précédemment, pour un point P donné et une distribution des prismes $\mathcal{P}_e^k$ fixée. À partir de mesures $\hat{T}_{ij}^{q(s)}(\mathbf{x}_{P_s})$ des gradients de gravité sur un ensemble de S points P_s , éventuellement renouvelés $q(s)$ fois, il est possible de formuler un problème inverse pour l'estimation des densités par les relations :

$$\hat{T}_{ij}^{q(s)}(\mathbf{x}_{P_s}) = \sum_{k=1}^N \rho_k I_k(\mathbf{x}_{P_s}) + v_s^{q(s)}, \quad s = 1, 2, \dots, S, \quad (7.33)$$

où $v_s^{q(s)}$ est le résidu associé à la $q(s)$ ème mesure réalisée au point P_s .

Pourvu qu'une redondance suffisante des mesures soit vérifiée par l'inégalité : $\sum_{s=1}^S q(s) > N$, et au prix de l'application inévitable de méthode de régularisation, l'estimation de la distribution de densité ρ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ est pleinement envisageable. D'un point de vue pratique, il serait certainement plus pertinent d'utiliser dans les relations 7.33, non pas les mesures directes des gradients de gravité $\hat{T}_{ij}^{q(s)}(\mathbf{x}_{P_s})$, mais plutôt leurs anomalies $\Delta \hat{T}_{ij}^{q(s)}(\mathbf{x}_{P_s})$ par rapport à un modèle géophysique a priori. Il faudrait alors remplacer dans les relations 7.33, les densités ρ_k par les différences $\Delta \rho_k$ entre les densités recherchées et celles issues du modèle de référence.

Une version plus sophistiquée de l'inversion présentée jusqu'à présent, inclurait en plus une estimation des limites haute et basse des prismes $\mathcal{P}_k$. Ces limites sont fixées très précisément par les deux facteurs d'échelle u_1^k et u_2^k qui définissent les deux ellipsoïdes homothétiques entre lesquels le prisme P_k est compris. Le problème inverse deviendrait alors complètement non linéaire et sa régularisation passerait très vraisemblablement par une inversion couplée de données sismologiques et gravimétriques. Bien que plus difficile dans la

mise en œuvre, cette inversion doit demeurer idéalement un objectif ultime dans la mesure où elle réalise une véritable assimilation de données. À l'instar de ce qui est pratiqué pour les modèles météorologiques, océanographique et, plus récemment, pour les modèles du champ géomagnétique (FOURNIER et al., 2010), la possibilité de disposer d'un modèle des densités de la Terre, continuellement alimenté par des données issues de la sismologie et de la gravimétrie terrestre et spatiale, me paraît capitale. L'assimilation continue de données dans un modèle, reste un moyen très efficace pour délivrer aux utilisateurs une synthèse la plus pertinente de toutes les données acquises à une date donnée. Les équations de base de la gravimétrie et de la sismologie étant déjà établies, il s'agirait plutôt dans cette recherche de définir, entre autres, les données à assimiler et le processus d'assimilation à partir de l'expérience et l'expertise des météorologues et océanographes, ainsi que des géophysiciens qui ont abordé ce problème pour étudier la dynamique du noyau externe.

7.3.2 Affinement des modèles géophysiques globaux

Si l'assimilation conjointe de données sismologiques et gravimétriques dans un modèle commun constitue un objectif de recherche à moyen terme, l'estimation de contrastes de densité selon la méthodologie présentée dans la section 7.3.1 (p. 350) reste plus accessible de par la disponibilité de nombreux modèles géophysiques a priori. L'usage veut que les données de gravimétrie spatiale soient très vite valorisées par leur intégration dans de nouveaux modèles de géopotential. C'est le cas notamment des données du couple de satellites GRACE et du satellite GOCE comme en témoigne le tableau 5.1 (cf Chap. 5.1, p. 130). Certes les modèles de géopotential permettent de déterminer toutes les grandeurs gravimétriques, qui constituent alors des « mesures » dans les problèmes d'inversion. L'utilisation directe des mesures satellitaires ne serait-ce qu'en vue de l'affinement des modèles géophysiques globaux, se rencontre moins fréquemment, malgré les efforts consentis pour la mise à disposition des données pour les utilisateurs.

Aussi, mon objectif à court terme est de poursuivre l'exploitation des données du satellite GOCE en vue de proposer, dans un premier temps, un ajustement des distributions de densité proposées dans les modèles géophysiques globaux. Un point fondamental pour poursuivre ces recherches vient de ce que le logiciel de calcul de champs gravitationnels développés dans les travaux de Roussel et al., 2015 (acl1), permet de calculer les gradients de gravité dans le même repère que celui des données de niveau 2 du satellite GOCE (EGG-C, 2014). Bien que l'élaboration des données de niveau 2 nécessite l'utilisation préalable de modèles de géopotential existants, ces données demeurent, dans une large mesure, indépendantes des modèles géophysiques d'origine essentiellement sismologique. La comparaison des gradients de gravité de niveau 2 avec ceux déduits de calculs numériques d'intégration à partir de modèles globaux, s'avère donc tout à fait séyante. S'il s'agit effectivement de procéder à un ajustement des distributions de densité issues des modèles, encore faut-il s'assurer de la concordance des gradients de gravité mesurés et calculés (Figs. 7.24 et 7.25, pp. 352 et 353).

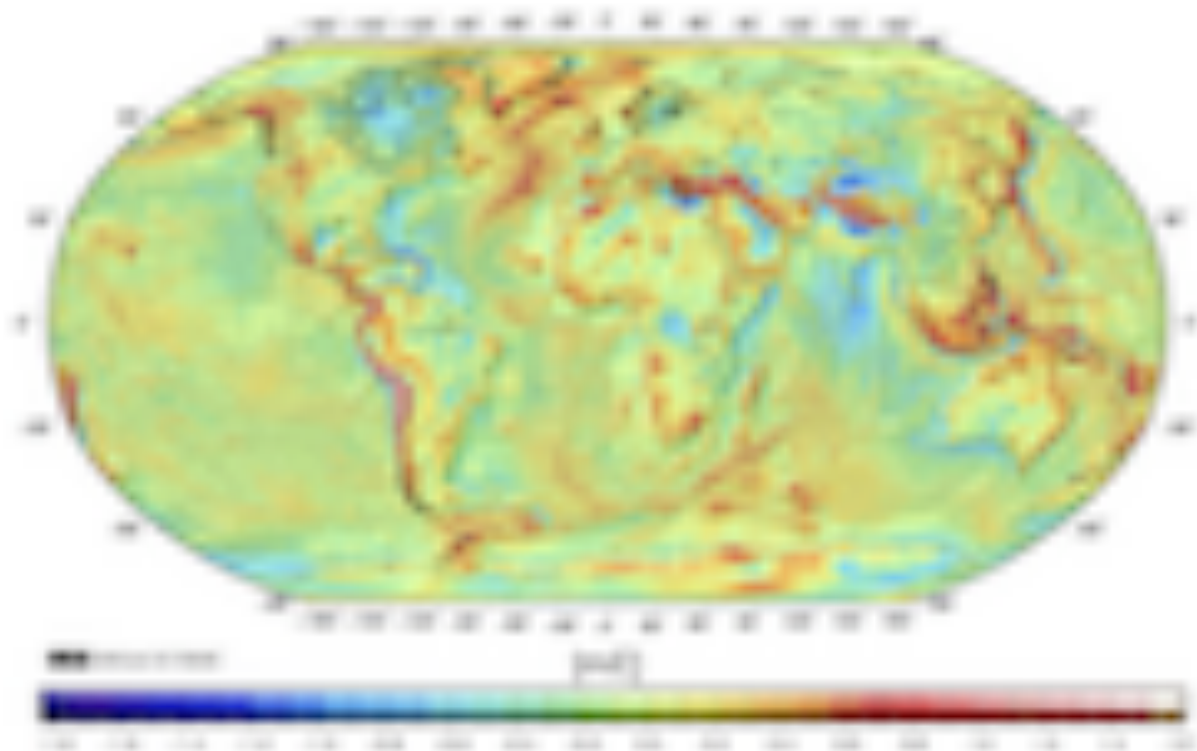


FIGURE 7.24 – Anomalies du gradient de gravité vertical V_{rr} par rapport au gradient normal World Geodetic System 1984 (WGS84), mesuré par le satellite GOCE sur une grille régulière au pas de $0,2^\circ$ par $0,2^\circ$, sur un ellipsoïde homothétique de l'ellipsoïde équipotentiel de WGS84 dont la hauteur à l'équateur atteint 255 km. Les

D'après BOUMAN et al. (2016).

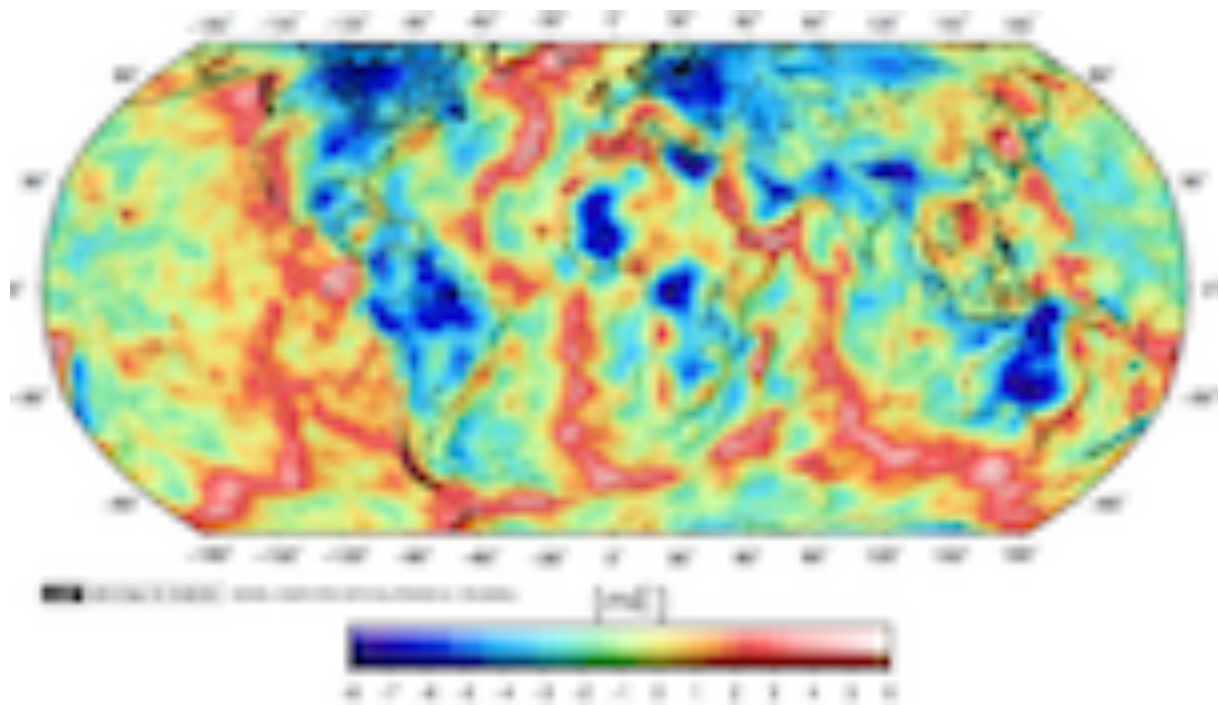


FIGURE 7.25 – Anomalies du gradient de gravité vertical V_{rr} calculé numériquement à partir du modèle combiné (cf Fig. 7.22, p. 348) par rapport au même gradient produit par le modèle PREM, mesuré sur une grille régulière au pas de 1° par 1° , sur une sphère dont la hauteur à l'équateur atteint 255 km. Bien que cette anomalie obtenue sur une sphère, ne puisse pas être directement comparée à celle de la figure 7.24 (p. 352), obtenue sur un ellipsoïde, une étonnante « amplification » de l'amplitude et l'étendue des anomalies apparaît très clairement. La nécessité d'opérer avec un modèle géophysique à l'équilibre hydrostatique est l'une des causes supposées de cette amplification.

D'après Verdun et al., 2014 (com4).

Pour l'heure, les premiers travaux ont confirmé la nécessité d'utiliser des modèles respectant l'équilibre hydrostatique et décrivant les hétérogénéités de densité jusqu'à la base de la lithosphère pour espérer parvenir à cette concordance (Fig. 7.26, p. 354). Il reste donc à produire un modèle a priori combiné, ou « modèle 0 » détaillant la lithosphère et dans lequel les couches successives au-delà de la lithosphère soient à l'équilibre hydrostatique. Ce travail est d'autant plus primordial aujourd'hui de par la disponibilité de l'intégralité des données redondantes du satellite GOCE, y compris les gradients de gravité. Ce faisant, une grille mondiale des gradients de gravité statiques au pas de $0,2^\circ$, baptisée « GGG », qui combine le modèle de géopotential satellitaire GOCO03s (cf Tab. 5.1, p. 130) et toutes les données GOCE acquises sur la période 2010-2013, vient d'être publiée par le consortium GOCE (BOUMAN et al., 2016). Cette grille dont la résolution spatiale est de 80 km, se situe sur un ellipsoïde homothétique de l'ellipsoïde équipotentiel du système de référence WGS84 (NIMA, 2000), dont la hauteur à l'équateur atteint 255 km. En tant que synthèse intégrée de l'essentiel des données GOCE à la hauteur d'acquisition, cette grille constitue l'ingrédient de choix pour l'affinement de modèles géophysiques envisagés ici.

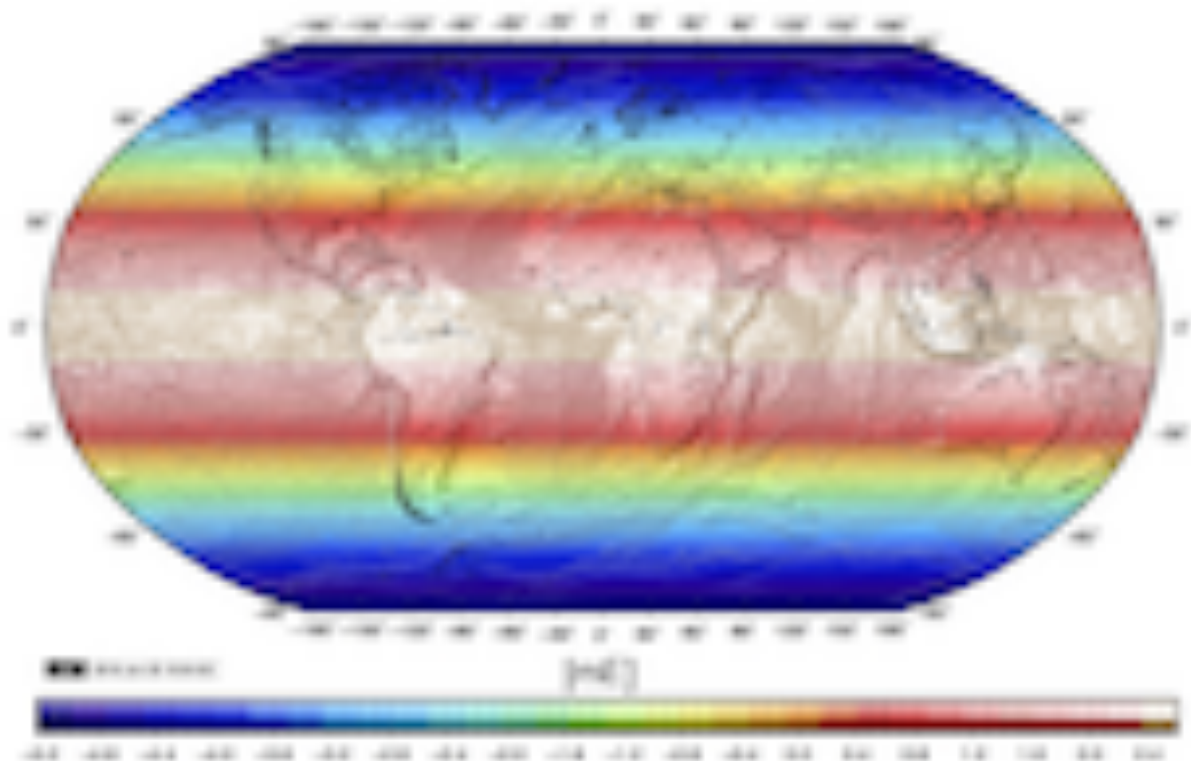


FIGURE 7.26 – Différences entre les valeurs du gradient de gravité V_{rr} calculées à partir du modèle PREM à l'équilibre hydrostatique (couches ellipsoïdales d'aplatissement variable selon le graphe 7.14, p. 336) et du même modèle non équilibré (couches ellipsoïdales homothétiques). Ces valeurs ont été calculées sur la surface d'un ellipsoïde homothétique de GRS 80 dont la hauteur atteint 255 km à l'équateur. Les différences sont maximales dans les régions polaires et minimales à l'équateur tout en conservant une symétrie de révolution. Leurs amplitudes sont tout à fait significatives étant donné la sensibilité du gradiomètre embarqué dans le satellite GOCE.

D'après Venturi, 2016 (M2[1]).

7.3.3 Investigation des échelles régionales

En plus de l'échelle globale des modèles géophysiques, les données du satellite GOCE peuvent être utilisées à l'échelle régionale pour étudier des structures d'étendue plus limitée de la lithosphère. Ce type d'étude va être abordé dans le cadre du projet « OUEST AFAR » (proj3) qui se propose d'analyser la déformation de l'escarpement ouest de la dépression de l'Afar en Afrique de l'est, grâce à la géodésie spatiale (GNSS et gravimétrie) et l'imagerie par interférométrie Synthetic Aperture Radar (SAR). Dans cette région (Fig. 7.27, p. 356), l'essentiel de la déformation due au mouvement divergent des plaques tectoniques Nubie, Arabie et Somalie, se localise le long de segments de rifts marqués par l'activité tectonique et volcanique du centre de l'Afar (WRIGHT et al., 2006). Ces segments d'accrétion océaniques ont été largement étudiés par géodésie spatiale pour comprendre notamment les processus mécaniques de leur formation (DÉPREZ et al., 2013, GRANDIN et al., 2009). En revanche, le rôle des escarpements ouest et sud Afar dans l'accommodation des mouvements relatifs des plaques Nubie, Somalie et Arabie demeure mal compris. Ces escarpements s'apparentent à des marges volcaniques étirées, habituellement rencontrées en domaine marin. Les mécanismes de localisation de la rupture continentale dans ce type de marge font encore débat (EBINGER et CASEY, 2001). Il est donc primordial de comprendre comment s'organise la déformation depuis les hauts plateaux qui bordent la dépression, considérés comme stables, jusqu'aux zones d'accrétion, pour décrire l'histoire de la formation récente du rift continental, et identifier les processus à l'origine de l'extension et l'amincissement de la lithosphère.

L'apport attendu de la gravimétrie spatiale dans cette région, consiste en la caractérisation de la structure profonde de l'Afar et, plus largement, du rift est-africain (East African Rift System). Le lien qui existe entre la structure profonde et les formations de surface, notamment les segments de rifts et les marges, constitue vraisemblablement l'une des clés pour la compréhension des phénomènes géodynamiques dans cette région. La démarche que nous comptons adopter consiste à calculer numériquement aux points de la grille GGG sur la région de l'Afar (Fig. 7.28, p. 357), le tenseur des gradients de gravité à partir de modèles géophysiques de plus en plus raffinés, qui respectent l'équilibre hydrostatique. Dans une première approche, l'utilisation de modèles de Terre éprouvés tels 3SMAC (NATAF et RICARD, 1996) ou la combinaison de PREM et du modèle de lithosphère récent LITHO1.0 (PASYNOS et al., 2014), devrait permettre d'estimer la part du signal haute fréquence de la grille GGG attribuable à la lithosphère, et d'identifier les effets gravitationnels non rendus par les modèles. Puis les anomalies des gradients de gravité de la grille GGG par rapport à l'effet gravitationnel déduits des modèles de Terre, pourront être comparées à l'effet direct produit par des modèles tomographiques du manteau tel S40RTS (RITSEMA et al., 2011), pour s'assurer de la qualité et la cohérence des gradients de la grille GGG dans les régions bien contraintes par les modèles. Une telle comparaison sera ensuite affinée sur la région de l'Afar par l'utilisation de modèles tomographiques régionaux pour préciser le contenu spectral du signal de la grille GGG dans le domaine des moyennes et basses fréquences. Les anomalies des gradients de gravité rapportées au modèle combiné régional le plus raffiné, représenteront alors, au bruit près, les structures non au mal décrites par le modèle.

Une fois ce travail réalisé, une étude spécifique de la région de l'Afar sera menée pour déterminer une nouvelle distribution de densités compatibles avec les observations des gradients de gravité. Pour ce, une méthode d'inversion couplant les données de la grille GGG à des données sismologiques sera mise en œuvre. La production d'un modèle géologique régional de l'Afar enrichi par les informations apportées par les gradients de gravité pourra être entreprise. Ce dernier modèle constituera la contribution de la gravimétrie satellitaire à

l'étude géodynamique de la région de l'Afar.



FIGURE 7.27 – Vue d'ensemble des plaques tectoniques Nubie, Somalie et Arabie, ainsi que des principaux rifts. Les stations GNSS disponibles figurent également sur cette carte. Les mouvements horizontaux, mesurés par rapport à la plaque Nubie, sont représentés par des vecteurs indiquant la direction, le sens et l'amplitude du déplacement. Ces derniers confirment très clairement la dérive de la plaque Somalie à l'est et au sud-est de la plaque Nubie.

D'après DÉPREZ et al. (2013).

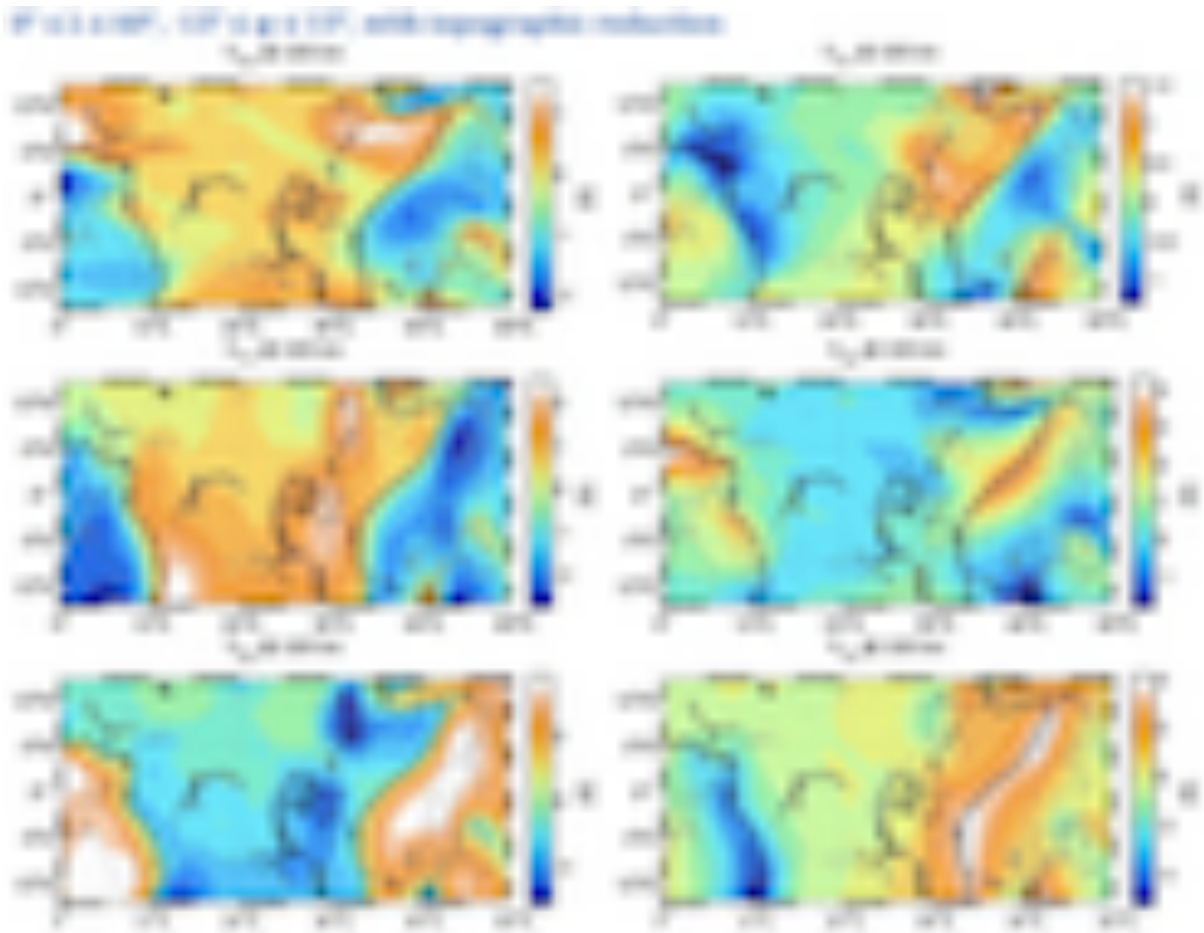


FIGURE 7.28 – Anomalies du gradient de gravité vertical V_{rr} par rapport au gradient normal WGS84, obtenues par une combinaison des données des missions GOCEGRACE sur l'Afar. La grille de calcul est régulière au pas de $0,2^\circ$ par $0,2^\circ$, sur un ellipsoïde homothétique de l'ellipsoïde équipotentiel de WGS84 dont la hauteur à l'équateur atteint 255 km.

D'après BOUMAN *et al.* (2016).

Épilogue

AU sortir de ce tour d'horizon de la gravimétrie mobile moderne, il est réjouissant d'observer la remarquable vitalité des recherches actuelles dans cette discipline, et d'envisager les nombreuses voies d'évolution dans des domaines aussi divers que l'instrumentation, le traitement des données gravimétriques et leur assimilation dans les modèles géophysiques de notre planète. Le défi de la gravimétrie mobile rapprochée a été relevé par la communauté scientifique française, et les résultats très prometteurs obtenus avec les systèmes « Limog » et « GRAVIMOB », encouragent à maintenir les efforts. Les prototypes actuels de gravimètres mobiles légers présentent encore des limitations de par la trop faible sensibilité des capteurs d'accélération, inadéquate pour détecter des sources à faible signature gravitationnelle, telles celles rencontrées dans les milieux sous-marins, côtiers et fluviaux. Fort heureusement, les derniers verrous de la miniaturisation de capteurs d'accélération ultrasensibles vont vraisemblablement pouvoir être levés, en raison des efforts consentis dans les technologies à base de fontaines atomiques ou de capteurs électrostatiques issus de la micro-électronique. Sans doute, les systèmes inertiels de positionnement et d'orientation profiteront également des améliorations apportées aux capteurs d'accélération, en fournissant des mesures de meilleure qualité. Comme nous avons pu le voir, la réduction des incertitudes sur les données de position et d'orientation du porteur permet une meilleure restitution du champ de gravité mesuré par gravimétrie mobile. Encore faut-il s'assurer d'utiliser la bonne méthodologie de traitement des données, voire de l'améliorer, ce qui est aujourd'hui possible grâce à l'expérience précieuse acquise dans levers de gravimétrie mobile présentés dans ce mémoire.

La gravimétrie spatiale a démontré sa redoutable efficacité pour la détermination du champ de gravité à l'échelle globale ($> 1\,000\text{ km}$) et ses possibilités d'investigation des structures d'échelle régionale ($> 100\text{ km}$), pour peu que les mesures soient répétées dans le temps. Dans ce contexte, la gravimétrie mobile rapprochée apparaît comme la technique indispensable pour acquérir des mesures de la gravité à l'échelle locale ($< 100\text{ km}$), affiner les mesures à l'échelle régionale, et compléter notre connaissance de la gravité en domaine sous-marin. L'acquisition de mesures de la gravité terrestre à toutes les échelles spatiales constitue l'étape préalable à leur assimilation dans les modèles géophysiques de la Terre. Cette opération nécessite de disposer des équations fondamentales permettant de calculer le champ de gravité à partir d'une modélisation mathématique des sources gravitationnelles. C'est la raison pour laquelle une attention toute particulière doit être apportée à l'établissement de ces équations selon les représentations fonctionnelles recherchées et le niveau de détail dans la modélisation des sources qui impacte directement l'échelle spatiale du champ de gravité calculé. L'affinement des méthodes contemporaines de calcul de champs et la recherche de méthodes innovantes adaptées aux échelles locales, doivent être poursuivis dans la perspective d'assimilation des données gravimétriques actuelles, et en prévision de l'afflux massif de données qui pourraient venir de la gravimétrie mobile rapprochée.

Aujourd'hui, il n'est pas déraisonnable de penser que la gravimétrie mobile rapprochée du 21^e siècle, s'étendra toutes les planètes telluriques du Système Solaire et à tous les corps massifs dotés d'une surface solide. L'embarquement d'un gravimètre mobile léger dans les robots d'exploration, tel le robot martien « Curiosity », complèterait le panel d'instruments de levés qui équipe déjà ces derniers, en vue d'acquérir des mesures du champ de gravité à haute résolution spatiale. La transposition des méthodes d'investigation de la géophysique à la physique planétaire n'en serait que plus directe étant donné les natures semblables des mesures acquises. La gravimétrie rapprochée sur les planètes telluriques permettra très certainement des avancées considérables en planétologie comparée, discipline clé de la compréhension du fonctionnement et de l'évolution de notre propre planète. Mars pourrait bien être la première du Système Solaire dont la gravité soit mesurée depuis un véhicule d'exploration parcourant sa surface. Il faut donc se tenir prêt à fournir le gravimètre mobile qui pourra être embarqué sur les futures missions d'exploration, voire sur la première mission habitée très attendue.

Troisième partie

Revue des activités et publications

Liste des publications et colloques

CODIFICATION DE L'HCERES DES PUBLICATIONS ET PRODUCTIONS

- ACL** Articles dans des revues internationales ou nationales, avec comité de lecture, répertoriées par l'HCERES ou dans des bases de données internationales (ISI Web of Knowledge, Pub Med, etc).
- ACLN** Articles dans des revues, avec comité de lecture, non répertoriées dans des bases de données internationales.
- ASCL** Articles dans des revues sans comité de lecture.
- INV** Conférences données à l'invitation du Comité d'organisation dans un congrès national ou international.
- ACTI** Communications avec actes dans un congrès international.
La mention « peer-reviewed » signale des actes à comité de lecture comprenant au moins deux relecteurs.
- ACTN** Communications avec actes dans un congrès national.
- COM** Communications orales sans actes dans un congrès international ou national.
- AFF** Communications par affiche dans un congrès international ou national.
- DO** Directions d'ouvrages ou de revues.
- AP** Autres productions : bases de données, logiciels enregistrés, traductions, comptes rendus d'ouvrages, rapports de fouilles, guides techniques, catalogues d'exposition, rapports intermédiaires de grands projets internationaux, etc.

N.B. Toute publication tirée du travail d'un étudiant que j'ai encadré, est signalée par le soulignement du nom de l'étudiant en question.

NOMS DES REVUES ET ABRÉVIATIONS

Dans la liste ci-après, le mot-clé « JCR » est suivi par la valeur du facteur d'impact de la revue le plus récent, et donnée par le *Journal of Citation Research*®.

<i>Bollettino di Geophysica Teorica ed Applicata</i>	B. Geofis. Teor. Appl.	JCR 0,778
<i>Comptes rendus Géoscience</i>	C.R. Geosci.	JCR 1,610
<i>Géomorphologie : Relief, Processus, Environnement</i>	Géomorph. Rel., Pro., Env.	JCR 0,673
<i>Geophysical Journal International</i>	Geophys. J. Int.	JCR 2,484
<i>Geophysical Prospecting</i>	Geophys. Prospect.	JCR 1,835
<i>Geophysics</i>	Geophysics	JCR 2,017
<i>Journal of Geodesy</i>	J. Geodesy	JCR 2,486
<i>Measurement</i>	Measurement	JCR 1,742
<i>Swiss Journal of Geosciences</i>	Swiss J. Geosci.	JCR 1,660

2017

1. Mambou U., **Verdun J.**, Cali, J. & A. Brouste, « *Statistical calibration of Kalman filters used for the processing of time-varying, positioning data acquired by an automatic tacheometer* », Measurement, in prep., 2017 [ACL 1].
2. Roussel C., **Verdun J.**, Cali, J., Maia M., D'Eu J.-F., Bouhier M.-E. & P. Jaussaud, « *First tangible results of undersea gravity field measure achieved by an innovative light mobile gravimetric system called "GraviMob"* », Geophys. J. Int, in prep., 2017 [ACL 2].

2016

3. Roussel C., **Verdun J.**, Cali J., Maia M. & J.-F. d'EU, « *La mission d'expérimentation du système de gravimétrie mobile sous-marine « GraviMob »* », Colloque du Groupement de recherche en Géodésie & Géophysique (G2), thématique : « Géodésie & Géophysique Marine », 14 - 16 novembre 2016, ENSTA-Bretagne, Brest, France, 2016 [COM 1].
4. Corbonnois J., Bonnefond M., Chardon V., Rodrigues S., Juge P., Cali J., **Verdun J.**, Simonetto E., Tchepko W., Labergerie E. & G. Fauchaux, « *Détermination des conditions de la dynamique fluviale d'une rivière aménagée de basse énergie à partir de secteurs du Loir (bassin de la Loire aval)* », Géomorph. Rel., Pro., Env., vol. 22 – n°4, 345 - 361, 2016 [ACL 3].

<http://geomorphologie.revues.org/11559>

5. Roussel C., **Verdun J.**, Cali J., Maia M. & J.-F. d'EU, « *Signal processing and calibration of a mobile underwater gravimetry and gradiometry system named GRAVIMOB* », Abstract presented at IAG Symposium on Terrestrial Gravimetry : Static and Mobile Measurements, Elektropribor, TG-SMM 2016, 12 - 15 April 2016, St Petersburg (RUS), 2016 [COM 2].

2015

6. Roussel C., **Verdun J.**, Cali, J. & F. Masson, « *Complete gravity field of an ellipsoidal prism by Gauss-Legendre quadrature* », Geophys. J. Int, 203(3), 2 220 - 2 236, doi:10.1093/gji/ggv438, 2015 [ACL 4].
7. Roussel C., **Verdun J.**, Cali J., Maia M., & J.-F. d'EU, « *Integration of a strapdown gravimeter system in an autonomous underwater vehicle* », in The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Volume XL-5/W5, 2015, Underwater 3D Recording and Modeling, 16 - 17 April 2015, Piano di Sorrento, Italy , p. 199 - 206, doi:0.5194/isprsarchives-XL-5-W5-199-2015, 2015 [ACTI 1, peer-reviewed].
8. Roussel C., **Verdun J.**, Cali J., Maia M. & J.-F. d'EU, « *Problématique du positionnement sous-marin pour la mesure dynamique du champ de pesanteur terrestre* », Colloque du G2, 17 - 19 novembre 2015, Toulouse, France, 2015 [COM 3].
9. Roussel C., **Verdun J.**, Cali J., Maia M. & J.-F. d'EU, « *Study of the restitution of submarine geological structures thanks to a new underwater moving gravimeter and gradiometer sensor* », Abstract #IUGG-2214 presented at 26th IUGG General Assembly, session G2 : static gravity field models and observations, June 22 - July 2 2015, Prague, Czech Republic, 2015 [COM 4].
10. Bonnefond M., Corbonnois J., Chardon V., Rodrigues S., Cali, J., **Verdun J.**, Simonetto E., Tchekpo W., Labergerie E. & P. Juge, « *Measures of river erosion in a low-energy river (le Loir, Maine basin - France)* », Colloque ISRivers, Lyon, France, 2015 [AFF 1].

2014

11. Roussel C., **Verdun J.** & J. Cali, « *Modélisation numérique du champ de gravité produit par une structure géologique arbitraire* », Revue XYZ, 139(2), 27 - 35, 2014; article récompensé par le 1^{er} prix de l'Association Française de Topographie (AFT) décerné aux travaux de fin d'études [ACLN 1].
12. **Verdun J.**, Roussel C., Cali J. & F. Masson, « *Comparison of gravitational effects of Earth's lithosphere calculated from GOCE satellite gravity data and LITHO1.0 global geophysical model* », Abstract G23C-02 presented at 2014 Fall Meeting, AGU, San Francisco, Calif., 15-19 Dec., 2014 [COM 5].
13. **Verdun J.**, Roussel C., Cali J. & F. Masson, « *Comparaison des effets gravitationnels globaux obtenus respectivement à partir du modèle LITHO1.0 et des mesures du satellite gravimétrique GOCE* », Colloque du G2, 17 - 19 novembre 2014, Strasbourg, France, 2014 [COM 6].

14. Roussel C., **Verdun J.**, Cali J., Maia M. & J.-F. d'EU, « *Un nouveau système mobile de gravimétrie-gradiométrie pour le domaine sous-marin* », Colloque du G2, 17 - 19 novembre 2014, Strasbourg, France, 2014 [COM 7].
15. Roussel C., **Verdun J.**, Cali J. & F. Masson, « *Accurate numerical calculation of the gravitational field of the Earth from global geological model* », 5th International GOCE User Workshop, 25 - 28 November 2014, UNESCO, Paris, France, 2014 [AFF 2].

2013

16. **Verdun J.**, « *Filtrage de Kalman en gravimétrie mobile* », Workshop sur le filtrage de l'université du Maine, Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société (AMIES), 5 décembre 2013, Le Mans, France, 2013 [INV 1].
17. **Verdun J.**, Damenet N. & J. Cali, « *Moving-base vector gravimetry data processing based on optimal, physically sensible evolution models* », in Proceedings of International Symposium, Terrestrial Gravimetry : Static and Mobile Measurements, Elektropribor – International Association of Geodesy, TG-SMM 2013, p. 41 - 47, St Petersburg (RUS), 2013. [ACTI 2, peer-reviewed].
18. Roussel C., **Verdun J.**, Cali J., « *Calcul numérique du champ gravitationnel de la Terre à partir de modèles géologiques globaux* », Colloque du G2, 13 - 15 novembre 2013, Rennes, France, 2013 [COM 8].
19. Bonnefond M., Corbonnois J., Cali J., **Verdun J.**, Labergerie E. & Tchekpo W, « *Mesures des phénomènes d'érosion des berges par scanner Laser 3D dans les rivières de faible énergie : premiers résultats obtenus sur l'Huisne en amont de Connerré (72)* », Colloque Walphy, 15, 16 & 17 octobre 2013, Namur, Belgique, 2013 [AFF 3].

2012

20. Bonnefond M., Cali J., Corbonnois J., Labergerie E., Tchekpo W. & **Verdun J.**, « *Morphodynamique des cours d'eau de faible énergie du bassin de la Maine : développement d'une méthode d'analyse* », Colloque « Territoire et environnement : des représentations à l'action », 8 et 9 décembre 2012, Tours, France, 2012 [AFF 4].

2011

21. Qi Li, De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Cali J. & M. Diament, « *Estimation de la pesanteur terrestre par gravimétrie mobile* », Bulletin d'Information Scientifique et Technique de l'IGN, 77, p. 86 - 88, 2011 [ASCL 1].

2010

22. Qi Li, De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Cali J. & M. Diament, « *Vector moving gravimetry processing using implicit least squares* », in Proceedings of International Symposium, Terrestrial Gravimetry : Static and Mobile Measurements, Elektropribor – International Association of Geodesy, TG-SMM 2010, p. 55 - 59, St Petersburg (RUS), 2010 [ACTI 3, peer-reviewed].
23. Jamet O., Tsoulis D., **Verdun J.** & N. Gonindard, « *Assessment of a numerical method for computing the spherical harmonic coefficients of the gravitational potential of a constant density polyhedron* », in Proceedings IAG International Symposium GGEO 2008, Chania, Crete, Greece, 23 - 27 June 2008, 135, 437 - 444, 2010 [ACTI 4, peer-reviewed].
24. Qi Li, **Verdun J.**, Cali J. & M. Diament, « *Estimation de la pesanteur terrestre par gravimétrie mobile et moindres carrés implicites* », 2^e colloque du G2, Topographie et déformations multi-échelles, reflets d'une Terre dynamique, 22 - 24 novembre 2010, Le Mans, France, 2010 [COM 9].
25. Cali J., De Saint-Jean B., **Verdun J.** & H. Duquenne « *Développement d'un système léger de gravimétrie mobile : LIMO-g* », 5^e colloque interdisciplinaire en instrumentation, C2I 2010, Le Mans, 26-27 janvier 2010, Revue I2M, Vol. 10/3-4-010, p. 59 - 79, 2010 [DO 1].

2009

26. Tsoulis D., Jamet O., **Verdun J.** & N. Gonindard, « *Recursive algorithms for the computation of the potential harmonic coefficients of a constant density polyhedron* », J. Geodesy, 83(10), 925 - 942, doi : 10.1007/s00190-009-0310-9, 2009 [ACL 5].
27. Qi Li, De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Cali J. & M. Diament, « *Estimation de la pesanteur terrestre par gravimétrie mobile – Tests de modèles d'évolution* », Colloque du G2, 18 - 20 novembre 2009, Strasbourg, France [COM 10].
28. Cali J., De Saint-Jean B., **Verdun J.** & H. Duquenne, « *Performance and test results of a light moving gravimetry system* », Aerogravimetry Workshop, 4 - 5 June 2009, Dresden, Germany, 2009 [COM 11].

2008

29. Duquenne H. & **J. Verdun**, « *Détermination du champ de pesanteur : le rôle de la gravimétrie mobile* », Bulletin d'Information Scientifique et Technique de l'IGN, 78, p. 1 - 11, 2008 [ASCL 2].
30. Tsoulis D., Gonindard N., Jamet O. & **J. Verdun**, « *A comparative study between analytical and numerical methods for computing the gravitational potential spherical harmonic coefficients of a constant density polyhedron* », Gravity, Geoid and Earth Observation, IAG meeting, 23 - 27 June 2008, Chania, Crete, Greece, 2008 [COM 12].

31. **Verdun J.**, De Saint-Jean B., Duquenne H. & J. Cali, « *Application of Kalman filtering to gravity field determination by moving gravimetry* », Gravity, Geoid and Earth Observation, IAG meeting, 23 - 27 June 2008, Chania, Crete, Greece, 2008 [AFF 5].
32. Jamet O. & **J. Verdun**, « *Génération d'une carte gravimétrique vraie* », document de proposition technique, Thalès Navigation, février 2008, 6 pp, 2008 [AP 1].

2007

33. Abassi M., Barriot J.-P. & **J. Verdun**, « *Airborne LaCoste and Romberg gravimetry : a space domain approach* », J. Geodesy, 81(4), 269 - 284, doi : 10.1007/s00190-006-0107-z, 2007 [ACL 6].
34. De Saint-Jean B., **Verdun J.** & H. Duquenne, « *Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile* », Bulletin d'Information Scientifique et Technique de l'IGN, 76, p. 1 - 5, 2007 [ASCL 3].
35. Cali J., De Saint-Jean B., **Verdun J.** & H. Duquenne, « *Kalman smoothing algorithm design for moving vector gravimetry using a low-cost integrated GPS/inertial system LIMOG* », in Proceedings of International Symposium, Terrestrial Gravimetry : Static and Mobile Measurements, Elektropribor – International Association of Geodesy, TG-SMM 2007, p. 54 - 59, St Petersburg (RUS), 2007 [ACTI 5, peer-reviewed].
36. De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Duquenne H., Cali J., & J.-P. Barriot, « *Kalman smoothing filter algorithm design for moving vector gravimetry : first results of field experiments using the LIMOG system* », Abstract GS002-2562 presented at XXIV^e IUGG General Assembly, Perugia, Italy, 2 - 13 July 2007 [COM 13].
37. **Verdun J.**, De Saint-Jean B., Cali J. & H. Duquenne, « *Estimation du champ de pesanteur terrestre par gravimétrie mobile et filtrage de Kalman* », Colloque G2, 21 - 23 novembre 2007, Grenoble, France, 2007 [COM 14].
38. Jamet O. & **J. Verdun**, « *Modèles d'erreur concernant les données gravimétriques et les capteurs associés* », document de proposition technique, Thalès Navigation, octobre 2007, 35 pp, 2007 [AP 2].
39. Jamet O. & **J. Verdun**, « *État de l'art sur les données de gravimétrie* », document de proposition technique, Thalès Navigation, octobre 2007, 32 pp., 2007 [AP 3].
40. Jamet O. & **J. Verdun**, « *Un algorithme pour le calcul du tenseur gradiométrique en mer* », document de proposition technique, Thalès Navigation, août 2007, 19 pp., 2007 [AP 4].

2006

41. De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Duquenne H., Cali J., Barriot J.-P., & D. Rouxel « *Test missions for mobile gravimetry* », IGFS 1st international symposium, 28 August - 1 September 2006, Istanbul, Turkey, 2006 [AFF 6].
42. De Saint-Jean B., Abbasi M., Barriot J.-P., **Verdun J.** & H. Duquenne « *A new medium-wavelength gravity map over the Alps based on airborne gravimetry data* », Geophysical Research Abstracts, Vol. 8, 02679, 2006, European Geosciences Union (EGU), 2 - 7 April 2006, Vienna, Austria, 2006 [AFF 7].
43. Abbasi M., Barriot J.-P., & **J. Verdun** « *A comparison between different methods for the determination of the vertical acceleration in mobile gravimetry* », Geophysical Research Abstracts, Vol. 8, 02698, 2006, EGU, 2 - 7 April 2006, Vienna, Austria, 2006 [AFF 8].

2005

44. **Verdun J.** & E. E. Klingelé, « *Airborne gravimetry using a strapped-down LaCoste and Romberg gravimeter : a feasibility study* », Geophys. Prospect., 53, 91 - 101, 2005 [ACL 7].
45. De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Duquenne H., Barriot J.-P. & J. Cali, « *Calibration of a 3-accelerometer inertial gravimetry system for moving gravimetry* », Newton's Bulletin, 3, 4 - 7, 2005 [ACLN 2].
46. De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Duquenne, H., Barriot J.-P., Melachroinos S. & J. Cali, « *Fine analysis of lever arm effects in moving gravimetry* », in Proceedings Dynamic Planet : Monitoring and Understanding a Dynamic Planet with Geodetic and Oceanographic Tools, International Association of Geodesy Symposium, 22 - 26 August 2005, Cairns, Australia, Paul Tregoning and Chris Rizos (Eds.), Springer, 130, 809 - 816, 2005 [ACTI 6, peer-reviewed].
47. Cali J., De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Duquenne H., Melachroinos S. & J.-P. Barriot « *A new strap-down system for moving gravimetry* », Eos Trans. AGU, 86(52), Fall Meet. Suppl., Abstract G21A-1256, 2005 [COM 15].
48. De Saint-Jean B., **Verdun J.**, Duquenne H., Barriot J.-P., Melachroinos S. & J. Cali « *Calibration of 3-accelerometer inertial gravimetry system for moving gravimetry* », IAG Symposium, Dynamic Planet : Monitoring and Understanding a Dynamic Planet with Geodetic and Oceanographic Tools, 22 - 26 August 2005, Cairns, Australia, 2005 [AFF 9].
49. De Saint-Jean B., Melachroinos S., **Verdun J.**, Duquenne H., Cali J. & J.-P. Barriot, « *Fine analysis of lever arm effects in moving gravimetry* », Geophysical Research Abstracts, Vol. 7, 02675, 2005, EGU, Vienna, Austria, 24 - 29 April 2005 [AFF 10].
50. Abbasi M., Barriot J.-P., **Verdun, J.** & H. Duquenne « *Airborne LaCoste & Romberg gravimetry : an alternative computational approach* », Geophysical Research Abstracts, Vol. 7, 00167, 2005, EGU, Vienna, Austria, 24 - 29 April 2005 [AFF 11].

2004

51. Varjabedian J. & **J. Verdun**, « *MAGMA : l'expédition de l'ENSG au Mont-Blanc* », Revue XYZ, 100(3), 75 - 78, 2004 [ACLN 3].

2003

52. **Verdun J.**, Klingelé E. E., Bayer R., Cocard M. & A. Geiger, « *The Alpine Swiss-French airborne gravity survey* », Geophys. J. Int., 152, 8 - 19, doi:10.1046/j.1365-246X.2003.01748.x, 2003 [ACL 8].
53. Klingelé E. E. & **J. Verdun**, « *A new interpretation of the Chasseral magnetic anomaly (Swiss Jura)* », Swiss J. Geosci. (ex. Eclogæ geol. Helv.), 96, 249 - 259, 2003 [ACL 9].
54. Cloetingh S., Ziegler P., Cornu T., Ustaszewski K., Schmid S., Dezes P., Hinsch R., Decker K., Lopes Cardozo G., Granet M., Bertrand G., Behrmann J., Michon L., Pagnier H., van Wees J. D., Rozsa S., Heck B., **Verdun J.**, Kahle H.-G., Fracassi U., Winter T. & Burov E., « *Investigating environmental tectonics in northern alpine foreland of Europe* », EOS Trans. American Geophysical Union (AGU), 84(36), p. 356-357, 2003, doi:10.1029/2003E0360001, 2003 [ASCL 4].
55. **Verdun J.**, Brockmann E., Geiger A., Kahle H.-G. & D. Schneider, « *Tectonic movement analysis in the Upper Rhine Graben using GPS time series* », mid-term report of the ENTEC project 2003 [AP 5].

2002

56. **Verdun J.**, Bayer R., Klingelé E. E., Cocard M., Geiger A. & M. Halliday, « *Airborne gravity measurements over mountainous areas by using the LaCoste and Romberg air-sea gravity meter* », Geophysics, 67(3), 807 - 816, doi:10.1190/1.1484525, 2002 [ACL 10].
57. **Verdun J.**, Bayer R., Klingelé E. E., Cocard M., & A. Geiger, « *Airborne gravity measurements using a LaCoste & Romberg air-sea gravity meter* », Journées Luxembourgeoises de Géodynamique (JLG), 91st meeting, Münsbach Castle, Grand-Duchy of Luxemburg, 2002 [COM 16].
58. **Verdun J.**, Geiger A., Brockmann E., Kahle H.-G. & D. Schneider, « *Deformation analysis using GPS time series : a preliminary approach* », EUCOR-URGENT Workshop, Freiburg, Germany, 2002 [COM 17].
59. **Verdun J.**, Geiger A., Brockmann E., Kahle H.-G. & D. Schneider, « *Kinematic analysis of local and regional tectonic movements using GPS time series* », EUCOR-URGENT Workshop, Vienna, Austria, 2002 [COM 18].

60. **Verdun J.** & E. E. Klingelé, « *Upward continuation of the gravity field in very rugged topography: application to the estimation of airborne data quality* », European Geophysical Society (EGS) 27th Annual Meeting, 21 - 26 April 2002, Nice, France, 2002 [**COM 19**].
61. **Verdun J.** & F. Masson « *Refined gravity maps of the Alpine crustal structures resulting from lithospheric, long wavelength gravity effect removal* », European Geophysical Society (EGS) 27th Annual Meeting, 21 - 26 April 2002, Nice, France, 2002 [**AFF 12**].
62. **Verdun J.**, Klingelé E.; E., Geiger A. & H.-G. Kahle, « *Airborne gravimetry with INS and GPS* », final report of the NF project 2002, Geodesy and Geodynamics Lab., ETHZ, Zürich, Switzerland, 2002 [**AP 6**].

2001

63. **Verdun J.**, Brockmann E., Geiger A., Kahle H.-G., & D. Schneider, « *GPS time series analysis of the permanent GPS Swiss network AGNES* », EUCOR-URGENT Workshop, Strasbourg, France, 2001 [**COM 20**].
64. **Verdun J.**, Bayer R., Klingelé E. E., Cocard M., & A. Geiger, « *The Alpine Swiss French airborne gravity survey* », European Geophysical Society (EGS) 26th Annual Meeting, 25 - 30 March 2001, Nice, France, 2001 [**COM 21**].

2000

65. **Verdun, J.**, « *La gravimétrie aéroportée en région montagneuse. Exemple du levé franco-suisse sur les Alpes occidentales* », thèse de doctorat, laboratoire Géosciences, Université Montpellier 2, 310 pp., 2000 [**AP 7**].

1999

66. Masson E., **Verdun J.**, Bayer R. & N. Debeglia, « *Une nouvelle carte gravimétrique des Alpes Occidentales et ses conséquences structurales et tectoniques* », C.R. Geosci., 329, 865 - 871, 1999 [**ACL 11**].
67. **Verdun J.**, Bayer R., Klingelé E. E., Cerniar M., Cocard M., Geiger A. & M. Halliday, « *The alpine Swiss French airborne gravimetry project (ASFAG project)* », B. Geofis. Teor. Appl., 40, 3 - 4, 273 - 276, 1999 [**ACL 12**].
68. **Verdun J.**, Bayer R., Klingelé E. E., Cerniar M., Cocard M., Geiger A. & M. Halliday, « *The Alpine Swiss French airborne gravity project* », Abstract JSA37/W/04-B3 1200 presented at XXII^e IUGG General Assembly, Birmingham, UK, 1999 [**COM 22**].

69. **Verdun J.**, Bayer R., Klingelé E. E., Cerniar M., Cocard M., Geiger A. & M. Halliday, « *The Alpine Swiss French airborne gravity survey : preliminary results* », European Union of Geosciences (EUG) 10th Biennial meeting, Strasbourg, France, 28 March - 1 April 1999 [**COM** 23].
70. Masson, F., Bayer, R., Paul, A., **Verdun J.**, Andreo, P. & C. Dumas « *A 3D image of the western alpine crust inferred from gravity modeling* », European Union of Geosciences (EUG) 10th Biennial meeting, Strasbourg, France, 28 March - 1 April 1999 [**AFF** 13].

1998

71. Andréo P., **Verdun, J.**, Laire, R. & R. Bayer, « *Étude structurale profonde 3D des Alpes occidentales par gravimétrie au sol* », rapport de recherches du programme « GéoFrance 3D », laboratoire Géosciences, Université Montpellier 2, 17 pp., 1998 [**AP** 8].

1997

72. **Verdun, J.**, « *Le prolongement des anomalies du champ de pesanteur en région montagneuse. Application d'une méthode d'inversion* », mémoire de diplôme d'études approfondies (DEA), laboratoire Géosciences, Université Montpellier 2, 1997 [**AP** 9].

Liste exhaustive des projets de recherche

N°	Projet
1.	Instrumentation Scientifique embarquée Autonome pour l'Analyse hydro- et géomorphologique de l'environnement Côtier (ISAAC) <i>Conception et développement d'une instrumentation autonome adaptée aux embarcations légères et véhicules amphibies, comprenant capteurs de position et d'orientation et équipée d'un panel de capteurs de lever – lidar, caméras, sondeur multi-faisceaux et gravimètre mobile – destinée à l'acquisition de données en zones côtières et estuariennes.</i> Consortium : laboratoires GeF-L2G (coordination) et LIENSs UMR 7266/université de La Rochelle, SHOM, ONERA. Coordination : Jérôme VERDUN Financement : Direction Générale de l'Armement (DGA) (Astrid Maturation), Observatoire des Sciences de l'Univers Nantes-Atlantique (OSUNA). Période : Soumis à l'appel à projet « Astrid » 2014 et 2015 ; nouvelle soumission à l'appel à projet « Astrid Maturation » prévue en 2017 à la suite de la thèse de Clément Roussel (durée pressentie : 30 mois). <i>L'appréciation sur le projet rendue par le comité de sélection en 2015 est reproduite en fin du présent tableau.</i> Rôle dans le projet : Rédacteur du texte de la proposition de projet en collaboration avec Mathieu BONNEFOND (MCF GeF-L2G) et José CALI (MCF GeF-L2G). Coordination du consortium.
2.	Gravimétrie Mobile sous-marine (GraviMob) <i>Conception et développement d'un module de mesure de pesanteur qui puisse s'adapter sur les sous-marins autonomes de type AUV.</i> Consortium : LDO (coordination), GeF-L2G, LAREG, IFREMER, SHOM, @MAPPEM Geophysics. Coordination : Marcia MAIA (DR2 CNRS, LDO).
Suite des projets page suivante	

N°	Projet
	Financement : <i>Prototype de capteur</i> : Contrat de Plan État-Région (CPER) Bretagne ODO « Observatoire des Domaines Océaniques » + Labex « MER », axe 3 « Geobiological interactions in extreme environments »; <i>Campagne technologique d'essai</i> : appel d'offre « Très Grandes Infrastructures de Recherche (TGIR), Flotte Océanique Française (FOF) »; <i>Stages, missions, réunions, divers</i> : appel d'offre de l'INSU « Connaissance et Technologie du Sous-Sol pour son exploitation et Usage du Rable (CESSUR) » + labex « Actions à la Mer » + LDO; <i>Thèse</i> : cofinancement DGA et RPDLL (Clément Roussel). Période : 2009 - 2020 Rôle dans le projet : Rédacteur de la proposition de thèse de Clément Roussel retenue pour un cofinancement DGA/RPDLL. Co-directeur de la thèse de Clément Roussel. Organisateur du comité de suivi de thèse. Participation aux essais du système « GRAVI-MOB » en bassin et à la campagne technologique d'essai.
3.	Étude de l'escarpement ouest Afar par géodésie (GNSS), gravimétrie (GOCE/GRACE) et interférométrie (InSAR) spatiales (OUEST AFAR). <i>Quantification du mouvement accommodé par l'escarpement ouest Afar par géodésie spatiale GNSS et interférométrie SAR (Interferometric Synthetic Aperture Radar (InSAR)) et caractérisation de la structure profonde de l'Afar et du rift est-africain par gravimétrie spatiale (GOCE/GRACE).</i> Consortium : Institut de Physique du Globe de Strasbourg (IPGS) (principal), université d'Addis Ababa (Éthiopie), laboratoire Géosciences Montpellier et laboratoire GeF-L2G. Coordination : Frédéric MASSON (PR IPGS/université de Strasbourg). Financement : CNES/Terre, Océan, Surfaces Continentales, Atmosphère (TOSCA) Période : 2015 - 2017 (renouvelable) Rôle dans le projet : Modélisation du champ de gravité complet (accélération gravitationnelle et tenseur des gradients de gravité) à partir de l'exploitation des données de gravimétrie spatiale GOCE/GRACE. Confrontation modèles géophysiques/mesures; inversion.
4.	Continuité Écologique : Zones hUmides et Restauration Écologique dans le bassin de la Sarthe amont (CEZURES). <i>Impacts hydrogéologiques sur les zones humides du rétablissement de la continuité écologique sur la Sarthe amont. Sites d'étude : moulin du Désert (en aval d'Alençon) et moulin du Ménil-Broût (en amont d'Alençon).</i>
Suite des projets page suivante	

N°	Projet
	Consortium : Laboratoires GeF-L2G (coordination) et ESO (université du Maine). Coordination : Mathieu BONNEFOND (MCF laboratoire GeF-L2G) et Jeannine CORBONNOIS (PR laboratoire ESO). Financement : Agence de l'eau Loire Bretagne. Période : 2014 - 2016 Rôle dans le projet : traitement de données pour le positionnement dynamique du bateau dédié aux mesures bathymétriques par sondeur multi-faisceaux.
5.	SédiLoir <i>Quantification des flux sédimentaires dans le lit des rivières de faible énergie. Étude du Loir moyen entre Ruillé-sur-Loir (72) et Bazouges-sur-le-Loir (72).</i> Consortium : Laboratoires GeF-L2G (coordination) et ESO (université du Maine). Coordination : Mathieu BONNEFOND (MCF laboratoire GeF-L2G) et Jeannine CORBONNOIS (PR laboratoire ESO). Financement : Agence de l'eau Loire Bretagne, Fonds Européen de Développement Régional (FEDER), RPDLL. Période : 2013 - 2015 Rôle dans le projet : Recherches méthodologiques sur la segmentation et la modélisation des nuages de points acquis par lasergrammétrie sur les berges de rivières. Encadrement du stage de Maryem Fadili [Fadili, 2015 (M2[3])] qui a conçu et développé deux algorithmes de calcul du champ de déformation et du volume érodé des berges de rivières, à partir de nuages de points acquis à des dates différentes.
6.	Validation et raffinement des modèles géologiques globaux de la Terre à partir des données du satellite gravimétrique GOCE (GeophyGOCE) <i>Calcul numérique du tenseur des gradients de gravité de la Terre à partir de modèles géophysiques globaux de la lithosphère (LITHO1.0) et confrontation aux données du satellite gravimétrique GOCE en vue du raffinement des modèles géophysiques.</i> Consortium : laboratoire GeF-L2G et IPGS. Coordination : Jérôme VERDUN Financement : CNES (reliquat des projets TOSCA). Période : 2013 - 2014

Suite des projets page suivante

N°	Projet
	Rôle dans le projet : Rédacteur et coordinateur du projet. Calculs numériques du champ de gravité sur la base du travail de fin d'études de Clément Roussel [Roussel, 2013 (M2[5])] qui a mis au point et développé un logiciel de calcul du champ de gravité à partir d'une partition de la Terre en prisme ellipsoïdaux.
7.	Spherical Harmonic Expansion of the Gravitational Potential of a constant density polyhedron (SHEGP-Polyhedron) <i>Calcul numérique des coefficients du développement en harmonique sphérique du potentiel d'un corps massif de forme arbitraire.</i> Consortium : LAREG et laboratoire de géodésie et topographie de l'université de Thessalonique (Grèce). Coordination : Dimitrios TSOULIS (PR Université de Thessalonique (Grèce) et Olivier JAMET (IPEF, IGN) Financement : Coopération bilatérale PHC Platon, projet n°15063 PE. Période : 2007 - 2008 Rôle dans le projet : Co-encadrant du stage de Nicolas Gonindard 2008 (M1[1]) consacré au développement d'une méthode numérique récursive de calcul des coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques du potentiel gravitationnel d'un polyèdre de densité constante.
8.	Upper Rhine Grabben Evolution and NeoTectonics (URGENT) <i>Projet pluri-disciplinaire (géologie, géophysique, géodésie spatiale) consacré au fossé rhénan avec pour objectifs la quantification du mouvement géodynamique et l'étude du cycle sismique.</i> Consortium : plus de dix laboratoires européens dont le laboratoire de géodésie et géodynamique (GGL) de l'ETHZ. Coordination : S. CLOETINGH (université d'Utrecht, Pays-Bas). Financement : projet européen « EUCOR ». Période : 2000 - 2002 Rôle dans le projet : chercheur post doctorant au GGL en charge de la séparation des sources et la quantification des mouvements à partir des séries temporelles du réseau GNSS permanent suisse « Automated GNSS Network for Switzerland (AGNES) ».
Suite des projets page suivante	

N°	Projet
9.	GéoFrance 3D <i>Définition d'une procédure d'exploration tridimensionnelle du domaine souterrain national intégrant de nouvelles données géologiques et géophysiques, en vue de renouveler l'imagerie du contexte géologique national.</i> Consortium : Bureau de Recherches Géologiques et Minières (BRGM), INSU, laboratoire Géosciences Montpellier et partenaires universitaires. Coordination : BRGM. Financement : multi-sources car programme national. Période : 1995 - 2000 Rôle dans le projet : Doctorant à l'université de Montpellier, bénéficiaire d'une « Allocation Moniteur Normalien ». Gravimétrie terrestre et traitement des données de la campagne gravimétrique aéroportée « Alpes 1998 ».
Fin de la liste	

Appréciation du projet « ISAAC » prononcée par comité de sélection de l'appel d'offre « Astrid » 2015

Le projet ISAAC est un projet ambitieux. Il apparaît parfaitement maîtrisé. D'un intérêt stratégique majeur, il vise à l'amélioration des techniques de métrologie géophysique en domaine côtier. Bien structuré et cohérent avec les axes prioritaires de l'appel à projets ASTRID 2015, le projet ISAAC présente clairement les apports du développement de la recherche et est tout à fait argumenté en ce qui concerne l'innovation méthodologique et technologique, avec des équipes proposant dont l'excellence scientifique, le savoir-faire et la reconnaissance nationale et internationale est évidente.

Points forts :

- Mise en place d'un comité de « surveillance ».
- Intérêt stratégique majeur.
- Innovation méthodologique et technologique.
- Excellence scientifique des proposant.
- Pertinence des collaborations.

Points faibles :

- Éventuel cloisonnement du partenariat, chaque équipe présentant une expertise particulière, qui reste toutefois extrêmement complémentaire pour l'atteinte des objectifs.
- Risque inhérent à toute méthodologie innovante.
- Un rapprochement avec une PME (Petites et Moyennes Entreprises), de préférence dans le domaine, aurait permis de réduire les postes, prise en charge des tests et du développement au-delà du TRL 4⁽¹⁾, et de se focaliser sur les autres tâches.

Pour information, et entre autres solutions instrumentales récentes pouvant être potentiellement utilisées dans ce projet, l'OSUNA et l'OSUR viennent de se doter (avec le soutien de la région Bretagne) d'un lidar bathymétrique à retour d'onde complet Optech Titan. Le projet ISAAC consiste essentiellement à développer une instrumentation et son niveau de TRL peut être considéré supérieur à 4. L'aspect recherche amont, est essentiellement lié au traitement des données gravimétriques. Il s'appuie sur des travaux de thèse (financés par la DGA) qui proposent un filtrage particulière. Néanmoins, le projet présente un fort intérêt pour la Défense. Il conviendrait donc de le soumettre dans un contexte cohérent avec le niveau de maturité technologique, à savoir **ASTRID Maturation** ou RAPID. Pour ce faire, le porteur devra se rapprocher d'une PME.

(1) : TRL = « Technology Readiness Level » ; niveau de maturité technologique sur une échelle variant de 1 (principes de base) à 9 (système qualifié et opérationnel). Le niveau 5 correspond à la validation certaines parties du système dans un environnement représentatif de son utilisation, hors laboratoire.

Encadrement d'étudiants et jeunes chercheurs

CODIFICATION DE LA NATURE DE L'ENCADREMENT RÉALISÉ

THESE Thèse de doctorat.

M2 Stage de fin d'études d'un étudiant de niveau Master M2 ou d'un élève-ingénieur de 3^e année.

M1 Stage de fin d'études d'un étudiant de niveau Master M1 ou d'un élève-ingénieur de 2^e année.

PPP Stage de projet pré-professionnel d'étudiants de niveau Master M2 ou d'élèves-ingénieurs de 3^e année. Il s'agit de stages de courte durée (< 3 mois), réalisés en équipe de trois ou quatre étudiants, qui traitent d'un sujet comportant une problématique de recherche, et conduisent à la rédaction d'un mémoire et une soutenance orale devant un jury.

SUIV Suivi de stage de fin d'études d'un étudiant de niveau Master M2 ou d'un élève-ingénieur de 3^e année. Ce mode d'encadrement comprend des activités de conseil et d'orientation pour permettre la progression du travail de l'étudiant durant le stage, la correction du mémoire et la participation au jury de soutenance finale.

COMTH Comité de suivi de thèse.

ABRÉVIATIONS DÉSIGNANT LES LABORATOIRES D'ACCUEIL

DPTS - ENSG

Département « Positionnement Terrestre & Spatial », École Nationale des Sciences Géographiques

ESO - UM

Laboratoire « Espaces et Sociétés », Université du Maine

GeF - L2G - Cnam

Laboratoire « Géomatique & Foncier », équipe « Géodésie & Géosciences », Conservatoire National des Arts & Métiers

LAREG - IGN

Laboratoire de REcherches en Géodésie, Institut National de l'Information Géographique & Forestière

LDTP - OMP

Laboratoire « Dynamique Terrestre et Planétaire », Observatoire Midi-Pyrénées

LMM - UM

Laboratoire Manceau de Mathématiques, Université du Maine

THESE

1. LEROUX Boris (2016 - en cours)

Fusion de données LiDAR et photographiques pour le géoréférencement direct d'un lever topographique par micro-drone aérien

Encadrement : L. Morel (dir.), **J. Verdun** (encad.), J. Cali (encad.), E. Simonetto (encad.), L. Polidori (encad.)

Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam

École doctorale « Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture » (SPIGA) - Universités de Nantes et du Maine

Financement : Convention Industrielle de Formation par la REcherche (CIFRE) avec l'entreprise nantaise ®Hélicéo, 6 Rue Rose Dieng-Kuntz, 44300 Nantes.

2. ROUSSEL Clément (2014 - soutenance prévue mai 2017)

Modélisation à haute résolution du champ de gravité terrestre par combinaison de mesures de gravimétrie spatiale et de gravimétrie mobile - Application au domaine sous-marin

Encadrement : M. Maia (dir.), **J. Verdun** (encad.), J. Cali (encad.)

Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam

École doctorale « Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture » (SPIGA) - Universités de Nantes et du Maine

Financement : DGA/RPDLL

3. **LI Qi** (2008 - 2011 mémoire non achevé suite à un changement d'orientation professionnelle)
Estimation de la pesanteur par gravimétrie mobile : méthodologie et applications
 Encadrement : M. Diament (dir.), I. Panet (encad.), **J. Verdun** (encad.)
 Laboratoire d'accueil : LAREG - IGN
 École doctorale « Sciences de la Terre, de l'Environnement et Physique de l'Univers de Paris »
 (STEP UP) - Université Paris 7
 Financement : IGN

4. **DE SAINT-JEAN Bertrand** (2005 - 2008)
Étude & développement d'un système de gravimétrie mobile
 Encadrement : J.-P. Barriot (dir.), H. Duquenne (codir.), **J. Verdun** (encad.), J. Cali (encad.)
 Laboratoire d'accueil : LAREG - IGN
 École doctorale d'Astronomie et d'Astrophysique d'Île-de-France - Observatoire de Paris
 Financement : IGN

5. **ABBASI Madjid** (2003 - 2006)
Étude du traitement de données gravimétriques acquises lors de levés aériens
 Encadrement : J.-P. Barriot (dir.), **J. Verdun** (encad.)
 Laboratoire d'accueil : DTP - OMP
 École doctorale « Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace » (SDUEE) - Université
 Toulouse 3
 Financement : Ministère iranien de la science, la recherche et la technologie/INSU

M2

1. **VENTURI Anthony** (2016)
Raffinement des modèles géophysiques globaux de la Terre par assimilation de données gravimétriques satellitaires
 Encadrement : **J. Verdun**, F. Masson, J. Cali
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam & LMM - UM
 Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

2. **MAMBOU Ulrich** (2016)
Filtrage de Kalman à bruits corrélés pour le positionnement précis
 Encadrement : A. Brouste, **J. Verdun**, J. Cali
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam
 Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

3. **FADILI Maryem** (2015)
Modélisation des nuages de points acquis par lasergrammétrie en milieu naturel. Application à l'auscultation des berges de rivières à faible énergie
 Encadrement : **J. Verdun**, J. Cali, M. Bonnefond
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam et ESO - UM
 Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

4. **CHAUVEAU Guillaume** (2014)
Apport du filtrage de kalman aux systèmes de positionnement embarqués et à l'auscultation
 Encadrement : **J. Verdun**, J. Cali, A. Brouste
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam & LMM - UM
 Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

5. **ROUSSEL Clément** (2013)
Modélisation numérique du champ de gravité produit par une structure géologique arbitraire
 Encadrement : **J. Verdun**, J. Cali, F. Masson
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam
 Mémoire de travail de fin d'études du mastère spécialisé « Photogrammétrie, Positionnement et Mesure de Déformations (PPMD) - ENSG

6. **DAMENET Nicolas** (2012)
Traitement de données en gravimétrie mobile par filtrage de Kalman spatialisé
 Encadrement : **J. Verdun**, J. Cali
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam
 Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

7. **ONU Mihaela** (2007)
Development of a hybrid GPS/INS positioning system based on a cheap inertial navigation system
 Encadrement : **J. Verdun**, S. Botton
 Laboratoire d'accueil : LAREG - IGN & DPTS - ENSG
 Mémoire de fin d'études de l'Université Technique de Constructions de Bucarest

8. ROSU Ana-Maria (2006)

Attitude and position determination using accelerometric and gyroscopic data

Encadrement : **J. Verdun**, S. Botton

Laboratoire d'accueil : LAREG - IGN & DPTS - ENSG

Mémoire de fin d'études de l'Université Technique de Constructions de Bucarest

9. KAMGUIA Joseph (2005)

Calcul d'un modèle de géoïde gravimétrique, évaluation de ses applications au nivellement par GPS et interprétation géophysique de ses ondulations sur le Cameroun

Encadrement : H. Duquenne, **J. Verdun**

Laboratoire d'accueil : LAREG - IGN & DPTS - ENSG

Mémoire de travail de fin d'études du mastère spécialisé « Photogrammétrie, Positionnement et Mesure de Déformations (PPMD) - ENSG

10. DUMITRU Paul (2004)

Intégration de la grille de référence des altitudes RAF98 au logiciel ©GeoConcept

Encadrement : H. Duquenne, S. Botton, **J. Verdun**

Laboratoire d'accueil : LAREG - IGN & DPTS - ENSG

Mémoire de fin d'études de l'Université Technique de Constructions de Bucarest

11. MELACHROINOS Stavros (2004)

Développement d'un système de gravimétrie mobile

Encadrement : F. & H. Duquenne, **J. Verdun**, J. Cali

Laboratoire d'accueil : LAREG - IGN

Mémoire du diplôme d'études approfondies en « Dynamique des Systèmes Gravitationnels », Observatoire de Paris

M1

1. GONINDARD Nicolas (2008)

Multiresolutional modelling of the gravitational signal of prismatic masses with applications in geodesy and geophysics

Encadrement : D. Tsoulis, O. Jamet, **J. Verdun**

Laboratoire d'accueil : Université de Thessalonique, Grèce & LAREG - IGN

Mémoire de stage du projet pluridisciplinaire du cycle d'ingénieur de l'ENSG

PPP

1. ODIE Charlotte, MOYNE Olivier, ROY Vivien (2017)

Mise en place d'un protocole de contrôle de la qualité d'un laser

Encadrement : G. Ferré, J. Cali & **J. Verdun**

Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam

Mémoire de stage du projet professionnel du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

2. BURY Clément, GRAVIER Louis, LAURENT Maxime (2016)

Classification combinée du nuages de points acquis par lasergrammétrie terrestre en milieu naturel

Encadrement : **J. Verdun**, E. Simonetto & M. Bonnefond

Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam

Mémoire de stage du projet professionnel du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

3. GUILLON Louis, LOO Yohan, MAMBOU Ulrich (2016)

Estimation de la trajectoire d'un mobile par combinaison de mesures tachéométriques et inertielles

Encadrement : J. Cali, **J. Verdun** & M. Bonnefond

Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam

Mémoire de stage du projet professionnel du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

4. ATTENCIA Jordi, BENATIA Fahd, BOUCHER Pauline, FADILI Maryem (2015)

Développement et validation d'une méthode d'interpolation des données du satellite gravimétrique GOCE

Encadrement : **J. Verdun**, C. Roussel & J. Cali

Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam

Mémoire de stage du projet professionnel du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

5. LARDILLEUX Juliette, ROUMAIN de la TOUCHE Maxime, de MARION Valentin (2014)

Détermination d'attitude par système GPS multi-antennes

Encadrement : J. Cali & **J. Verdun**

Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam

Mémoire de stage du projet professionnel du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

6. **BOY Lara, DEPOND Vincent, GAUTHIER Anne-Lise, GROB Marie (2014)**
Étude comparée de relevés 3D au musée de 24 h circuit de la Sarthe
 Encadrement : J. Cali, **J. Verdun** & E. Labergerie
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam
 Mémoire de stage du projet professionnel du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

7. **BOUCHET Fabien, DOIZY Stanislas, RAIMONDI Bernard (2014)**
Calculs GNSS avec le logiciel gLab
 Encadrement : J. Beilin, P. Bosser & **J. Verdun**
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam
 Mémoire de stage du projet professionnel du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

8. **BALEY Matthieu, THOMAS Benjamin, TRIVES Julie (2013)**
Modèle de détermination des attitudes par GPS multi-antennes
 Encadrement : J. Cali, **J. Verdun**
 Laboratoire d'accueil : GeF - L2G - Cnam
 Mémoire de stage du projet professionnel du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

SUIV

1. **PELTRAULT Clément (2016)**
Étude statistique d'un capteur de distance temps de vol infrarouge, d'une caméra 3D et application dans un processus SLAM
 Laboratoire ou entreprise d'accueil : TERABEE
 Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

2. **LUISET Bruno (2016)**
Développement d'un baromètre-altimètre à bord d'un drone
 Laboratoire ou entreprise d'accueil : Laboratoire TOPO École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)
 Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

3. **PERUL Johan (2016)**
Exploitation des mesures HSGPS pour la navigation pédestre
 Laboratoire ou entreprise d'accueil : IFSTTAR GéoLoc
 Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

- 4. CHABLE Sylvain (2015)**
Couplage de mesures GPS et inertielles pour la navigation pédestre dans les bâtiments
Laboratoire ou entreprise d'accueil : IFSTTAR GéoLoc
Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT
- 5. FLAGE Solène (2015)**
Optimisation des procédures d'acquisition et de traitement des données obtenues par méthode laser scanner dynamique terrestre et qualification des résultats
Laboratoire ou entreprise d'accueil : Sintégra
Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT
- 6. PERRET Cyril (2015)**
Mise en place d'une méthode de positionnement dynamique des réseaux, accessible via smart-phone, répondant aux normes de la DT-Dict
Laboratoire ou entreprise d'accueil : COLAS Rhône - Alpes - Auvergne
Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT
- 7. VERNHOLLES Cédric (2015)**
Outils, méthodes et optimisation de la modélisation 3D de la voirie par système de cartographie mobile
Laboratoire ou entreprise d'accueil : Profils-Etudes
Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT
- 8. GROB Marie (2014)**
Protocole de qualification d'un système de lever par drone pour les géomètres. Application au drone ©Aibot X6
Laboratoire ou entreprise d'accueil : GEOMAT
Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT
- 9. NUNES Marine (2014)**
Étude d'un système de type « Mobile Mapping Scanning » et mise en œuvre d'une procédure de calibration
Laboratoire ou entreprise d'accueil : GEOSAT
Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

10. MAISSE Paul (2014)

Évaluation d'une solution GPS PPP pour la surveillance de glissements de terrain : intérêt du code de traitement GINS

Laboratoire ou entreprise d'accueil : EOST - Observatoire Multi-disciplinaire des Instabilités de Versants (OMIV)

Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

11. BURDACK Jordan (2013)

Combinaison des techniques GNSS et PSinSAR par cumul des équations normales

Laboratoire ou entreprise d'accueil : GeF - L2G - Cnam

Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

12. DEMEULE Vincent (2013)

Estimation des déplacements d'un piéton à partir des mesures inertielles et GPS d'un smart-phone

Laboratoire ou entreprise d'accueil : IFSTTAR GéoLoc

Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

13. OUHTI Marwane (2013)

Analyse géostatistique des données de la mission GRACE

Laboratoire ou entreprise d'accueil : IPG Paris - Laboratoire de Gravimétrie et Géodésie Spatiale

Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

14. CANDUSSO Kévin (2012)

Intégration d'une centrale inertielle dans une chaîne d'acquisition de photographies aériennes non conventionnelle

Laboratoire ou entreprise d'accueil : Opsia Aviation

Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

15. FECHE Julien (2012)

Évaluation technico-financière et optimisation de l'utilisation d'un drone en prises de vues aériennes à destination photogrammétrique

Laboratoire ou entreprise d'accueil : CEMAP Géomètres-Experts

Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

16. MIDONNET Nicolas (2012)

Mise en place et optimisation d'un protocole de mesure topographique in situ de la pente des fleuves

Laboratoire ou entreprise d'accueil : IRSTEA - UMR « Territoires, environnement, télédétection et information spatiale » (AgroParisTech, Irstea, Cirad)

Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

17. VIEQUE Aymeric (2012)

Laser scanner mobile embarqué sur une vedette bathymétrique

Laboratoire ou entreprise d'accueil : INGEO Ingénierie Géomètre-Expert

Mémoire de travail de fin d'études du cycle d'ingénieur du Cnam/ESGT

18. VALTY Pierre (2007)

Suivi géodésique du glissement de terrain de La Clapière (06)

Laboratoire ou entreprise d'accueil : Géosciences Azur

Mémoire de travail de fin d'études du mastère spécialisé « Photogrammétrie, Positionnement et Mesure de Déformations (PPMD) - ENSG

19. REBISCHUNG Paul (2006)

Calcul des déformations de la Terres dues aux effets de charge : applications aux mesures géodésiques

Laboratoire ou entreprise d'accueil : LAREG - IGN

Mémoire de travail de fin d'études du mastère spécialisé « Photogrammétrie, Positionnement et Mesure de Déformations (PPMD) - ENSG

20. BEILIN Jacques (2005)

Apport de la gravimétrie absolue à la réalisation de la composante gravimétrique du Réseau Géodésique Français

Laboratoire ou entreprise d'accueil : LAREG - IGN & Service de la Géodésie et du Nivellement - IGN

Mémoire de travail de fin d'études du mastère spécialisé « Photogrammétrie, Positionnement et Mesure de Déformations (PPMD) - ENSG

COMTH

1. **DOUCH Karim (2015)**

Gradiomètre planaire embarqué pour l'étude de la gravité en zones littorales

Encadrement : M. Diamant (dir.), I. Panet (encad.), B. Christophe (encad.), G. Pajot (encad.)

Laboratoire d'accueil : LAREG - IGN & ONERA

École doctorale « Sciences de la Terre, de l'Environnement et Physique de l'Univers de Paris »
(STEP UP) - Université Paris 7

2. **HATAM CHAVARI Yaghoub (2010)**

Établissement de nouveaux réseaux multi-observations géodésiques et gravimétriques & Détermination du géoïde en Iran

Encadrement : R. Bayer (dir.)

Laboratoire d'accueil : Géosciences Montpellier - Université Montpellier 2

École doctorale « Systèmes Intégrés en Biologie, Agronomie, Géosciences, Hydrosciences et Environnement » (SIBAGHE)

Enseignement & pédagogie

Cette annexe répertorie l'ensemble de mes activités d'enseignement depuis mes débuts en 1997. Ce bilan distingue trois catégories :

1. les formations régulières, c'est-à-dire inscrites dans des cursus universitaires ou d'écoles d'ingénieur;
2. les formations continues;
3. les formations spécifiques, liées à une demande particulière telles les écoles d'été.

CODIFICATION DES NIVEAUX D'ENSEIGNEMENT ET DES ÉTABLISSEMENTS

Niveau d'enseignement

- M2** 2^e année de master, formation de mastère et 3^e année d'école d'ingénieur.
- M1** 1^{re} année de master et 2^e année d'école d'ingénieur.
- L3** 3^e année de licence et 1^{re} année d'école d'ingénieur.
- L2** 2^e année de licence, de BTS ou des classes préparatoires.
- L1** 1^{re} année de licence, de BTS ou des classes préparatoires.
- FC** Formation continue.

Établissement

- ESGT** École Supérieure des Géomètres et Topographes du Conservatoire National des Arts & Métiers (Cnam), Le Mans (72).
- ENSG** ENSG de l'IGN, Marne-la-Vallée (77).
- UMAI** Université du Maine, Le Mans (72).
- OBSP** Observatoire de Paris & université Paris 7 Diderot (75).
- UMII** Université de Montpellier (34).
- LCCL** Lycée Camille Claudel, Blois (41).

ACTIVITÉS D'ENSEIGNEMENT

Étab.	Niveau				
	L1	L2	L3	M1	M2
ESGT	Cycle préparatoire intégré		Cycle ingénieur		
	1 ^{re} année	2 ^e année	1 ^{re} année	2 ^e année	3 ^e année
ENSG	Cycle technicien-géomètre		Cycle ingénieur		Mastère
	1 ^{re} année	2 ^e année	1 ^{re} année	2 ^e année	PPMD ⁽¹⁾
UMAI	Classe préparatoire E2i⁽²⁾				
	1 ^{re} année	2 ^e année	✓	✓	✓
OBSP	✓	✓	✓	✓	Master PFST AAIS/DSG⁽³⁾
UMII	Sciences & Technologie		Sciences de la Terre	✓	✓
	1 ^{re} année	2 ^e année			
LCCL	BTS électrotechnique				
	1 ^{re} année	2 ^e année	✓	✓	✓

Enseignements réalisés

✓ Non concerné

(1) : Mastère « Positionnement, Photogrammétrie et Mesures de Déformation » proposé par l'ENSG. Cette formation est également proposée comme parcours de spécialisation pour les élèves de 3^e année du cycle ingénieur de l'ENSG

(2) : Parcours préparatoire aux écoles d'ingénieurs proposé par l'université du Maine. Cette préparation permet de présenter le concours d'entrée à l'ESGT, ainsi qu'à trois autres écoles régionales : l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans (ENSIM), l'Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés du Mans (ISMANS), Institut Supérieur de Plasturgie d'Alençon (ISPA).

Le parcours E2i est progressivement remplacé par un cycle préparatoire intégré au cursus de l'ESGT, accessible sur concours aux bacheliers. L'année universitaire 2014 – 2015 est une période de transition dans laquelle cohabitent la première promotion du cycle préparatoire intégré 1^{re} année et la dernière promotion de la classe préparatoire E2i 2^e année. Seul le cycle préparatoire intégré sera présent à la rentrée 2016.

(3) : Master « Physique Fondamentale & Sciences pour l'Ingénieur », spécialité « Astronomie, Astrophysique & Ingénierie Spatiale », parcours « Dynamique des Systèmes Gravitationnels ».

VOLUMES HORAIRES

Les volumes horaires indiqués ci-après comprennent les enseignements dans les formations régulières, continues et spécifiques que j'ai effectués depuis 2011. Les activités d'encadrement de stages ou de projets d'étudiants, ainsi que les responsabilités pédagogiques sont également comptabilisées dans ce volume horaire où elles représentent environ 10 % du total.

Année scolaire	2011 - 12	2012 - 13	2013 - 14	2014 - 15	2015 - 16	2016 - 17
Volume horaire (HED)	357	378	402	458	350	396

FORMATIONS RÉGULIÈRES

Niv./Étab.	Intitulé	Volume/Nature
L1 – UMII	PHYSIQUE QUANTIQUE & STATISTIQUE	12 TD
L2 – UMII	OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE & PHYSIQUE	6 TD, 12 TP
L2 – UMII	PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE DU CONCOURS NATIONAL DEUG	12 TD
L3 – UMII	GÉOPHYSIQUE APPLIQUÉE	12 TP
L1 – LCCL	PHYSIQUE APPLIQUÉE EN BTS ÉLECTROTECHNIQUE	2 CM, 2 TD, 4 TP/semaine
L2 – LCCL	PHYSIQUE APPLIQUÉE EN BTS ÉLECTROTECHNIQUE	4 TP/semaine
L1 – ENSG	INTRODUCTION À LA GÉODÉSIE	9 CM, 6 TD
L1 – ENSG	GÉODÉSIE SPATIALE	9 CM, 6 TD
L1 – ENSG	SYSTÈMES DE PROJECTION CARTOGRAPHIQUE	9 CM, 6 TD
L2 – ENSG	GÉODÉSIE PHYSIQUE	6 CM, 6 TD
L2 – ENSG	MÉCANIQUE CÉLESTE	9 CM, 6 TD
L3 – ENSG	MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR – ANALYSE	15 CM, 15 TD
L3 – ENSG	ESTIMATION LINÉAIRE PAR MOINDRES CARRÉS	6 CM, 9 TD
L3 – ENSG	PROGRAMMATION SCIENTIFIQUE	12 TP
L3 – ENSG	INTRODUCTION À LA GÉODÉSIE PHYSIQUE	9 CM, 3 TD
L3 – ENSG	TRAVAUX DE TERRAIN : GÉODÉSIE	75 TP
M1 – ENSG	INTERPOLATION SPATIALE	9 CM, 6 TD
M1 – ENSG	FILTRAGE DE KALMAN	6 CM, 3 TD
M2 – ENSG	GÉODÉSIE PHYSIQUE AVANCÉE	6 CM, 3 TD
M2 – ENSG	NAVIGATION INERTIELLE	6 CM, 3 TD
M2 – OBSP	LE CHAMP DE PESANTEUR : MÉTHODES MODERNES DE DÉTERMINATION	9 CM
M2 – OBSP	INTRODUCTION AUX PROBLÈMES INVERSES	3 CM
M2 – OBSP	ENSEIGNEMENTS MÉTHODOLOGIQUES ⁽⁴⁾	9 TP
L2 – ESGT	MÉTHODES NUMÉRIQUES & CALCUL SCIENTIFIQUE	25 TP
L3 – ESGT	MATHÉMATIQUES POUR L'INGÉNIEUR – ALGÈBRE LINÉAIRE	12 CM, 22 TD
L3 – ESGT	PROBABILITÉS & STATISTIQUES	8 CM, 12 TD
Suite des références page suivante		

Niv./Étab.	Intitulé	Volume/Nature
L3 – ESGT	GÉODÉSIE FONDAMENTALE	9 CM, 6 TD
L3 – ESGT	OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE & PHYSIQUE	12 TD
L3 – ESGT	RAYONNEMENT & ATMOSPHERE	9 TD
L3 – ESGT	MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'INGÉNIEUR (1 ^{RE} PARTIE)	3 CM, 9 TD
M1 – ESGT	MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'INGÉNIEUR (2 ^E PARTIE)	9 TD
M1 – ESGT	INTRODUCTION AUX MÉTHODES D'INTERPOLATION SPATIALE	6 TD
M1 – ESGT	TRAVAUX DE TERRAIN : ACQUISITIONS ET CALCULS GNSS	12 TP
M1 – ESGT	TRAVAUX DE TERRAIN : CALCUL D'UN RÉSEAU GÉODÉSIQUE	12 TP
M1 – ESGT	TRAVAUX DE TERRAIN : LASERGRAMMÉTRIE TERRESTRE	6 TP
M2 – ESGT	RELEVÉS 3D : LEVER PAR LIDAR TERRESTRE	3 TP
M2 – ESGT	POSITIONNEMENT DYNAMIQUE	3 CM, 6 TD
Fin de la liste		

Enseignements réalisés actuellement

(4) : Intitulés des sujets abordés dans les enseignements méthodologiques

1. *Étude des méthodes de filtrage numériques appliquées à la géodésie (2003-2004);*
2. *Effets relativistes dans les systèmes de radio-positionnement par satellite GPS et Galileo (2005-2006);*
3. *Étude des effets relativistes affectant le positionnement et les transferts de temps dans les systèmes de radio-positionnement par satellite GPS et Galileo (2006-2007);*
4. *Estimation de l'aplatissement des planètes du Système Solaire à partir de leur champ de pesanteur en surface (2007-2008).*

Ces enseignements consistent à encadrer un groupe de deux à trois étudiants dans un travail d'élaboration et d'implémentation d'un algorithme en lien direct avec une thématique de recherche actuelle.

FORMATIONS CONTINUES

Étab.	Intitulé	Volume
ENSG	SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET DE COORDONNÉES : CONCEPTS ET PRATIQUES	3 jours
ENSG	UTILISATION DU GPS POUR DU POSITIONNEMENT DE PRÉCISION	4 jours
ENSG	FORMATION PRATIQUE À L'UTILISATION DU GRAVIMÈTRE ABSOLU @A10	2 jours
ESGT	MODULE DPLG « SCIENCES DE LA MESURE ET GÉOMATIQUE »	2 jours
Fin de la liste		

Enseignements réalisés actuellement

FORMATIONS SPÉCIFIQUES

Établissement ou cadre

EUROSAE Centre de formation continue pour ingénieurs de l'ISAE⁽¹⁾ et l'ENSTA ParisTech⁽²⁾.

TUCE « Technical University of Civil Engineering », Bucarest, Roumanie.

GRGS École d'été du GRGS.

LIESSE Liaisons Interdisciplinaires avec les Écoles d'enseignement Supérieur pour une Structuration des Échanges.

Formation continue pour les enseignants en classes préparatoires scientifiques.

EFG École Francophone sur le Géoïde (25 juin - 1^{er} juillet 2005) : école thématique sur les aspects théoriques et pratiques du calcul de modèles de géoïde pour les doctorants et chercheurs confirmés.

(1) : Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

(2) : École Nationale Supérieure des Techniques Avancées (ENSTA)

Étab.	Intitulé	Volume
EUROSAE	GÉODÉSIE ET ASTRONOMIE EN VUE DU POSITIONNEMENT STATIQUE ET CINÉMATIQUE PRÉCIS (AED041)	1 jour
TUCE	STRAPDOWN INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS : PRINCIPLES AND COMPOSITION	4 jours
GRGS	3 ^E ÉCOLE D'ÉTÉ : « MÉTHODES ET LOGICIELS POUR LA GÉODÉSIE » 4 - 8 septembre 2006 <i>1. Probabilités pour le traitement du signal</i> <i>2. Estimation par moindres carrés</i> <i>3. Filtrage de Kalman</i>	5 jours
Suite des références page suivante		

Étab.	Intitulé	Volume
GRGS	5^E ÉCOLE D'ÉTÉ : « MESURE ET MODÉLISATION DE LA GRAVITÉ » 6 - 10 septembre 2010 <i>La gravimétrie mobile : principes fondamentaux, instrumentation, performances</i>	5 jours
LIESSE	OBSERVATION ET MODÉLISATION DE LA TERRE À DIFFÉRENTES ÉCHELLES (MAI 2005) <i>Positionnement par GNSS : Théorie et algorithmes</i>	1 jour
LIESSE	OBSERVATION GPS : MESURES ET APPLICATIONS PROFESSIONNELLES (MAI 2007) <i>1. Positionnement par GNSS : Théorie et algorithmes</i> <i>2. Géodésie spatiale : outil de la géodynamique et de la mesure de déformation</i>	1 jour
EFG	THÉORIE DU POTENTIEL ET REPRÉSENTATIONS EN HARMONIQUES SPHÉRIQUES - APPLICATIONS AUX MODÈLES DE GÉOPOTENTIEL	5 jours
Fin de la liste		

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Expressions des matrices de passage

A.1 Matrices de passage orthogonales

A.1.1 Du repère e vers le repère n

Soient λ et φ , respectivement, la longitude et la latitude géographique du point considéré; il vient en ce point :

$$C_e^n = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & +\cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & +\cos \varphi \\ +\cos \varphi \cos \lambda & +\cos \varphi \sin \lambda & +\sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

et, de plus :

$$C_n^e = (C_e^n)^T. \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Du repère b vers le repère n

Soient η , χ , et α , les angles, respectivement, de roulis, de tangage et de lacet; il vient :

$$\begin{aligned} C_b^n &= \begin{bmatrix} +\cos \alpha & +\sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & +\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin \chi & 0 & +\cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos \eta & +\sin \eta \\ 0 & -\sin \eta & +\cos \eta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} +\cos \alpha \cos \chi & +\cos \alpha \sin \chi \sin \eta + \sin \alpha \cos \eta & +\sin \alpha \sin \eta - \cos \alpha \sin \chi \cos \eta \\ -\sin \alpha \cos \chi & -\sin \alpha \sin \chi \sin \eta + \cos \alpha \cos \eta & +\cos \alpha \sin \eta + \sin \alpha \sin \chi \cos \eta \\ \sin \chi & -\cos \chi \sin \eta & +\cos \chi \cos \eta \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

et, de plus :

$$C_n^b = (C_b^n)^T. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Matrices de vitesse de rotation

A.2.1 Repère e par rapport au repère i

$$\Omega_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_e & 0 \\ +\omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

où $\omega_e = 7292115 \times 10^{-11}$ rad/s correspond à la vitesse angulaire de rotation de la Terre (définition employée pour le « GRS 80 »).

A.2.2 Repère n par rapport au repère e

$$\Omega_{en}^n = C_e^n \dot{C}_n^e \quad \text{avec} \quad \dot{C}_n^e = (\dot{C}_e^n)^T, \quad (\text{A.6})$$

soit, tous calculs faits :

$$\Omega_{en}^n = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\lambda} \sin \varphi & +\dot{\lambda} \cos \varphi \\ +\dot{\lambda} \sin \varphi & 0 & +\dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} \cos \varphi & -\dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

où $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt}$ et $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$.

A.2.3 Repère b par rapport au repère i

Soit ω_{ib} le vecteur rotation du repère b par rapport au repère i . Posons $\omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix}$. Il vient alors :

$$\Omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^b & +\omega_y^b \\ +\omega_z^b & 0 & -\omega_x^b \\ -\omega_y^b & +\omega_x^b & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Les vitesses angulaires ω_x^b , ω_y^b et ω_z^b peuvent être directement fournies par trois gyromètres dont les axes sensibles seraient alignés avec ceux du repère b .

A.2.4 Repère b par rapport au repère n

$$\Omega_{nb}^b = C_n^b \dot{C}_b^n \quad \text{avec} \quad \dot{C}_b^n = (\dot{C}_n^b)^T, \quad (\text{A.9})$$

soit, tous calculs faits,

$$\Omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\chi} \sin \eta + \dot{\alpha} \cos \chi \cos \eta & \dot{\alpha} \cos \chi \sin \eta - \dot{\chi} \cos \eta \\ -\dot{\chi} \sin \eta - \dot{\alpha} \cos \chi \cos \eta & 0 & \dot{\eta} + \dot{\alpha} \sin \chi \\ -\dot{\alpha} \cos \chi \sin \eta + \dot{\chi} \cos \eta & -\dot{\eta} - \dot{\alpha} \sin \chi & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

avec $\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt}$, $\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt}$, et $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$.

Annexe B

Ordre de grandeur des termes correctifs en gravimétrie mobile vectorielle

L'équation fondamentale de la gravimétrie mobile vectorielle (cf. Chap. 6, Sec. 6.1, §6.1.2, §6.1.2.3, Éq. 6.27 et §6.1.3) comporte trois termes T_1 , T_2 , T_3 qui s'expriment respectivement par des produits de matrices par les vecteurs position, vitesse et accélération du porteur (terme T_1 défini par l'équation 6.30), le vecteur « bras de levier » (terme T_2 défini par l'équation 6.31), le vecteur « force spécifique » (terme T_3 défini par l'équation 6.33). Les termes T_1 et T_2 peuvent être considérés comme des erreurs systématiques liées au mouvement du porteur, à retirer du terme de mesure d'accélération T_3 . Aussi, nous nous proposons de déterminer une expression rigoureuse de majorants de ces termes, afin d'en évaluer un ordre de grandeur par excès. Les majorations proposées reposent sur les propriétés des normes matricielles que nous commencerons par rappeler.

B.1 Normes matricielles

Soit $\mathbb{R}^{n,n}$ l'ensemble des matrices carrées réelles de dimension $n \times n$. Une *norme matricielle* sur $\mathbb{R}^{n,n}$ est une application de $\mathbb{R}^{n,n}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\|A\| > 0$ et $\|A\| = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle ;
2. pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ et tout réel α , $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;
3. pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,n}$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Une norme matricielle peut être construite très simplement à partir d'une norme vectorielle ; elle devient alors une *norme subordonnée à une norme vectorielle*. Par exemple, si $\|\dots\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, alors la norme matricielle subordonnée est définie pour toute matrice A de $\mathbb{R}^{n,n}$ par :

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}. \quad (\text{B.1})$$

Nous utiliserons dorénavant la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne.

Les deux propriétés essentielles des normes matricielles que nous allons utiliser sont les suivantes :

1. pour toute matrice A de $\mathbb{R}^{n,n}$ et tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|_2$;
2. pour tout couple de matrices (A, B) de $\mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,n}$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Soit $\text{spec}(M)$ l'ensemble de valeurs propres de la matrice $M \in \mathbb{R}^{n,n}$. Le rayon spectral $\rho(M)$ de la matrice M est le réel positif défini par :

$$\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{spec}(M)} |\lambda|. \quad (\text{B.2})$$

La norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ est alors donnée par :

$$\|A\| = \sqrt{\rho(AA^T)} = \sqrt{\rho(A^T A)}. \quad (\text{B.3})$$

Cette dernière relation va être mise à profit pour calculer les normes matricielles des matrices impliquées dans l'équation fondamentale de la gravimétrie mobile vectorielle.

Remarquons que si O est une matrice orthogonale de $\mathbb{R}^{n,n}$, alors $OO^T = O^T O = I_n$ où I_n est la matrice identité de $\mathbb{R}^{n,n}$. Dans ce cas, le rayon spectral de OO^T (ou $O^T O$) est égal à 1, seule et unique valeur propre de cette matrice. Par conséquent, toute matrice orthogonale est de norme 1.

B.2 Application aux équations de la gravimétrie mobile

En appliquant les résultats de la section précédente aux équations 6.30 (p. 191) et 6.31 (p. 192) qui donnent respectivement les termes T_1 et T_2 , il vient successivement :

$$\begin{aligned} \|T_1\|_2 &\leq \|C_e^n (\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e + \dot{\Omega}_{ie}^e)\| \|X_P^e\|_2 + 2 \|C_e^n \Omega_{ie}^e\| \|\dot{X}_P^e\|_2 + \|C_e^n\| \|\ddot{X}_P^e\|_2, \\ &\leq \|C_e^n\| (\|\Omega_{ie}^e\|^2 + \|\dot{\Omega}_{ie}^e\|) \|X_P^e\|_2 + 2 \|C_e^n\| \|\Omega_{ie}^e\| \|\dot{X}_P^e\|_2 + \|C_e^n\| \|\ddot{X}_P^e\|_2, \end{aligned}$$

et puisque $\|C_e^n\| = 1$, il résulte :

$$\|T_1\|_2 \leq (\|\Omega_{ie}^e\|^2 + \|\dot{\Omega}_{ie}^e\|) \|X_P^e\|_2 + 2 \|\Omega_{ie}^e\| \|\dot{X}_P^e\|_2 + \|\ddot{X}_P^e\|_2.$$

Avec l'équation A.5 (p. 403), il vient :

$$\Omega_{ie}^e (\Omega_{ie}^e)^T = -\Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e = \begin{bmatrix} \omega_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\Omega_{ie}^e (\Omega_{ie}^e)^T$ admet pour seule valeur propre non nulle, la vitesse angulaire de rotation de la Terre ω_e^2 , par conséquent :

$$\|\Omega_{ie}^e\| = \omega_e.$$

Un raisonnement identique mené avec la matrice $\dot{\Omega}_{ie}^e$, conduit à :

$$\|\dot{\Omega}_{ie}^e\| = |\dot{\omega}_e|.$$

Finalement, la majoration de la norme du terme T_1 conduit à l'inégalité suivante :

$$\|T_1\|_2 \leq (\|\Omega_{ie}^e\|^2 + \|\dot{\Omega}_{ie}^e\|) \|X_P^e\|_2 + 2 \|\Omega_{ie}^e\| \|\dot{X}_P^e\|_2 + \|\ddot{X}_P^e\|_2. \quad (\text{B.4})$$

L'expression retenue au titre de majorant M_1 de la quantité $\|T_1\|_2$, est donc la suivante :

$$M_1 = (\omega_e^2 + |\dot{\omega}_e|) \|X_P^e\|_2 + 2\omega_e \|\dot{X}_P^e\|_2 + \|\ddot{X}_P^e\|_2. \quad (\text{B.5})$$

Ce majorant se calcule donc aisément à partir de la connaissance des normes euclidiennes respectives des vecteurs position X_P^e , vitesse $\dot{X}_P^e$, et accélération $\ddot{X}_P^e$ du porteur, par rapport au référentiel terrestre e .

Remarquons que le terme $\omega_e \|X_P^e\|_2$ provient des fluctuations de la vitesse de rotation de la Terre. La

contribution prépondérante aux variations de la vitesse angulaire de rotation de la Terre, est associée à la fluctuation bimensuelle de la durée du jour estimée à 0,5 ms (cf Chap. 4, Sec. 4.3, Tab. 4.5, p. 123). À partir de la relation 4.125, p. 122, il vient, pour une variation de la durée du jour δLOD sur l'intervalle de temps δt :

$$\dot{\omega}_e = \frac{\delta \omega_e}{\delta t} = - \frac{\omega_e}{LOD_0} \frac{\delta LOD}{\delta t}. \quad (B.6)$$

Avec les valeurs numériques ci-après :

$$\omega_e = 7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s},$$

$$LOD_0 = 86400 \text{ s}$$

$$\delta LOD = 1 \text{ ms},$$

$$\delta t = 0,5 \text{ mois},$$

il vient un ordre de grandeur de $|\dot{\omega}_e|$ estimé à 10^{-18} rad/s^2 .

En assimilant la quantité $\|\mathbf{X}_P^e\|_2$ à la valeur du rayon de la Terre ($6,4 \times 10^6 \text{ m}$), l'ordre de grandeur du terme $\dot{\omega}_e \|\mathbf{X}_P^e\|_2$ peut être estimé par :

$$\dot{\omega}_e \|\mathbf{X}_P^e\|_2 = 10^{-18} \times 10^7 = 10^{-11} \text{ ms}^{-2} = 10^{-3} \mu\text{Gal} = 1 \text{ nGal}.$$

Toute mesure de cet ordre de grandeur étant impossible avec les dispositifs actuels, nous la négligeons dorénavant. L'expression retenue pour le majorant M_1 , déduite de la relation B.5 (p. 406), s'écrit donc :

$$M_1 = \omega_e^2 \|\mathbf{X}_P^e\|_2 + 2\omega_e \|\dot{\mathbf{X}}_P^e\|_2 + \|\ddot{\mathbf{X}}_P^e\|_2. \quad (B.7)$$

Appliquons à présent un raisonnement similaire pour le terme T_2 ; il vient successivement :

$$\begin{aligned} \|T_2\|_2 &\leq \|C_b^n (\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b + \dot{\Omega}_{ib}^b)\| \|\mathbf{L}_\alpha^b\|_2, \\ &\leq \|C_b^n\| \left(\|\Omega_{ib}^b\|^2 + \|\dot{\Omega}_{ib}^b\| \right) \|\mathbf{L}_\alpha^b\|_2. \end{aligned}$$

À nouveau, la matrice C_b^n étant orthogonale, il vient : $\|C_b^n\| = 1$. En outre, d'après la relation A.8, p. 404, il vient également :

$$\Omega_{ib}^b (\Omega_{ib}^b)^T = -\Omega_{ib}^b \Omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_y^2 + \omega_z^2 & -\omega_x \omega_y & -\omega_x \omega_z \\ -\omega_x \omega_y & \omega_x^2 + \omega_z^2 & -\omega_y \omega_z \\ -\omega_x \omega_z & -\omega_y \omega_z & \omega_y^2 + \omega_z^2 \end{bmatrix},$$

où ω_x , ω_y , et ω_z désignent les composantes du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}_{ib}$ dans le repère b .

La seule valeur propre non nulle de la matrice $\Omega_{ib}^b (\Omega_{ib}^b)^T$ étant $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \|\boldsymbol{\omega}_{ib}\|_2^2 = \omega_{ib}^2$, il en résulte :

$$\|\Omega_{ib}^b\| = \omega_{ib}.$$

Par un raisonnement similaire sur la matrice $\dot{\Omega}_{ib}^b$, il vient :

$$\|\dot{\Omega}_{ib}^b\| = \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}\|_2 = \dot{\omega}_{ib}.$$

La majorant M_2 de la norme du terme T_2 dépend donc explicitement de la longueur du bras de levier ; en effet, il s'exprime par :

$$M_2 = (\omega_{ib}^2 + \dot{\omega}_{ib}) \left\| \mathbf{L}_\alpha^b \right\|_2. \quad (\text{B.8})$$

Ramené à l'unité de longueur du bras de levier, le majorant M_2 est seulement lié à la vitesse angulaire ω_{ib} et sa dérivée $\dot{\omega}_{ib}$. Ainsi, l'amplitude du terme T_2 , pour une longueur de bras de levier donnée, est-elle d'autant plus importante que la vitesse et l'accélération d'ensemble du véhicule, sont, elles-mêmes, élevées.

Les coordonnées du vecteur rotation ω_{ib} sont données, de façon directe, par les mesures de trois gyromètres à axes d'orthogonaux. Lorsque ces dernières ne sont pas disponibles et que l'attitude du véhicule est rendue par les angles de roulis (η), tangage (χ) et lacet (α), l'estimation du majorant M_2 reste néanmoins possible. Une décomposition possible du vecteur rotation ω_{ib}^b s'exprime par :

$$\omega_{ib}^b = \omega_{nb}^b + C_b^n (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n), \quad (\text{B.9})$$

où les vecteurs rotation ω_{nb}^b , ω_{ie}^n et ω_{en}^n proviennent respectivement des variations d'attitude du véhicule, de la rotation de la Terre et de la rotation d'ensemble du véhicule par rapport à la Terre. Ces derniers sont complètement déterminés connaissant les angles d'attitudes η , χ , α , leurs dérivées premières $\dot{\eta}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\alpha}$, la longitude λ et la latitude géographique φ du porteur, et leurs dérivées premières $\dot{\lambda}$, $\dot{\varphi}$. Quant à la matrice C_b^n , elle dépend uniquement des angles d'attitude via les relations A.3 et A.4, p. 403. Toutes ces grandeurs proviennent de systèmes de positionnement et d'orientation, tels les systèmes GNSS multi-antennes ou les centrales inertielles.

Les relations donnant les vecteurs rotation impliqués dans la relation B.9, sont les suivantes :

$$\omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} -\dot{\eta} - \dot{\alpha} \sin \chi \\ \dot{\alpha} \cos \chi \sin \eta - \dot{\chi} \cos \eta \\ -\dot{\chi} \sin \eta - \dot{\alpha} \cos \chi \cos \eta \end{bmatrix}; \quad (\text{B.10})$$

$$\omega_{ie}^n = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_e \cos \varphi \\ \omega_e \sin \varphi \end{bmatrix}; \quad (\text{B.11})$$

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\lambda} \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Annexe C

Équation de Fredholm de première espèce

La recherche d'une formulation alternative du problème de la gravimétrie mobile (cf Chap. 6, Sec. 6.2, §6.2.3, §§6.2.3.1) a conduit à une équation connue sous le nom d'équation intégrale de Fredholm. La théorie complète de cette équation est menée notamment dans COURANT et HILBERT (1953). Cette annexe explique en quoi la résolution de l'équation de Fredholm de première espèce demeure un problème mal posé.

C.1 Problème bien posé

C'est le mathématicien français Jacques Hadamard (Versailles, 1865 – Paris, 1963) qui a énoncé la définition rigoureuse d'un problème bien posé. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces de fonctions munis d'une topologie et soit $(\mathcal{P})$ le problème suivant :

étant donné un opérateur K^a de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ et une fonction $g \in \mathcal{G}$, trouver une fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que $K(f) = g$.

a. L'opérateur K peut contenir également des conditions aux limites.

Le problème $(\mathcal{P})$ sera dit *bien posé* si et seulement si :

1. pour tout $g \in \mathcal{G}$, il existe une solution au problème $(\mathcal{P})$;
2. cette solution est unique dans $\mathcal{F}$;
3. la dépendance de f vis-à-vis de g est continue pour les topologies définies sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Les conditions 1 et 2 imposent l'inversibilité de l'opérateur K . La condition 3 traduit simplement la continuité de l'opérateur inverse K^{-1} pour les topologies respectives de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$.

Tout problème qui ne satisfait pas les trois conditions de Hadamard est dit *mal posé*. Il nécessite l'utilisation de méthodes approchées de résolution appelées *méthodes de régularisation*. Les deux leviers sur lesquels jouer pour régulariser un problème mal posé sont : le choix des espaces de fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ou la modification du noyau K .

La vérification des trois conditions de Hadamard s'avère parfois très difficile. En général, c'est la condition de continuité du noyau inverse 3 qui est la plus aisée à démontrer. L'existence et l'unicité de la solution au problème $(\mathcal{P})$ demeurent la plupart du temps des questions ouvertes.

C.2 L'équation de Fredholm

L'équation de Fredholm de première espèce est une équation intégrale qui lie deux fonctions réelles f et g , définies respectivement sur deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in J, \quad \int_I K(x, y) f(y) dy = g(x), \quad (\text{C.1})$$

où $K(x, y)$ est le noyau du problème définie sur $J \times I$.

La détermination de la fonction f satisfaisant C.1 constitue un problème de type $(\mathcal{P})$. En pratique, il est très rare que le problème soit bien posé, particulièrement en raison du non respect des conditions 2 et 3 de Hadamard. Considérons, à titre d'illustration, le problème $(\mathcal{P})$ avec les données suivantes (ANDRIEUX, 2016) :

- $K(x, y) = x \sin y$;
- $I = J = [0 ; \pi]$;
- $g(x) = x$.

Un calcul intégral simple montre que toute fonction f_n définie sur $[0 ; \pi]$ pour tout entier $n > 1$ par :

$$f_n(y) = \frac{1}{2} + \sin ny,$$

est solution du problème; l'unicité n'est donc pas vérifiée.

De plus, considérons la fonction $g_{n,\varepsilon}$ définie sur J , pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n > 1$ donnés, par :

$$g_{n,\varepsilon}(x) = g(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\pi K(x, y) \sin(ny) dy.$$

Cette fonction s'obtient en appliquant l'équation de Fredholm à la fonction $f_{n,\varepsilon}$ donnée par :

$$f_{n,\varepsilon}(y) = f(y) + \frac{1}{\varepsilon} \sin(ny),$$

où f est telle que $\int_0^\pi K(x, y) f(y) dy = 0$.

Le lemme de Lebesgue stipule que pour tout noyau $K(x, y)$ de carré intégrable sur J , il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi K(x, y) \sin(ny) dy = 0.$$

Par conséquent, si $\|\dots\|$ désigne la norme 2 sur l'espace $L^2(J)$ (ou $L^2(I)$) des fonctions de carré intégrable, il vient, pour ε fixé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_{n,\varepsilon} - g\| = 0.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, la différence entre les fonctions $g_{n,\varepsilon}$ et g peut être rendue arbitrairement petite. En revanche, dès que $n \geq 1$, il vient :

$$\|f_{n,\varepsilon} - f\| = \frac{1}{\varepsilon} \|\sin(ny)\| = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\int_0^\pi \sin^2(ny) dy} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

L'écart entre les solutions $f_{n,\varepsilon}$ et f étant indépendant de l'entier n , il ne peut être rendu arbitrairement petit. Ainsi, la continuité de la solution f vis-à-vis de la donnée g n'est pas satisfaite puisqu'une variation arbitrairement petite de la donnée $\|g_{n,\varepsilon} - g\|$, obtenue pour n suffisamment grand, peut coexister avec une variation arbitrairement grande de la solution $\|f_{n,\varepsilon} - f\|$, obtenue pour ε suffisamment petit. La solution de l'équation de Fredholm apparaît donc très sensible aux fluctuations de la donnée, ce qui présage d'une forte sensibilité au bruit dans les applications pratiques.

La régularisation du problème $(\mathcal{P})$ comportant une équation de Fredholm de première espèce, apparaît donc comme une nécessité impérieuse pour les applications pratiques. Parmi les méthodes de régularisation, celle retenue pour les traitements de données en gravimétrie mobile est due à TIKHONOV et ARSENIN (1977). Elle consiste à rechercher parmi les solutions du problème $(\mathcal{P})$, celle qui minimise la fonctionnelle $T_\mu(f)$, dite de Tichonov, définie par :

$$T_\mu(f) = \|K(f) - g\|_{\mathcal{G}}^2 + \mu^2 \|f\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (\text{C.2})$$

où μ est un réel qui joue le rôle de *paramètre de régularisation*.

Le paramètre μ contrôle le degré de lissage de la solution. C'est donc en fin de compte un paramètre de filtrage – à l'image de la bande passante des filtres passe-bas de l'approche classique – qui réapparaît dans le traitement des données sous une forme différente.

Annexe D

Modèle linéaire généralisé

La détermination d'une solution approximative des équations 6.62 et 6.63 (cf Chap. 6, Sec. 6.2, §6.2.3, §§6.2.3.1, p. 225) consiste à obtenir une solution optimale du *modèle linéaire généralisé*. Cette annexe décrit la solution optimale selon le critère des *moindres carrés* et donne ses propriétés principales. L'essentiel des éléments théoriques de cette annexe est tiré de PHAM (2003).

D.1 Le modèle linéaire

D.1.1 Formulation

Supposons acquises n observations m_t , $t \in \llbracket 1, n \rrbracket$ d'une variable aléatoire m dont les variations s'expriment en fonction de p variables $a_1, a_2, \dots, a_p$ qui ont pris les valeurs $(a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{pt})$ pour $t \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le modèle qui décrit la relation entre m et y est dit linéaire lorsque la relation entre la *variable expliquée* y et les *variables explicatives* $a_1, a_2, \dots, a_p$ est de la forme :

$$m_t = y_1 a_{1t} + y_2 a_{2t} + \dots + y_p a_{pt} + \varepsilon_t, \quad t \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\text{D.1})$$

où $(y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ et ε_t est un terme perturbateur qui regroupe les contributions à la variable m_t qui ne sont pas linéairement reliées aux variables explicatives.

Une formulation matricielle de ce modèle peut être obtenue à partir des définitions suivantes :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_t \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{p1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{pn} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

où

- $\mathbf{M}$ est le vecteur des n observations de la variable expliquée,
- $\boldsymbol{\varepsilon}$, le vecteur des n réalisations de la perturbation,
- $\mathbf{Y}$, le vecteur des p paramètres inconnus à déterminer,
- $\mathbf{A}$, la matrice $n \times p$ dont chaque colonne correspond à n observations de l'une des p variables explicatives a_k , $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Ainsi, la forme matricielle du modèle linéaire D.1 s'écrit-elle :

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}. \quad (\text{D.3})$$

D.1.2 Hypothèses fondamentales du modèle linéaire

Ces hypothèses sont d'une importance capitale pour apprécier correctement le degré de pertinence du modèle linéaire. Elles sont au nombre de quatre et s'expriment comme suit :

- (H1) l'espérance de la perturbation $\boldsymbol{\varepsilon}$ est nulle : $\mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$;
- (H2) la matrice A est non aléatoire;
- (H3) le rang de la matrice A est égal à p ;
- (H4) la matrice de covariance $\mathbb{V}(\boldsymbol{\varepsilon})$ de $\boldsymbol{\varepsilon}$ s'exprime par : $\mathbb{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \sigma_0^2 Q$ où $\mathbb{E}(\dots)$ représente l'opérateur espérance et Q est une matrice carrée $n \times n$ définie, positive et σ_0 un réel positif.

L'hypothèse (H1) indique simplement, qu'en moyenne, les perturbations au modèle linéaire sont nulles. Selon l'hypothèse (H2), la modélisation des observations $\mathbf{Y}$ s'effectue conditionnellement aux valeurs observées des variables explicatives $a_1, a_2, \dots, a_p$. L'hypothèse (H3) traduit la non redondance des observations des variables explicatives; en effet, si le rang de A était inférieur à p , il y aurait au moins une variable explicative pour laquelle le vecteur colonne de ses observations serait une combinaison linéaire des vecteurs colonnes des autres variables explicatives. Cette dernière serait donc superflue dans l'explication des observations $\mathbf{Y}$.

Dans le cas où la matrice Q de l'hypothèse (H4) est égale à la matrice identité I_n , les perturbations vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) &= \sigma_0^2, \quad \text{pour } t \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t'}) &= 0, \quad \text{pour } t' \neq t. \end{aligned}$$

Toutes les perturbations ε_t ont alors la même variance σ_0^2 et leurs covariances sont nulles; c'est ce qui s'appelle l'*homoscédasticité* des perturbations. Le cas général correspond à l'*hétéroscédasticité*.

D.1.3 Estimateur des Moindres Carrés Généralisés (MCG)

Rechercher l'estimateur $\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}}$ des moindres carrés généralisés revient à résoudre le problème d'optimisation ($\mathcal{P}$) suivant :

$$(\mathcal{P}) : \min_{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p} S(\mathbf{Y}) \quad \text{avec} \quad S(\mathbf{Y}) = (\mathbf{M} - A\mathbf{Y})^T Q^{-1} (\mathbf{M} - A\mathbf{Y}).$$

Remarquons que l'expression de $S(\mathbf{Y})$ s'interprète comme le carré de la norme du vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$ obtenue par la métrique induite sur $\mathbb{R}^n$ par la matrice définie positive Q^{-1} . Le produit scalaire entre deux vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ de $\mathbb{R}^n$ muni de cette métrique s'exprime en effet par :

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_{Q^{-1}} = \mathbf{v}_1^T Q^{-1} \mathbf{v}_2. \quad (\text{D.4})$$

Le carré de la norme du vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour cette métrique est donc donné par :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{Q^{-1}}^2 = \langle \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Q^{-1}} = \boldsymbol{\varepsilon}^T Q^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{M} - A\mathbf{Y})^T Q^{-1} (\mathbf{M} - A\mathbf{Y}) = S(\mathbf{Y}).$$

Dans le cas de l'homoscédasticité des perturbations ($Q^{-1} = I_n$), la métrique sur $\mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre que la métrique euclidienne et l'expression précédente coïncide avec la somme des carrés des perturbations :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{I_n}^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2.$$

L'estimateur MCG s'obtient par la relation suivante :

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}} = (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} \mathbf{M}. \quad (\text{D.5})$$

La relation D.5 indique que l'estimateur reste inchangé si la matrice Q est remplacée par λQ où λ est une constante réelle strictement positive. L'estimateur $\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}}$ est donc unique, alors que la matrice de covariance Q est définie à une constante multiplicative près.

D.2 Propriétés statistiques de l'estimateur MCG

D.2.1 Espérance et variance

Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), l'estimateur MCG est *sans biais*, autrement dit :

$$\mathbb{E}(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}}) = \mathbf{Y}. \quad (\text{D.6})$$

Si, de plus, l'hypothèse (H4) est vérifiée, alors la matrice de covariance de l'estimateur MCG s'exprime par :

$$\mathbb{V}(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}}) = \sigma_0^2 (A^T Q^{-1} A)^{-1}. \quad (\text{D.7})$$

La quantité $\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}} - \mathbf{Y}$ représente l'*erreur d'estimation*. Son espérance est nulle, d'après l'équation D.6. En revanche, sa variance peut être déterminée en combinant les équation D.5 et D.3, ce qui donne successivement :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}} - \mathbf{Y} &= (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} (A\mathbf{Y} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{Y}, \\ &= \underbrace{(A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} A \mathbf{Y}}_{I_p} + (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{Y}, \\ &= (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned}$$

d'où il résulte, par propagation de la variance :

$$\mathbb{V}(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}} - \mathbf{Y}) = (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} \mathbb{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1},$$

et, sachant que $\mathbb{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_0^2 Q$, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}} - \mathbf{Y}) &= \sigma_0^2 (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T \underbrace{Q^{-1} Q}_{I_n} A (A^T Q^{-1} A)^{-1}, \\ &= \sigma_0^2 \underbrace{(A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} A}_{I_p} (A^T Q^{-1} A)^{-1}, \\ &= \sigma_0^2 (A^T Q^{-1} A)^{-1}. \end{aligned}$$

La matrice $\sigma_0^2 (A^T Q^{-1} A)^{-1}$ correspond donc également à la variance de l'erreur d'estimation :

$$\mathbb{V}(\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}} - \mathbf{Y}) = \sigma_0^2 (A^T Q^{-1} A)^{-1}. \quad (\text{D.8})$$

D.2.2 Théorème d'Aitken

Le théorème d'Aitken, appelé aussi théorème de Gauss-Markov généralisé, stipule que :

Dans le modèle généralisé D.3 (p. 413) sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), (H4), l'estimateur MCG est l'estimateur de variance minimale dans l'ensemble des estimateurs linéaires en $\mathbf{M}$ et sans biais du vecteur $\mathbf{Y}$.

Il est qualifié d'estimateur « BLUE » (Best Linear Unbiased Estimator).

La matrice de covariance d'un estimateur $\hat{\mathbf{Y}}$ sera considérée comme inférieure à la matrice de covariance d'un autre estimateur $\tilde{\mathbf{Y}}$ si la différence $\hat{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}$ est une matrice définie, semi-positive¹. Le théorème d'Aitken affirme donc que, sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), (H4), l'estimateur MCG est le meilleur estimateur de $\mathbf{Y}$ parmi tous les estimateurs sans biais de $\mathbf{Y}$ qui dépendent linéairement de $\mathbf{M}$. Cette propriété justifie la terminologie « BLUE » (Best Linear Unbiased Estimator).

1. Une matrice A symétrique, de dimension $n \times n$, est dite définie, semi-positive si pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}^T A \mathbf{u} \geq 0$.

D.2.3 Estimateur de σ_0^2

En posant $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M} - A\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}}$, un estimateur $\hat{\sigma}_0^2$ non biaisé de σ_0^2 est obtenu par la relation :

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T Q^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n - p}. \quad (\text{D.9})$$

D.2.4 Cas de la normalité des perturbations

Dans le cadre du modèle linéaire, une hypothèse **(H5)** de normalité des perturbations peut être ajoutée, ce qui se traduit par :

$$(\text{H5}) : \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma) \text{ où } \Sigma = \sigma_0^2 Q. \quad (\text{D.10})$$

Par conséquent, les observations $\mathbf{M}$ suivent également une loi normale vérifiant :

$$\mathbf{M} \sim \mathcal{N}(A\mathbf{Y}, \Sigma). \quad (\text{D.11})$$

Dans ce cas, l'estimateur MCG coïncide avec l'estimateur du *Maximum de Vraisemblance*. Plus précisément, si $\mathcal{L}$ désigne la fonction de vraisemblance de l'échantillon $\mathbf{M} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ alors l'estimateur MCG satisfait au programme d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}') : \max_{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p} \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{Y}, \Sigma) \text{ avec } \mathcal{L}(\mathbf{M}, \mathbf{Y}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\Sigma)} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{M} - A\mathbf{Y})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{M} - A\mathbf{Y}) \right]. \quad (\text{D.12})$$

Enfin, l'estimateur MCG admet lui-aussi une distribution normale donnée par :

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\text{mcg}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{Y}, \sigma_0^2 (A^T Q^{-1} A)^{-1}). \quad (\text{D.13})$$

Annexe E

Modèle mixte non linéaire

L'approche globale utilisée dans le cadre de la gravimétrie mobile vectorielle requiert la résolution d'équations intégrales vectorielles (Éq. 6.85, p. 240). Ces équations, une fois écrites pour l'ensemble d'un lever, conduisent à la résolution du problème mixte non linéaire $\mathcal{F}(\mathbf{Y}, \mathbf{M}) = \mathbf{0}$ où $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{M}$ désignent respectivement les vecteurs des paramètres et des observations. L'estimation des paramètres par moindres carrés s'appuie sur une formulation différente de celle employée pour le modèle linéaire (cf Annexe D, p. 413). Une présentation synthétique de cette formulation avec ses justifications essentielles est proposée dans cette annexe, selon l'approche suivie par LEICK et al. (2015).

E.1 Formulation

Considérons un lever gravimétrique constitué par N points comportant chacun q mesures, et supposons qu'il faille déterminer, en chaque point, les trois composantes de la perturbation de gravité – ou de pesanteur –. Dans ce cas, le nombre total n d'observations est égal qN . Ces dernières servent à l'estimation de $p = 3N$ paramètres. Par conséquent, les vecteurs $\mathbf{M}$ et $\mathbf{Y}$ appartiennent respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. En outre, chaque équation intégrale vectorielle fournit trois équations scalaires de sorte que la fonction $\mathcal{F}$ est définie de $\mathbb{R}^{n+p}$ dans $\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^p$.

Soit $\tilde{\mathbf{Y}}$ une estimation du vecteur des paramètres correspondant au vecteur des observations $\mathbf{M}$. Il existe alors un vecteur de résidus $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n$ et un appoint $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{y}, \mathbf{M} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}. \quad (\text{E.1})$$

En linéarisant la relation E.1 au point $(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{M})$, il résulte l'équation matricielle suivante :

$$A\mathbf{y} + B\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{W} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}, \quad (\text{E.2})$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{Y}} \right)_{\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{M}}, \\ B &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{M}} \right)_{\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{M}}, \\ W &= \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{Y}}, \mathbf{M}). \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Ainsi définies, les matrices A et B sont de dimensions respectives $p \times p$ et $p \times n$. Le vecteur W appartient à $\mathbb{R}^p$.

Pour tenir compte d'un modèle a priori du vecteur des paramètres, il suffit de compléter la relation matricielle E.2 comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A \\ -I_p \end{bmatrix}}_{A'} \mathbf{y} + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0_{p,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{bmatrix}}_{B'} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}'} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}'} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2p}}, \quad (\text{E.4})$$

où $0_{p,p}$ et $0_{p,n}$ sont deux matrices nulles de dimensions $p \times p$ et $p \times n$ respectivement.

Avec les matrices A' de dimension $2p \times p$, B' de dimension $2p \times (n + p)$ et le vecteur $\mathbf{W}' \in \mathbb{R}^{2p}$ précédemment définis, le vecteur $\mathbf{y}$ des appoints et le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}' \in \mathbb{R}^{n+p}$ vérifient l'équation matricielle :

$$A' \mathbf{y} + B' \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{W}' = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2p}}. \quad (\text{E.5})$$

E.2 Estimateur des moindres carrés

La matrice de covariance Σ du vecteur des résidus $\boldsymbol{\varepsilon}'$ est diagonale par blocs. Elle consiste en la matrice de covariance des observations, de la forme $\sigma_{0,M}^2 Q_M$ et celle des paramètres a priori, de la forme $\sigma_{0,y}^2 Q_y$. La matrice Σ , de dimension $(n + p) \times (n + p)$, s'écrit donc :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{0,M}^2 Q_M & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & \sigma_{0,y}^2 Q_y \end{bmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

L'estimation au sens des moindres carrés du vecteur des paramètres doit conduire à minimiser la quantité $\boldsymbol{\varepsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}'$ tout en respectant la relation E.5. Ce problème consiste en une *minimisation sous contrainte*. Il nécessite la résolution du programme d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) : \min_{\boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{k}, \mathbf{y}} \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi = \boldsymbol{\varepsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}' - 2 \mathbf{k}^T (A' \mathbf{y} + B' \boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{W}'),$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^{2p}$ des $2p$ multiplicateurs de Lagrange.

La recherche des points critiques du problème d'optimisation conduit au système d'équation suivant :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}'} = \Sigma^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}' - B'^T \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}_{n+p} \quad (\text{E.7})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = B' \boldsymbol{\varepsilon}' + A' \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{W}' = \mathbf{0}_{2p} \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} = -A'^T \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}_{2p} \quad (\text{E.9})$$

La relation E.7 donne $\boldsymbol{\varepsilon}' = \Sigma B'^T \hat{\mathbf{k}}$. Après substitution de $\boldsymbol{\varepsilon}'$ dans la relation E.8, il vient :

$$B' \Sigma B'^T \hat{\mathbf{k}} = -(A' \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{W}').$$

En posant :

$$M' = B' \Sigma B'^T, \quad (\text{E.10})$$

il en résulte :

$$\hat{\mathbf{k}} = -M'^{-1} (A' \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{W}').$$

Enfin, en substituant $\hat{\mathbf{k}}$ dans la relation E.9, il découle l'équation à l'inconnue $\hat{\mathbf{y}}$ qui s'écrit :

$$A'^T M'^{-1} (A' \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{W}') = \mathbf{0}_{2p}.$$

L'expression du vecteur des appoints $\hat{\mathbf{y}}$ s'écrit donc :

$$\hat{\mathbf{y}} = - (A'^T M'^{-1} A')^{-1} A'^T M'^{-1} \mathbf{W}', \quad (\text{E.11})$$

et le vecteur des paramètres $\hat{\mathbf{Y}}$ estimés s'exprime par :

$$\hat{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{E.12})$$

Une expression plus aboutie de la solution $\hat{\mathbf{y}}$ peut être obtenue en développant les quantités $A'^T M'^{-1} A'$ et $A'^T M'^{-1} \mathbf{W}'$, compte tenu des définitions des matrices A' , B' , et du vecteur $\mathbf{W}'$ (Éq. E.4, p. 418), des matrices Σ (Éq. E.6, p. 418) et M' (Éq. E.10). Il vient, tous calculs faits :

$$A'^T M'^{-1} A' = \frac{1}{\sigma_{0,M}^2} A^T (B Q_M B^T)^{-1} A + \frac{1}{\sigma_{0,y}^2} Q_y^{-1}.$$

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation, qui est aussi celle de l'estimation $\hat{\mathbf{y}}$, égale l'inverse de la matrice $A'^T M'^{-1} A'$. Il vient donc :

$$\mathbb{V}(\hat{\mathbf{y}}) = \sigma_{0,M}^2 \left(A^T (B Q_M B^T)^{-1} A + \mu^2 Q_y^{-1} \right)^{-1} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\sigma_{0,M}}{\sigma_{0,y}}. \quad (\text{E.13})$$

Munie de cette expression de la matrice $(A'^T M'^{-1} A')^{-1}$, la relation aboutie donnant $\hat{\mathbf{y}}$ s'écrit, tous calculs faits :

$$\hat{\mathbf{y}} = - \left(A^T (B Q_M B^T)^{-1} A + \mu^2 Q_y^{-1} \right)^{-1} A^T (B Q_M B^T)^{-1} \mathbf{W}. \quad (\text{E.14})$$

Les relations E.14 et E.13 sont complètement analogues aux équations 6.65 et 6.66 (p. 229) obtenues dans le cadre du traitement global de la gravimétrie scalaire aérienne (cf Chap. 6, Sec. 6.2, §6.2.3, §§6.2.3.1, p. 225). En particulier, le paramètre μ qui pondère la confiance relative accordée aux observations et au modèle a priori, y joue encore son rôle de paramètre de régularisation.

E.3 Calcul numérique de l'estimateur des moindres carrés

La formulation établie dans la section E.2 (p. 418) nécessite de disposer d'une estimation initiale $\tilde{\mathbf{Y}}$ du vecteur des paramètres. Il est souhaitable d'affiner le programme d'optimisation ($\mathcal{P}$) en réitérant le calcul à partir d'une nouvelle estimation initiale obtenue par l'équation E.12. Un critère d'arrêt possible pour ce processus itératif consiste à évaluer la différence entre les valeurs de la quantité $\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}'$ obtenues respectivement à l'itération k et $k+1$. Soient $(\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}')^{(k)}$ et $(\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}')^{(k+1)}$, ces valeurs en question. Le processus peut être poursuivi jusqu'à ce que l'inégalité :

$$\left| (\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}')^{(k+1)} - (\boldsymbol{\epsilon}'^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\epsilon}')^{(k)} \right| < \epsilon,$$

soit vérifiée pour un réel positif ϵ fixé arbitrairement petit.

Annexe F

Filtre de Kalman

Cette annexe présente de façon synthétique, l'algorithme du filtre de Kalman, ainsi que ses propriétés essentielles. L'équation d'observation de la gravimétrie mobile est par nature non-linéaire (cf Chap. 6, Sec. 6.2, §6.2.3, §§6.2.3.2, p. 242). Le filtrage optimal utilisé en gravimétrie mobile doit donc s'appuyer sur des extensions du filtre de Kalman, applicables aux équations non linéaires. Les formulations de deux de ces extensions sont également données dans cette annexe, qui reprend, pour l'essentiel, l'approche suivie dans SIMON (2006).

F.1 Filtre de Kalman à temps discret

Considérons le système $(\mathcal{S}_{lin})$ formé par les deux équations stochastiques linéaires suivantes :

$$\mathbf{Y}_k = \Theta_{k-1:k} \mathbf{Y}_{k-1} + G_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{k-1} \quad (\text{F.1})$$

$$\mathbf{M}_k = H_k \mathbf{Y}_k + \boldsymbol{\epsilon}_k \quad (\text{F.2})$$

où $\mathbf{Y}_k$ est le vecteur des paramètres à estimer ou vecteur d'état, $\mathbf{M}_k$, le vecteur des mesures, $\mathbf{u}_{k-1}$, le vecteur déterministe de commande, $\Theta_{k-1:k}$, la matrice de transition entre les instants $k-1$ et k ¹, G_{k-1} , la matrice de commande, H_k , la matrice d'observation, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{k-1}$ et $\boldsymbol{\epsilon}_k$, deux bruits blancs non corrélés, qui modélisent, respectivement, le bruit de transition – ou de modélisation – et le bruit de mesure – ou d'observation – et vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_k) &= \mathbf{0}, \\ \mathbb{E}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k) &= \mathbf{0}, \\ \mathbb{E}\left(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_j^T\right) &= Q_k \delta_{kj} \quad \text{avec } \delta_{kj} = 0 \text{ pour } k \neq j \text{ et } \delta_{kk} = 1, \\ \mathbb{E}\left(\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j^T\right) &= R_k \delta_{kj}, \\ \mathbb{E}\left(\boldsymbol{\epsilon}_k \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_j^T\right) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

où Q_k et R_k désignent les matrices de covariance respectives des bruits de transition et de mesure.

Le filtre de Kalman fournit une estimation optimale du vecteur $\mathbf{Y}_k$, étant donné la connaissance approximative de son évolution dynamique (Éq. F.1) et des mesures directes ou indirectes bruitées de ses composantes (Éq. F.2). L'estimation obtenue à l'instant k par le filtre de Kalman se définit, du point de vue théorique, comme *l'espérance conditionnelle* du vecteur $\mathbf{Y}_k$ étant donné toutes les mesures $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_k$ disponibles à l'instant k . Si $\hat{\mathbf{Y}}_k^+$ désigne le vecteur estimé par le filtre de Kalman à l'instant k , il vient alors :

$$\hat{\mathbf{Y}}_k^+ = \mathbb{E}[\mathbf{Y}_k | \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_k]. \quad (\text{F.3})$$

Le symbole « + » est utilisé pour distinguer cette estimation de celle qui pourrait être obtenue à l'instant k sans la mesure $\mathbf{M}_k$. Autrement dit, en notant $\hat{\mathbf{Y}}_k^-$ l'estimation du vecteur $\mathbf{Y}_k$ *a priori*, il viendrait

1. Pour simplifier, nous désignerons systématiquement l'instant d'échantillonnage t_k par le seul indice k .

alors :

$$\hat{\mathbf{Y}}_k^- = \mathbb{E}[\mathbf{Y}_k | \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{k-1}]. \quad (\text{E.4})$$

Le vecteur $\hat{\mathbf{Y}}_k^-$ correspond donc à l'estimation du vecteur $\mathbf{Y}_k$ déduit du vecteur d'état $\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+$ estimé à l'instant $k-1$ à partir du modèle de transition seul, sans prendre en compte la mesure $\mathbf{Y}_k$ disponible à l'instant k .

Le filtre de Kalman permet également l'évaluation des matrices de covariance des vecteurs d'état $\hat{\mathbf{Y}}_k^-$ et $\hat{\mathbf{Y}}_k^+$ à l'instant k . Elles seront notées dorénavant P_k^- et P_k^+ respectivement, et sont définies par :

$$P_k^- = \mathbb{E} \left[(\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k^-) (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k^-)^T \right]; \quad (\text{E.5})$$

$$P_k^+ = \mathbb{E} \left[(\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k^+) (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k^+)^T \right]. \quad (\text{E.6})$$

L'initialisation du filtre de Kalman suppose la connaissance a priori d'un vecteur d'état initial $\mathbf{Y}_0$ et sa matrice de covariance. N'ayant aucune mesure encore réalisée à l'instant $k=0$, il est raisonnable de considérer que la meilleure estimation du vecteur d'état initial coïncide avec son espérance, ce qui se traduit par :

$$\hat{\mathbf{Y}}_0^+ = \mathbb{E}[\mathbf{Y}_0]. \quad (\text{E.7})$$

La matrice de covariance P_0^+ , fixée a priori, dépend de notre incertitude sur les composantes du vecteur $\mathbf{Y}_0$. Elle serait théoriquement égale à la matrice nulle, en cas de certitude absolue sur les valeurs des composantes du vecteur $\mathbf{Y}_0$. Son expression théorique est donnée par :

$$P_0^+ = \mathbb{E} \left[(\mathbf{Y}_0 - \hat{\mathbf{Y}}_0^+) (\mathbf{Y}_0 - \hat{\mathbf{Y}}_0^+)^T \right]. \quad (\text{E.8})$$

Le filtrage de Kalman opère ensuite en deux étapes distinctes dites de *prédiction* et de *correction*. L'étape de prédiction consiste à estimer le vecteur d'état $\hat{\mathbf{Y}}_1^-$ à l'instant 1^- (resp. $\hat{\mathbf{Y}}_k^-$ à l'instant k^-) à partir de la seule connaissance du modèle d'évolution F.1, sans tenir compte de la mesure $\mathbf{M}_1$ (resp. $\mathbf{M}_k$) disponible à l'instant 1 (resp. k). En prenant l'espérance conditionnelle des deux membres de l'équation F.1, il vient :

$$\hat{\mathbf{Y}}_1^- = \Theta_{0:1} \hat{\mathbf{Y}}_0^+ + G_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \quad (\text{E.9})$$

$$\text{resp. } \hat{\mathbf{Y}}_k^- = \Theta_{k-1:k} \hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+ + G_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}. \quad (\text{E.10})$$

La propagation de la matrice de covariance depuis le vecteur d'état $\hat{\mathbf{Y}}_0^+$ (resp. $\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+$) jusqu'au vecteur d'état $\hat{\mathbf{Y}}_1^-$ (resp. $\hat{\mathbf{Y}}_k^-$) s'écrit alors :

$$P_1^- = \Theta_{0:1} P_0^+ \Theta_{0:1}^T + Q_0, \quad (\text{E.11})$$

$$\text{resp. } P_k^- = \Theta_{k-1:k} P_{k-1}^+ \Theta_{k-1:k}^T + Q_k. \quad (\text{E.12})$$

L'étape de correction consiste à modifier le vecteur d'état $\hat{\mathbf{Y}}_1^-$ (resp. $\hat{\mathbf{Y}}_k^-$) estimé à l'instant 1 (resp. k) pour tenir compte de la mesure $\mathbf{M}_1$ (resp. $\mathbf{M}_k$) disponible. La théorie probabiliste montre alors qu'à partir du calcul de la *matrice de gain* de Kalman à l'instant 1 (resp. k), donnée par :

$$K_1 = P_1^- H_1^T (H_1 P_1^- H_1^T + R_1)^{-1}, \quad (\text{E.13})$$

$$\text{resp. } K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}, \quad (\text{E.14})$$

le vecteur d'état $\mathbf{Y}_1^+$ résultant de la combinaison optimale des modèles d'évolution et de mesure, s'exprime par :

$$\hat{\mathbf{Y}}_1^+ = \hat{\mathbf{Y}}_1^- + K_1 (\mathbf{M}_1 - H_1 \hat{\mathbf{Y}}_1^-), \quad (\text{E.15})$$

$$\text{resp. } \hat{\mathbf{Y}}_k^+ = \hat{\mathbf{Y}}_k^- + K_k (\mathbf{M}_k - H_k \hat{\mathbf{Y}}_k^-). \quad (\text{E.16})$$

La matrice de covariance P_1^+ (resp. P_k^+) associée à cette estimation, peut s'exprimer par la relation de mise à jour de *Peter Joseph* (1960) :

$$P_1^+ = (I - K_1 H_1) P_1^- (I - K_1 H_1)^T + K_1 R_1 K_1^T, \quad (\text{E.17})$$

$$\text{resp. } P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T. \quad (\text{E.18})$$

Une telle expression de la matrice de covariance est stable vis-à-vis du calcul numérique sur ordinateur. Elle garantit également l'obtention d'une matrice P_1^+ (resp. P_k^+) symétrique, définie, positive dès lors que P_1^- (resp. P_k^-) possède déjà ces propriétés.

D'un point de vue pratique, la détermination des matrices de covariance P_k^- et P_k^+ et du filtre de Kalman K_k ne dépend pas des mesures $\mathbf{M}_k$, mais seulement des matrices $\Phi_{k-1:k}$, H_k , Q_k et R_k . Ces grandeurs peuvent donc être calculées préalablement à toute opération de mesure, ce qui permet un gain de temps de calcul considérable pour le filtrage en temps réel. Par ailleurs, l'incertitude formelle sur les estimations, représentée à chaque instant, par la matrice P_k , peut également s'évaluer à l'avance, sans disposer des mesures. Cet avantage disparaît lorsqu'au moins l'une des équations E.1 ou E.2, est non linéaire.

F.2 Propriétés fondamentales du filtre de Kalman

Considérons à nouveau le système ($\mathcal{S}_{lin}$) et cherchons le filtre causal qui conduit à une estimation $\hat{\mathbf{Y}}_k$ du vecteur d'état $\mathbf{Y}_k$. L'erreur d'estimation $\mathbf{e}_k(\hat{\mathbf{Y}}_k)$ à l'instant k , s'exprime par :

$$\mathbf{e}_k(\hat{\mathbf{Y}}_k) = \mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k. \quad (\text{E.19})$$

Puisque le vecteur d'état $\hat{\mathbf{Y}}_k$ obéit à un modèle d'évolution stochastique (Éq. E.1), et son estimation $\hat{\mathbf{Y}}_k$ dépend des mesures bruitées (Éq. E.16), l'erreur $\mathbf{e}_k(\hat{\mathbf{Y}}_k)$ est un vecteur aléatoire. La recherche d'une estimation optimale du vecteur d'état consiste à minimiser la norme de l'erreur, selon la métrique induite par une matrice de pondération S_k symétrique, définie, positive. Autrement dit, l'estimation $\hat{\mathbf{Y}}_k$ minimise à chaque instant k , la quantité :

$$\|\mathbf{e}_k(\mathbf{Y}_k)\|_{S_k} = \sqrt{\mathbb{E}[\mathbf{e}_k^T S_k \mathbf{e}_k]}. \quad (\text{E.20})$$

Si S_k est, de plus, une matrice diagonale dont les éléments sont $s_{ii}(k)$, $i = 1, 2, \dots, N$, alors la quantité définie par l'équation E.20, se ramène à la racine carrée d'une somme pondérée des espérances des carrés des composantes $e_i(k)$ de l'erreur :

$$\|\mathbf{e}_k(\mathbf{Y}_k)\|_{S_k} = \sqrt{\sum_{i=1}^N s_{ii}(k) \mathbb{E}[e_i(k)^2]}.$$

Le filtre de Kalman constitue la solution de ce problème de minimisation dès lors qu'en plus des hypothèses mentionnées dans la section E.1, les bruits $(\tilde{\mathbf{e}}_k)_k$ et $(\mathbf{e}_k)_k$ sont *gaussien*. S'ils ne le sont pas, le filtre de Kalman fournit néanmoins la meilleure estimation parmi celles qui s'expriment en fonction d'une combinaison linéaire des mesures $\mathbf{M}_k$.

La quantité $\mathbf{I}_k = \mathbf{M}_k - H_k \hat{\mathbf{Y}}_k^-$ est appelée *innovation*. Elle constitue la part de la mesure qui contient de l'information sur le nouvel état estimé $\mathbf{Y}_k^+$. L'innovation est un bruit blanc, de matrice de covariance $(H_k P_k^- H_k^T + R_k)$. Cette propriété est utilisée pour vérifier le bon fonctionnement du filtre de Kalman. Si l'espérance et la matrice de covariances empiriques de l'innovation ne sont pas celles attendues, les paramètres des modèles d'évolution et de mesure doivent être réexaminés, même en temps réel.

F.3 Extensions aux équations non linéaires

Lorsque le système regroupant les modèles d'évolution et de mesure est formé par des équations stochastiques non linéaires, le filtre de Kalman n'est plus applicable et une nouvelle formulation du problème est nécessaire. Considérons, par exemple, le système ($\mathcal{S}$) défini par :

$$\mathbf{Y}_k = \Phi_{k-1:k}(\mathbf{Y}_k) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k, \quad (\text{F.21})$$

$$\mathbf{M}_k = F_k(\mathbf{Y}_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad (\text{F.22})$$

où $\Phi_{k-1:k}$ et F_k sont deux fonctions non linéaires du vecteur d'état $\mathbf{Y}_k$ et où les bruits d'évolution $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ et de mesure $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ satisfont les mêmes hypothèses que celles données dans la section F.1.

Supposons donnée une « trajectoire de référence » formée par la suite de vecteurs d'état $(\mathbf{Y}_k^{(0)})_k$, suffisamment proche de l'estimation optimale de $\mathbf{Y}_k$ pour considérer la différence $\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k^{(0)}$ comme infinitésimale. Si, de plus, les fonctions $\Phi_{k-1:k}$ et F_k sont différentiables, alors il vient par un développement de Taylor premier ordre au point $\mathbf{Y}_k^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k &\approx \Phi_{k-1:k}(\mathbf{Y}_{k-1}^{(0)}) + \left. \frac{\partial \Phi_{k-1:k}}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\mathbf{Y}_{k-1}^{(0)}} (\mathbf{Y}_{k-1} - \mathbf{Y}_{k-1}^{(0)}), \\ \mathbf{M}_k &\approx F_k(\mathbf{Y}_k^{(0)}) + \left. \frac{\partial F_k}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\mathbf{Y}_k^{(0)}} (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k^{(0)}). \end{aligned}$$

En posant, pour tout instant $k \geq 1$:

$$\mathbf{u}_{k-1} = \Phi_{k-1:k}(\mathbf{Y}_{k-1}^{(0)}) - \mathbf{Y}_k^{(0)},$$

et en considérant les appoints $\mathbf{y}_k = \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_k^{(0)}$ et les pseudo-mesures $\mathbf{m}_k = \mathbf{M}_k - F_k(\mathbf{Y}_k^{(0)})$, il est possible d'écrire un système linéaire stochastique de la forme :

$$\mathbf{y}_k = \phi_{k-1:k} \mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k, \quad (\text{F.23})$$

$$\mathbf{m}_k = h_k \mathbf{y}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad (\text{F.24})$$

où $\phi_{k-1:k}$ et h_k sont les matrices jacobienues définies par :

$$\phi_{k-1:k} = \left. \frac{\partial \Phi_{k-1:k}}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\mathbf{Y}_{k-1}^{(0)}}, \quad (\text{F.25})$$

$$h_k = \left. \frac{\partial F_k}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\mathbf{Y}_k^{(0)}}. \quad (\text{F.26})$$

Le filtre de Kalman devient donc applicable pour estimer les appoints $\mathbf{y}_k$ à partir des pseudo-mesures $\mathbf{m}_k$. Une telle extension constitue le *filtre de Kalman discret linéarisé*.

Une variante possible qui n'utilise pas de trajectoire de référence, se base sur un développement de Taylor de la relation F.21 autour du vecteur d'état estimé $\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+$ à l'instant $k-1$, et un second développement de la relation F.22 autour du vecteur d'état prédit $\hat{\mathbf{Y}}_k^-$. Il vient alors les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k &\approx \Phi_{k-1:k}(\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+) + \left. \frac{\partial \Phi_{k-1:k}}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+} (\mathbf{Y}_{k-1} - \hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+), \\ \mathbf{M}_k &\approx F_k(\hat{\mathbf{Y}}_k^-) + \left. \frac{\partial F_k}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\hat{\mathbf{Y}}_k^-} (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k^-). \end{aligned}$$

Sachant que $\hat{\mathbf{Y}}_k^- = \Phi_{k-1:k}(\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+)$ et en posant, pour tout instant $k \geq 1$:

$$\mathbf{u}_{k-1} = \left. \frac{\partial \Phi_{k-1:k}}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+} (\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^- - \hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+),$$

il est à nouveau possible d'écrire un système linéaire stochastique de la forme :

$$\mathbf{y}_k = \phi_{k-1:k} \mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1} + \tilde{\mathbf{e}}_k, \quad (\text{E27})$$

$$\mathbf{m}_k = h_k \mathbf{y}_k + \mathbf{\varepsilon}_k, \quad (\text{E28})$$

à partir des relations suivantes :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_k^-, \quad \mathbf{m}_k = \mathbf{M}_k - F_k(\hat{\mathbf{Y}}_k^-), \quad \phi_{k-1:k} = \left. \frac{\partial \Phi_{k-1:k}}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\hat{\mathbf{Y}}_{k-1}^+}, \quad \text{et} \quad h_k = \left. \frac{\partial F_k}{\partial \mathbf{Y}_k} \right|_{\hat{\mathbf{Y}}_k^-}.$$

Cette variante de la formulation du filtre de Kalman est dite *étendue* ou « EKF » (Extended Kalman Filter). Dans cette formulation, les matrices $\phi_{k-1:k}$ et h_k dépendent de l'état estimé à l'instant $k-1$, ce qui interdit toute prédétermination de ces dernières. La limite inhérente à cette théorie est l'hypothèse implicite qui stipule que l'état estimé à l'instant k reste très proche du vecteur d'état $\hat{\mathbf{Y}}_k^-$. Lorsque cette hypothèse n'est plus vérifiée en pratique, le filtre diverge irrémédiablement. L'utilisation d'un filtre de Kalman « unscented » (JULIER et UHLMANN, 1997) peut alors s'avérer indispensable pour pouvoir opérer un filtrage de Kalman.

Liste des acronymes

- AAG** Airborne Absolute Gravimetry. 158
- AGNES** Automated GNSS Network for Switzerland. 376
- AGU** American Geophysical Union. 369
- AHRS** Attitude and Heading Reference System. 190
- AMIES** Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société. 365
- ANR** Agence Nationale de la Recherche. v
- AQG** Absolute Quantum Gravimeter. 160
- AUV** Autonomous Underwater Vehicle. 171, 202, 287, 290–292, 373
- BGI** Bureau Gravimétrique International. 47, 68, 69, 73, 150, 153, 156, 157, 168, 169
- BIPM** Bureau International des Poids et Mesures. 122, 160
- BRGM** Bureau de Recherches Géologiques et Minières. 377
- CESSUR** Connaissance et tEchnologie du Sous-Sol pour son exploitation et Usage duRable. 374
- CGS** Centimètre, Gramme, Seconde. 15
- CHAMP** CHAllenging Mini – satellite Payload for geophysical research and application. 128–130
- CIFRE** Convention Industrielle de Formation par la REcherche. 381
- CLS** Collecte Localisation Satellites. 139, 141, 144
- Cnam** Conservatoire National des Arts & Métiers. 391
- CNES** Centre National d'Études Spatiales. 128, 138–140, 318, 374, 375
- CNRS** Centre National de la Recherche Scientifique. 152, 286
- CPER** Contrat de Plan État-Région. 374
- DGA** Direction Générale de l'Armement. 373, 374, 381
- DLR** Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt. 128, 129
- DORIS** Doppler Orbitography Radio Integrated System. 118
- DVL** Doppler Velocity Log. 210, 292
- EGG1** Electrostatic Gravity Gradiometer. 162
- EGG2** Exploration Gravity Gradiometer. 162
- EGM 2008** Earth Gravitational Model 2008. 42
- EGU** European Geosciences Union. 368
- EIGEN** European Improved Gravity model of the Earth by New techniques. 128
- EMQ** Erreur Moyenne Quadratique. 210, 292
- ENSG** École Nationale des Sciences Géographiques. iv, 391
- ENSTA** École Nationale Supérieure des Techniques Avancées. 396

- EPFL** École Polytechnique Fédérale de Lausanne. 386
- ESA** European Space Agency. 129, 163
- ESGT** École Supérieure des Géomètres et Topographes. iv, 277
- ESO** Espaces & SOciétés. 307, 375
- ETHZ** École Polytechnique Fédérale de Zürich. 151, 157, 158, 192, 194, 376
- FEDER** Fonds Européen de Développement Régional. 375
- FOF** Flotte Océanique Française. 374
- G2** Groupement de recherche en Géodésie & Géophysique. 363–366
- GADDS** Geophysical Archive Data Delivery System. 150
- GeF-L2G** Géomatique & Foncier. v, 277, 286, 287, 307, 309, 310, 373–375
- GFZ** GeoForschungsZentrum ou German Research Center for Geosciences. 128, 138
- GGI** Gravity Gradiometer Instrument. 161
- GGL** Geodesy and Geodynamics Lab. 192, 376
- GGOS** Global Geodetic Observing System. 128
- GMT** The Generic Mapping Tools. 42, 47, 68, 69, 73, 114, 134, 135, 193
- GNSS** Global Navigation Satellite System. 118, 128, 137, 139, 161, 165, 189, 190, 199, 200, 209, 210, 216, 239, 242, 244, 246, 247, 249, 250, 267, 268, 272, 273, 280–282, 285, 292, 305–307, 353, 354, 374, 376, 397
- GOCE** Gravity field and steady state Ocean Circulation Explorer mission. 129, 130, 138, 162, 294, 295, 306, 315, 331, 335, 336, 339, 340, 345, 349, 350, 352, 353, 355
- GPS** Global Positioning System. 128, 129, 155, 193–195, 198, 199, 292, 397
- GRACE** Gravity Recovery and Climate Experiment. 128–130, 138, 143, 164, 349, 355
- GRACE – FO** GRACE Follow On. 138
- GRAV-D** Gravity for the Redefinition of the American Vertical Datum. 155
- GRGS** Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale. 318, 396
- GRS 80** Geodetic Reference System 1980. 39, 352, 401
- HCERES** Haut Conseil de l'Évaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur. v
- IAG** International Association of Geodesy. 42, 128, 364
- IAS** International Astronomical Union. 118
- ICGEM** International Centre for Global Earth Models. 42, 130, 134, 135
- IERS** International Earth Rotation and Reference Systems Service. 118, 122
- IFREMER** Institut Français de Recherche pour l'Exploration de la Mer. 151, 152, 154, 171, 200, 202, 286–288, 290, 373
- IGFS** International Gravity Field Service. 42, 368
- IGN** Institut National de l'information Géographique et Forestière. 148, 150, 277, 382, 391
- IGN69** Institut Géographique National 1969. 165
- IGSN71** International Gravity Standardization Net 1971. 152
- IMU** Inertial Measurement Unit. 199
- INS** Inertial Navigation System. 189, 239, 267
- InSAR** Interferometric Synthetic Aperture Radar. 374
- INSU** Institut National des Sciences de l'Univers. 152, 374, 377, 382

- IPEV** Institut Polaire français Paul Émile Victor. 152
- IPGP** Institut de Physique du Globe de Paris. 162, 164
- IPGS** Institut de Physique du Globe de Strasbourg. 374, 375
- IRD** Institut de Recherche pour le Développement. 152
- IRIS** Incorporated Research Institutions for Seismology. 316
- ISAE** Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace. 396
- IUGG** International Union of Geodesy and Geophysics. 48, 118, 364, 367, 370
- JAMSTEC** Japan Agency for Marine-Earth Science and TEChnology. 274, 303
- JPL** Jet Propulsion Laboratory. 122, 163
- LAGEOS** LAser GEOdynamics Satellites. 128–130
- LAREG** Laboratoire de Recherches en Géodésie. 162, 164, 277, 286, 373, 376
- LBL** Long BaseLine. 210
- LDO** Laboratoire Domaines Océaniques. 286, 287, 310, 373, 374
- LIENSs** Littoral, ENvironnement et Sociétés. 309, 373
- LMM** Laboratoire Manceau de Mathématiques. 268
- LNE** Laboratoire National d'Essais. 160
- LOD** Length Of Day. 122
- MEMS** Micromachined ElectroMechanical System. 199, 304, 305, 307
- NASA** National Aeronautics and Space Administration. 129, 138, 163
- NCEI** National Centers for Environmental Information. 153, 154
- NGS** National Geodetic Survey. 155, 156
- NOAA** National Oceanic and Atmospheric Administration. 42, 154, 156
- ONERA** Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales. 128, 130, 162, 163, 295, 304, 306, 309, 373
- OSUNA** Observatoire des Sciences de l'Univers Nantes-Atlantique. 373
- PACES** Pan American Center for Earth and environmental Studies. 150
- PPK** Post-Processed Kinematic. 282
- PREM** Preliminary Reference Earth Model. 96, 331–334, 336, 337, 344–346, 351–353
- QGF98** Quasi-Géoïde de la France 1998. 165
- RAF09** Référence Altimétrique de la France 2009. 165
- RBF** Réseau de Base Français. 148, 150
- RESIF** Réseau Sismologique et géodésique Français. 160
- RGF** Réseau Géodésique Français. 165
- RGF93** Réseau Géodésique Français 1993. 307
- ROV** Remote Operated Vehicle. 170, 171
- RPDLL** Région Des Pays de La Loire. 277, 374, 375, 381
- RTK** Real-Time Kinematic. 282, 307
- SAR** Synthetic Aperture Radar. 353, 374

- Scripps** Scripps Institution of Oceanography. 151
- SGG** Superconducting Gravity Gradiometer. 162
- SGN** Service de la Géodésie et du Nivellement. 148, 150
- SHOM** Service Hydrographique et Océanographique de la Marine. 152, 153, 162, 242, 244, 250, 286, 310, 373
- SI** Système International. 15, 16, 27
- SINS** Strapdown Inertial Navigation System. 292
- SISMER** Systèmes d'Informations Scientifiques pour la MER. 154
- SLR** Satellite Laser Ranging. 118, 130
- SPIGA** Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences et Architecture. v
- SQUID** Superconducting QUantum Interferometer Device. 162
- SST-hl** Satellite – to – Satellite Tracking in high – low mode. 128–130
- SST-l** Satellite – to – Satellite Tracking in low – low mode. 129
- SYRTE** SYstèmes de Référence Temps – Espace. 122, 160, 163
- TGIR** Très Grandes Infrastructures de Recherche. 374
- TOSCA** Terre, Océan, Surfaces Continentales, Atmosphère. 374, 375
- UBO** Université de Bretagne Occidentale. 286
- UKF** Unscented Kalman Filter. 301
- USBL** Ultra-Short BaseLine. 210, 292
- VLBI** Very Long Baseline Interferometry. 118
- WGM2012** World Gravity Map 2012. 47, 68, 69, 73, 114, 330
- WGS84** World Geodetic System 1984. 350, 352, 355
- WHOI** Wood Holes Oceanographic Institution. 276

Liste des figures

1.1	Les précurseurs de la gravimétrie	5
1.2	Isaac Newton (1642 – 1727)	7
1.3	Version française des « Principia »	8
1.4	Les « fondateurs » de la gravimétrie moderne	9
1.5	La figure de la Terre (1749)	11
2.1	Attraction gravitationnelle d'une distribution continue de masse	15
2.2	Surface équipotentielle du champ de gravité	16
2.3	Potentiel gravitationnel d'un cylindre homogène	17
2.4	Conditions de continuité du champ gravitationnel au passage d'une surface limite . . .	21
2.5	Coordonnées sphériques	23
2.6	Définition d'une surface approximativement sphérique	29
2.7	Ellipsoïde faiblement aplati	31
2.8	Couche ellipsoïdale faiblement aplatie	33
3.1	Carte de l'ondulation du géoïde mondial ($0,1^\circ \times 0,1^\circ$)	42
3.2	Carte de l'anomalie à l'air libre ($2' \times 2'$) publiée par le BGI	47
3.3	Graphe représentant les variations de la pesanteur normale le long d'un méridien depuis le pôle nord jusqu'au pôle sud.	49
3.4	Surfaces de niveaux et dénivelées	53
3.5	Effet d'un excès local de masse sur les surfaces de niveau	54
3.6	Fonction de Stokes modifiée.	61
4.1	Définition des coordonnées géographiques	65
4.2	Carte de l'anomalie de Bouguer complète publiée par le BGI	68
4.3	Carte de la topographie mondiale d'après le modèle ETOPO1	69
4.4	Structure interne de la Terre vue par la sismologie	70
4.5	Compensation isostatique selon le modèle d'Airy	71
4.6	Compensation isostatique selon le modèle de Pratt	72
4.7	Carte de l'anomalie isostatique publiée par le BGI	73
4.8	Vue du modèle de topographie unidimensionnelle, à variation sinusoïdale, pour l'étude de la compensation isostatique du relief	74
4.9	Mise en équation du problème du calcul de l'effet gravitationnel de la topographie compensée	75
4.10	Décomposition d'une couche superficielle de matière qui représente la distribution de masse d'une topographie sinusoïdale	76
4.11	Modèle de topographie sinusoïdale compensée selon le modèle de Pratt	80
4.12	Décomposition de la croûte en couches planes pour le calcul de l'attraction gravitationnelle d'une topographie sinusoïdale compensée	81
4.13	Déflexion de la lithosphère sous l'effet de la topographie	85
4.14	Degré de compensation isostatique	89
4.15	Coupe schématique d'une dorsale océanique	90

4.16	Graphes de l'évolution de la profondeur de l'océan en fonction de la distance à l'axe d'une dorsale océanique	93
4.17	Modélisation du rebond post-glaciaire	103
4.18	Anomalie à l'air libre sur la Baie d'Hudson	114
4.19	Rocher de Lövgrunde (Suède) et carte des vitesses de surrection	116
4.20	Polhodie	120
4.21	Variation à long terme de la durée du jour	122
5.1	Satellite CHAMP	128
5.2	Satellites GRACE	129
5.3	Satellite GOCE	129
5.4	Erreurs formelles par degré sur l'ondulation du géoïde pour le modèle spatial GGM05G	134
5.5	Carte de l'ondulation du géoïde donnée par le modèle spatial GGM05G	135
5.6	Carte de l'anomalie à l'air libre donnée par le modèle spatial GGM05G	136
5.7	Comparaison spectrale des modèles GGM05G et EIGEN-6C4	137
5.8	Comparaison spectrale des modèles RGM2008 et EIGEN-6C4	138
5.9	Satellites altimétriques	140
5.10	Principe de l'altimétrie satellitaire	141
5.11	Modèle de topographie dynamique moyenne CNES-CLS09	142
5.12	Modèle de surface océanique moyenne CNES-CLS11	144
5.13	Comparaisons de modèles donnant la surface moyenne océanique	145
5.14	Mesure gravimétrique au sol	146
5.15	Deux exemples de gravimètres relatifs	147
5.16	Gravimètre supraconducteur igrav TM	148
5.17	Gravimètre absolu balistique 10 TM	148
5.18	Vue de la chambre de chute et du chariot de réception du gravimètre absolu balistique « FG5-X TM »	149
5.19	Vue en coupe du gravimètre A10 TM	150
5.20	Couverture gravimétrique de la France réalisée par l'IGN	151
5.21	Gravimètre relatif marin et sa plate-forme stabilisée	152
5.22	Gravimètre marin KSS31 TM	153
5.23	Navires océanographiques de IFREMER	153
5.24	Carte des levers marins gravimétriques	155
5.25	Gravimètre relatif aéroporté TAGS-6 TM	156
5.26	Levers aérogravimétriques du projet américain « GRAV-D »	157
5.27	Vue du gravimètre FG-5L TM dans un avion	159
5.28	Bilan des techniques d'acquisition de la gravimétrie moderne	160
5.29	Vue du gravimètre atomique AQQ TM	162
5.30	Gradiomètre aéroporté Air-3D FTG TM	162
5.31	Gradiomètre mobile FTGeX TM	163
5.32	Vue des accéléromètres utilisés sur GOCE	163
5.33	Vue du gradiomètre à atomes froids développé au JPL	164
5.34	Simulation d'un calcul de géoïde à partir de données erronées	168
5.35	Données gravimétriques disponibles en France	169
5.36	Couverture gravimétrique de la Guyane	170
5.37	Gravimètre sous-marin INO TM	171
5.38	ROV « Victor »	171
5.39	Vue du navire « Europe » et de l'AUV	172
5.40	Vue de la résidence « Le Signal » à Soulac-sur-Mer en Gironde (33)	173
6.1	Observateur immobile dans un repère inertiel	181
6.2	Situation S ₁ . L'observateur est animé d'un mouvement de translation	182
6.3	Situation S ₂ . L'observateur effectue un mouvement de rotation	183

6.4	Repères utilisés en gravimétrie mobile	187
6.5	Définition des angles d'attitude	192
6.6	Configurations instrumentales rencontrées dans les systèmes mobiles de gravimétrie	193
6.7	Profils du lever aéroporté « Alpes 1998 »	195
6.8	DeHavilland Twin Otter™	196
6.9	Profil du lever aéroporté « Alpes 1998 »	196
6.10	Vue de l'avion DeHavilland Twin Otter™ utilisé pour le lever « Alpes 1998 »	197
6.11	Graphe de l'incertitude sur l'orientation (σ_η, σ_χ) du véhicule en fonction de la longueur d'onde du champ mesuré (λ)	200
6.12	Graphe donnant l'erreur de stabilisation σ_{E_3} en fonction de la longueur d'onde λ)	201
6.13	Profils des campagnes de gravimétrie aérienne « Alpes 1998 » et « Corse 2001 »	203
6.14	Profils des campagnes de gravimétrie marine « Sainte-Maxime 2006 » et sous-marine « ESS-AUV 2012 »	204
6.15	Évolution du terme M_1 sur les profils P1 et P3 du lever aéroporté « Alpes 1998 »	206
6.16	Évolution des termes M_1 et M_2 sur le profil P3 du lever aéroporté « Corse 2001 »	207
6.17	Évolution des termes M_1 et M_2 sur le profil P1 du lever marin « Sainte-Maxime 2006 »	208
6.18	Évolution des termes M_1 et M_2 sur le profil P1 du lever sous-marin « ESS-AUV 2012 »	209
6.19	Graphes de l'écart-type d'Allan de trois accéléromètres électrostatiques du type QA 3000™ de chez ®Honeywell	211
6.20	Graphes des réponses en fréquence des filtres exponentiels mis au point pour le traitement des données du lever aérien « Alpes 1998 »	215
6.21	Exemple de filtrage sur l'anomalie à l'air libre réalisé sur le profil L10 du lever « Alpes 1998 »	216
6.22	Cartes de l'anomalie de Bouguer établies à partir des données gravimétriques du lever aéroporté « Alpes 1998 »	217
6.23	Vues en coupe du capteur implanté sur le gravimètre aérien/marin SA™ commercialisé par ®Micro-g LaCoste	219
6.24	Spectres de la tension du ressort, de l'accélération verticale et de l'anomalie à l'air libre prolongée depuis le sol, mesurés sur le profil L10 du lever « Alpes 1998 »	220
6.25	Réponse en fréquence du fléau déduite de l'équation 6.48 (p. 220) après identification des paramètres caractéristiques du capteur	221
6.26	Carte des écarts aux points de croisement dont l'étude statistique permet de d'évaluer l'incertitude de mesure du lever gravimétrique aérien	222
6.27	Exemple de production des données gravimétriques de référence	223
6.28	Graphes de l'évolution de l'incertitude et l'erreur de mesure pour le lever « Alpes 1998 »	224
6.29	Tirages aléatoires de l'accélération d'Eötvös sur un profil du lever « Alpes 1998 »	231
6.30	Coordonnées sphériques et angle formé par deux rayons-vecteurs sur la sphère	232
6.31	Variances par degré de l'anomalie de gravité donnée par le modèle de géopotential EGM 2008	233
6.32	Nuage de points formé par les estimations empiriques de la fonction de covariance locale	235
6.33	Graphes de l'évolution des quantités $\ M - A\hat{Y}_\mu\ _{Q_M^{-1}}$ et $\ \hat{Y}_\mu\ _{Q_Y^{-1}}$ en fonction du paramètre de régularisation μ	236
6.34	Carte de la perturbation de gravité calculée suivant l'approche globale sur les Alpes	237
6.35	Perturbation de gravité corrigée de l'effet de la topographie et l'anomalie de Bouguer sur la même zone	238
6.36	Profils réalisés lors de la campagne « Sainte-Maxime 2006 »	244
6.37	Profil d'étude pour expérimenter le filtre de Kalman	245
6.38	Profils réalisés lors de la campagne gravimétrique GM01 en Méditerranée	245
6.39	Vedette du SHOM utilisée lors du lever « Sainte-Maxime 2006 »	246
6.40	Mesures dynamiques des trois composantes de l'accélération de rappel le long du profil d'étude	247
6.41	Mesures dynamiques de la position de la vedette le long du profil d'étude	248
6.42	Mesures dynamiques de l'attitude de la vedette le long du profil d'étude	249

6.43	Perturbation de pesanteur observable sur 2 km du profil d'étude	252
6.44	Densités spectrales de puissance des trois composantes de l'accélération de rappel mesurées sur le profil d'étude	254
6.45	Résultat de l'estimation de la composante « up » de la perturbation de pesanteur δg_U^n le long du profil d'étude par filtrage de Kalman.	255
6.46	Résultat de l'estimation de la composante « up » de la perturbation de pesanteur δg_U^n le long du profil d'étude après combinaison linéaire des estimations « aller » et « retour »	256
6.47	Résultat de l'estimation des composantes horizontales « east » et « north » de la perturbation de pesanteur (δg_E^n et δg_N^n) le long du profil d'étude après combinaison linéaire des estimations « aller » et « retour »	257
6.48	Résultat de l'estimation des composantes horizontales « east » et « north » de la perturbation de pesanteur (δg_E^n et δg_N^n) le long du profil d'étude après combinaison linéaire des estimations « aller » et « retour »	258
6.49	Graphes des fonctions de pondération de la matrice de covariance d'un processus de Markov d'ordre p à coefficients liés	261
6.50	Cartes des composantes East , North et Up de la perturbation de pesanteur $\delta \mathbf{g}^n$ déduites du modèle de géopotentiel EGM2008	263
6.51	Fonctions d'autocovariance empiriques East-East, North-North et Up-Up déduites des valeurs locales de la perturbation de pesanteur	264
6.52	Fonctions de covariance croisée empiriques East-North, East-Up et North-Up déduites des valeurs locales de la perturbation de pesanteur	265
6.53	Estimation des composantes g_E^n , g_N^n et g_U^n de la pesanteur sur un profil du lever « Sainte-Maxime 2008 » par filtrage de Kalman comportant un modèle de Gauss-Markov	268
6.54	Histogrammes des écarts à la référence pour les valeurs des composantes de la pesanteur de la figure 6.53, p. 6.54)	269
6.55	Gravimètre aérien/marin russe « CHEKAN-AM »	271
6.56	Gravimètre vectoriel mobile « AIRGrav » développé par la société canadienne ®Sander Geophysics Limited (SGL).	272
6.57	Comparaison de profils aériens de la composante horizontale « est » de la perturbation de pesanteur	272
6.58	Gravimètre scalaire aérien GT-1A (ou GT-2A, nouvelle version) développé par la société canadienne ®Canadian Micro Gravity.	273
6.59	Système gravimétrique vectoriel lié « SAGS-4 » (Strapdown Airborne Gravimetry System 4)	274
6.60	Schéma d'ensemble et vues des composants du système gravimétrique vectoriel « SGA-WZ »	275
6.61	Vues du submersible autonome japonais « Urashima » équipé de son système gravimétrique	276
6.62	Profil du gradient de gravité observable au-dessus du plancher océanique à différentes hauteurs en présence d'un dépôt minéral	276
6.63	Vue du gradiomètre constitué des deux accéléromètres vibrants, séparés verticalement d'une distance $L = 50$ cm	277
6.64	Vue et schéma de principe d'un accéléromètre japonais destiné aux submersibles autonomes AUV pour la prospection minière	277
6.65	Raciné carrée de la densité spectrale de puissance du bruit de fond enregistré par un accéléromètre japonais	278
6.66	Vues de l'accéléromètre électrostatique uni-axe « Q-Flex QA-3000 »	280
6.67	Vue des 3 accéléromètres montés sur leur châssis pyramidal	280
6.68	Vues du système « Limo-g » dans son boîtier isotherme une fois monté sur un véhicule routier et sur une vedette hydrographique.	281
6.69	Graphes des évolutions respectives, en fonction de la température, du biais et des facteurs d'échelle en accélération et en température des trois accéléromètres du « Limo-g »	282

6.70 Récepteur 4 antennes ®Ashtech «ADU-2»	282
6.71 Vue de la structure en croix portant les 4 antennes reliées au récepteur 4 antennes «ADU-800»	283
6.72 Vue du montage de la structure en croix portant les antennes du récepteur 4 antennes sur la triade d'accéléromètres	283
6.73 Récepteur multi-antennes ®Ashtech «ADU-800»	284
6.74 Schéma de principe d'un accéléromètre électrostatique de type «Q-Flex QA-3000» . . .	285
6.75 Étalonnage simultané des trois accéléromètres «Q-Flex QA-3000» qui équipent le sys- tème «Limo-g»	286
6.76 Étalonnage du système «Limo-g» en vue d'estimer les coefficients de la matrice de pas- sage C_s^b	287
6.77 Vue du sous-marin autonome «Aster ^x » sur le site de l'IFREMER à Toulon (83)	288
6.78 Vue du sous-marin autonome «Aster ^x » avec Clément Roussel dans le laboratoire «Sys- tèmes sous-marins» sur le site de l'IFREMER à Toulon (83)	289
6.79 Vue du sous-marin autonome «Aster ^x » équipé du système «GRAVIMOB» lors d'un lever de test dans la Darse	290
6.80 Position relatives de deux triades symétriques	291
6.81 Support de montage des trois accéléromètres «Q-Flex QA-3000»	293
6.82 Bâti du système «GRAVIMOB»	293
6.83 Vues de la sphère étanche contenant le système «GRAVIMOB» et installée dans le nez du sous-marin	294
6.84 Vue du capteur réalisant la liaison acoustique navire/sous-marin	294
6.85 Vue du numériseur et de l'inclinomètre de «GRAVIMOB» et de la centrale inertielle PHINST TM	295
6.86 Schéma de principe du gradiomètre embarqué sur le satellite gravimétrique GOCE . . .	297
6.87 Vue 3D de la topographie sous-marine utilisée dans le simulateur	298
6.88 Carte bathymétrique de la zone utilisée dans le simulateur	298
6.89 Cartes des composantes est (east), nord (north) et verticale (up) de l'accélération gravi- tationnelle observable à -2 200 m de profondeur au-dessus du mont sous-marin	299
6.90 Cartes des six éléments du tenseur de Marussi observable à -2 200 m de profondeur dans le repère n au-dessus du mont sous-marin	300
6.91 Graphes de l'erreur d'estimation dans le cas du scénario 1	302
6.92 Graphe de l'erreur d'estimation dans le cas du scénario 2	302
6.93 Graphe de l'erreur d'estimation dans le cas du scénario 3	303
6.94 Graphes de l'évolution des trois composantes de l'accélération gravitationnelle esti- mées par un filtre de Kalman «unscented»	304
6.95 Vue du capteur gravimétrique à MEMS développé par une équipe de l'université de Glasgow en Écosse au Royaume Uni	307
6.96 Vue du bateau rigide utilisé au laboratoire GeF-L2F	309
6.97 Nuage de points et modèle triangulé d'une berge de l'Huisne à Connerré (72)	310
6.98 Schéma de la plate-forme instrumentale sur un véhicule amphibie	311
6.99 Champs de déplacement d'une berge du Loir à Vaas (72) dans la direction Est-Ouest . .	313
7.1 Images de la comète «67P Churyumov Gerasimenko» obtenues depuis la sonde spatiale «Rosetta»	320
7.2 Modélisations de la comète «67P Churyumov Gerasimenko»	321
7.3 Décomposition du volume d'un cube en six tétraèdres	323
7.4 Coordonnées sphériques et tétraèdre $\mathcal{T}$	324
7.5 Potentiel gravitationnel créé par un tétraèdre de densité constante au point distant . . .	327
7.6 Potentiel gravitationnel créé par un tétraèdre de densité constante au point proche pour les degrés de 0 à 10	328
7.7 Potentiel gravitationnel créé par un tétraèdre de densité constante au point proche pour les degrés de 10 à 50	328

7.8	Erreur relative sur les coefficients de Stokes déterminés à l'aide de l'algorithme linéaire	329
7.9	Modélisation de la surface de l'astéroïde EROS 433	330
7.10	Différence entre le potentiel gravitationnel de l'astéroïde EROS 433 obtenu par sa décomposition en harmoniques sphériques et par sa formule analytique (algorithme linéaire)	331
7.11	Différence entre le potentiel gravitationnel de l'astéroïde EROS 433 obtenu par sa décomposition en harmoniques sphériques et par sa formule analytique (intégration numérique)	331
7.12	Accélération gravitationnelle de la comète « 67P Churyumov Gerasimenko » dans un plan médiateur	332
7.13	Distribution de la densité en fonction du rayon géocentrique d'après le modèle PREM .	335
7.14	Graphes de l'évolution de l'aplatissement de la Terre	336
7.15	Graphes de l'erreur cumulée sur le gradient radial V_{rr} produit par une Terre ellipsoïdale	339
7.16	Repérage du point P par ses coordonnées sphériques	341
7.17	Vues en coupe méridienne de la couche ellipsoïdale et de l'orbite utilisées pour la validation de la quadrature de Gauss-Legendre.	343
7.18	Graphes de l'erreur cumulée sur le gradient radial V_{rr} produit par une Terre ellipsoïdale	344
7.19	Définition d'un prisme ellipsoïdal	345
7.20	Définition du prisme ellipsoïdal et du prisme sphérique	345
7.21	Profondeur du modèle géophysique « LITHO1.0 »	347
7.22	Variation de la vitesse des ondes S en fonction de la profondeur d'après le modèle combinant LITHO1.0 et PREM	348
7.23	Cartes des écarts entre les déterminations des gradients de gravité produits par le modèle combiné, obtenues à partir de prismes ellipsoïdaux et de prismes sphériques ajustés	349
7.24	Anomalies du gradient de gravité vertical V_{rr} par rapport au gradient normal WGS84 mesuré par le satellite GOCE	352
7.25	Anomalies du gradient de gravité vertical V_{rr} déduit du modèle combiné	353
7.26	Différences entre les valeurs du gradient de gravité V_{rr} calculées à partir du modèle PREM à l'équilibre hydrostatique et du même modèle non équilibré	354
7.27	Vue d'ensemble des plaques tectoniques Nubie, Somalie et Arabie, ainsi que des principaux rifts	356
7.28	Anomalies du gradient de gravité vertical V_{rr} par rapport au gradient normal WGS84 obtenues par une combinaison des données des missions GOCEGRACE sur l'Afar . . .	357

Liste des tableaux

3.1	Harmoniques sphériques de surface de degrés 0, 1 et 2, d'ordre 0	38
3.2	Paramètres physiques du système de référence GRS 80	40
3.3	Comparaison des valeurs des aplatissements obtenus par une théorie au premier ordre et dans GRS 80	48
3.4	Valeurs numériques des paramètres de l'ellipsoïde équipotentiel du système de référence GRS 80 (MORITZ, 2000). Le demi-grand axe de l'ellipsoïde a constitue, avec les paramètres GM_T , J_2 et Ω , les seuls paramètres de la pesanteur normale dont les valeurs sont posées par définition. Toutes les autres grandeurs en découlent.	48
3.5	Valeurs numériques des paramètres de la pesanteur normale dans le système de référence GRS 80 (MORITZ, 2000).	49
4.1	Tableau récapitulatif des expressions de l'anomalie à l'air libre $\Delta g_{FA}(X)$ et des ondulations du géoïde $N(X)$	84
4.2	Amplitudes des vitesses de surrection suite au rebond post-glaciaire	116
4.3	Variations temporelles de l'anomalie à l'air libre et de l'ondulation du géoïde suite au rebond post-glaciaire	117
4.4	Effets observés dans le mouvement du pôle	121
4.5	Effets observés dans les fluctuations de la rotation terrestre	123
5.1	Modèles globaux de la pesanteur	130
5.2	Écarts quadratiques moyens des ondulations du géoïde obtenues par GNSS nivelés et issues des modèles globaux	139
6.1	Caractéristiques des leviers utilisés pour l'estimation des erreurs systématiques	202
6.2	Intervalles de confiance à 95 % de l'écart des termes M_1 et M_2 à leur profil moyen	205
6.3	Performances de la centrale inertielle PHINS TM commercialisée par ®IXBLUE	212
6.4	Récapitulatif des approches du filtrage utilisées en gravimétrie mobile	214
6.5	Propriétés des filtres exponentiels 1 à 5 dont les réponses en fréquence sont représentées sur la figure 6.20	215
6.6	Tableau récapitulatif des méthodes d'obtention des matrices de covariance des mesures	230
6.7	Origine des différentes quantités impliquées dans l'équation d'observation de la gravimétrie vectorielle	241
6.8	Écarts-types des mesures ayant permis de déterminer la matrice de covariance du bruit de mesure	251
6.9	Écarts-types du bruit de transition qui affectent les composantes du vecteur d'état	253
6.10	Fonctions de pondération de la matrice de covariance d'un processus de Markov d'ordre p à coefficients liés	261
6.11	Valeur du produit βL_c pour tous les ordres p compris entre 1 et 6	262
6.12	Estimations du paramètre β à partir des fonctions empiriques d'autocovariance et de covariance croisée	264
6.13	Performances de l'accéléromètre « Q-Flex QA-3000 »	281
6.14	Définitions de la nature et du niveau des bruits qui affectent les mesures de position, d'orientation et d'accélération lors des scénarios 1, 2 et 3 respectivement	301

7.1 Modèles géophysiques de la Terre 318

Glossaire

Balance du watt : cette expérience consiste à comparer deux puissances d'origine mécanique et électromagnétique respectivement. Elle comprend deux phases distinctes, la première, statique et la seconde, dynamique. Dans la phase statique, le poids P d'une masse m soumise à l'accélération de la pesanteur m est équilibré par la force de Laplace qui s'exerce sur un conducteur de longueur l , parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique uniforme B . L'équation d'équilibre de la balance se traduit par la relation :

$$mg = B l I.$$

La mesure expérimentale du produit BI est particulièrement délicate. Cette mesure s'effectue donc lors d'une phase dynamique durant laquelle le conducteur est déplacé à une vitesse constante v dans le même champ magnétique B que celui de la phase statique, et parcouru par un courant de même intensité I . La force électromotrice induite E aux bornes du conducteur est donc $E = B l v$. En éliminant le produit BI de l'équation d'équilibre, il résulte :

$$mgv = EI.$$

Cette relation traduit bien une égalité entre une puissance mécanique (mgv) et une puissance électrique (EI).

En pratique, l'intensité du courant I est déduite de la mesure de la tension U aux bornes d'une résistance R parcouru par ce courant. Deux effets quantiques macroscopiques sont alors mis à profit pour la mesure des tensions U et E et celle de la résistance R . En premier lieu, l'effet Josephson permet de générer des tensions quantifiées aux bornes d'une jonction « supraconducteur - isolant - supraconducteur » soumise à un rayonnement hyperfréquence de fréquence f . La tension mesurée U est alors proportionnelle à la fréquence f selon la relation :

$$U = \frac{hf}{2e},$$

où h est la constante de Planck et e , la charge élémentaire de l'électron. La quantité $2e/h$ est la constante de Josephson.

En second lieu, l'effet Hall quantique permet des mesures de résistances proportionnelles à la constante de von Kiltzing h/e^2 . La combinaison des mesures des tensions par effet Josephson et de résistances par effet Hall quantique, permet d'exprimer la masse m par une relation qui comporte la seule constante de Planck comme constante fondamentale, soit :

$$m = \frac{4Ah}{g v},$$

où A est une constante.

Cette relation suggère une redéfinition possible du kilogramme à partir d'une valeur conventionnellement exacte de la constante de Planck, indépendante de tout étalon. Cette définition sera d'autant plus exacte que l'incertitude relative sur la masse m sera faible. En supposant

une incertitude relative sur h de 10^{-8} , les autres grandeurs impliquées (A , g et ν) doivent être déterminées à mieux de 10^{-9} .

Le principe de la balance du watt a été conçu par le britannique B. P. Kibble du NPL (National Physical Laboratory). Outre la France (LNE), le Royaume-Uni (NPL), les États-Unis (National Institute of Standards and Technology (NIST)) et la Suisse (@METAS) ont développé leur propre prototype de balance du watt. 160

cycloïde : courbe décrite par le point d'un cercle qui roule sans glisser le long d'une droite. Elle correspond également à la trajectoire d'un mobile dont le mouvement résulterait de la composition d'un mouvement rectiligne uniforme et d'un mouvement circulaire de même vitesse linéaire. Si R désigne le rayon du cercle générateur de la cycloïde, alors chaque arche de cycloïde a pour longueur $8R$. 6

elliptique : soit une équation aux dérivées partielles, linéaire, du second ordre, à une inconnue $u(\mathbf{x})$ scalaire définie sur l'ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ par :

$$-\sum_{i,j} a_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\mathbf{x}) u = d(\mathbf{x}),$$

où, quitte à multiplier l'équation par (-1) , $a_{1,1} \geq 0$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Cette équation est dite *elliptique* si la matrice $A = (a_{i,j})$ est définie, positive.

Pour les équations de Laplace et de Poisson $a_{i,i} = 1$, $b_i = 0$, $c = 0$ et $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. La matrice A est donc la matrice identité qui est bien définie, positive. 13

équation intégrale de Fredholm : dans le cadre des fonctions réelles à support inclus dans $\mathbb{R}$, résoudre une équation de Fredholm² de première espèce revient à déterminer une fonction réelle f définie sur $I \subset \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\forall x \in J \subset \mathbb{R}, \quad \int_I K(x, y) f(y) dy = g(x),$$

où la fonction K définie sur $J \times I$, appelée *noyau*, et la fonction g définie sur J , ont été préalablement données. 224, 407

éther : pour les Anciens, il s'agit d'un fluide très subtil censé remplir les régions de l'univers situées au-delà de l'atmosphère terrestre. Au siècle des lumières, on le concevait aussi parfois comme un milieu matériel fluide et élastique où les particules de matière pouvaient être soit des tourbillons d'éther soit des sources ou puits de ce fluide. Pour les physiciens du XIX^e l'éther est un milieu hypothétique, impondérable, invisible, élastique, non détectable, emplissant l'univers et la matière, qui permet la propagation des ondes électromagnétiques, comme l'air permet la propagation des ondes sonores.

L'existence de l'éther a été fortement remise en cause par l'expérience de Michelson et Morley (1881). Initialement conçue pour mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther, cette dernière montra qu'un tel mouvement n'avait pas lieu. Suite à la publication de la théorie de la Relativité Restreinte par Albert Einstein en 1905, l'hypothèse de l'éther fut progressivement abandonnée par les physiciens au profit de celle de l'invariance de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. 9

Principe d'Équivalence : En 1907, dans une expérience de pensée, Einstein imagine une chambre placée dans l'espace, loin de l'influence de la Terre, tirée de plus en plus rapidement à l'aide d'une corde. Son occupant se retrouve collé au plancher de la chambre. En l'absence de repère visuel extérieur, il est alors incapable de dire s'il se trouve dans le champ de gravité de

2. mathématicien suédois (Stockholm, 1866 – Stockholm, 1927)

la Terre, ou s'il est soumis à une accélération. En d'autres termes, l'effet d'un champ gravitationnel homogène est équivalent à celui d'une accélération uniforme. Einstein désigne alors ce phénomène comme étant le Principe d'Équivalence. Ce dernier peut être vérifié expérimentalement par la chute libre des corps. Les expériences les plus récentes ont montré que lorsque deux corps sont en chute libre, la différence des rapports entre leurs masses gravitationnelles et leurs masses inertielles n'excède pas 10^{-13} . La mission MICROSCOPE devrait améliorer cette valeur d'un facteur 100. 138

Bibliographie

- AKYILMAZ, O., A. USTUN, C. AYDIN, N. ARSLAN, S. DOGANALP, C. GUNEY, H. MERCAN, S. O. UYGUR, M. UZ et O. YAGCI. 2016, « High resolution gravity field determination and monitoring of regional mass variations using low-Earth orbit satellites », rapport technique, Project n°113Y155 (final report). 130
- ALLAN, D. W. 1966, « Statistics of atomic frequency standards », in *Proc. of IEEE*, vol. 54, p. 221–230. 210
- AMANTE, C. et B. W. EAKINS. 2009, « ETOPO1 1 arc-minute global relief model : Procedures, data sources and analysis », rapport technique, NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24, National Geophysical Data Center, NOAA, 19 pp., doi :10.7289/V5C8276M. 42, 69, 135, 136
- ANDERSEN, O. et P. KNUDSEN. 2010, « The DTU10 mean sea surface and mean dynamic topography – Improvements in the Arctic and coastal zone », in *OST-ST, Lisbon, Portugal, October 2010*. 145
- ANDRIEUX, S. 2016, *Introduction aux problèmes inverses*, Cours du master M2 de Mécanique de l'université Paris - Saclay, parcours « Modeling and Simulation in Structural Mechanics and Coupled Systems ». 410
- ANNECCHIONE, M. A., P. KEATING et M. CHOUTEAU. 2006, « Validating airborne vector gravimetry data for resource exploration », *Geophysics*, vol. 71, n° 6, doi :10.1190/1.2360188, p. J71 – J80. 214
- ARAYA, A., T. KANAZAWA, M. SHINOHARA, T. YAMADA, H. FUJIMOTO, K. IIZASA et T. ISHIHARA. 2011, « A gravity gradiometer to search for submarine ore deposits », in *Underwater Technology (UT), 2011 IEEE Symposium on and 2011 Workshop on Scientific Use of Submarine Cables and Related Technologies (SSC)*, p. 1–3, doi :10.1109/UT.2011.5774123. 274, 277
- ARAYA, A., T. KANAZAWA, M. SHINOHARA, T. YAMADA, H. FUJIMOTO, K. IIZASA et T. ISHIHARA. 2012, « Gravity gradiometer implemented in AUV for detection of seafloor massive sulfides », in *Proceedings of the OCEANS 2012 IEEE Hampton Roads Conference & Exhibition, (IEEE Catalog Number CFP12OCE-DVD), 120601–087*. 274
- ARAYA, A., M. SHINOHARA, T. KANAZAWA, H. FUJIMOTO, T. YAMADA, T. ISHIHARA, K. IIZASA et S. TSUKIOKA. 2015, « Development and demonstration of a gravity gradiometer onboard an autonomous underwater vehicle for detecting massive subseafloor deposits », *Ocean Engineering*, vol. 105, doi : 10.1016/j.oceaneng.2015.06.008, p. 64–71. 274, 276, 277, 278
- ASGHARZADEH, M. F., R. R. B. VON FRESE, H. R. KIM, T. E. LEFTWICH et J. W. KIM. 2007, « Spherical prism gravity effects by Gauss-Legendre Quadrature integration », *Geophys. J. Int.*, vol. 169, p. 1–11. 340
- BALLU, V., J. DUBOIS, C. DEPLUS, M. DIAMENT et S. BONVALOT. 1998a, « Crustal structure of the Mid-Atlantic Ridge south of the Kane Fracture zone from seafloor and sea surface gravity data », *J. Geophys. Res.*, vol. 103, n° B2, p. 2 615–2 631. 171, 172
- BALLU, V., J. A. HILDEBRAND et S. C. WEBB. 1998b, « Seafloor gravity evidence for hydrothermal alteration of the sediments in Middle Valley, Juan de Fuca Ridge », *Marine Geology*, vol. 150, doi : 10.1016/S0025-3227(98)00024-3, p. 99–111. 171, 172, 289
- BALMINO, G. 1994, « Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body », *Cel. Mech. Dyn. Ast.*, vol. 60, p. 331–364. 321, 332
- BALMINO, G., N. VALES, S. BONVALOT et A. BRIAIS. 2012, « Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies », *J. Geod.*, vol. 86, n° 7, doi :10.1007/s00190-011-0533-4, p. 499–520. 47, 69

- BARNES, G. J., J. BARRAUD, J. LUMLEY et M. DAVIE. 2008, « Advantages of multi-tensor high resolution gravity gradient data », in *8th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts*, 3587–3590. 162
- BARTHELMES, F. et W. KÖHLER. 2012, *The Geodetist's Handbook*, vol. 10, chap. dedicated to the International Centre for Global Earth Models (ICGEM), Journal of Geodesy, Springer, p. 932 – 934. 42, 130, 134, 137, 138, 139
- BASSIN, C., G. LASKE et G. MASTERS. 2000, « The current limits resolution for surface wave tomography in North America », *EOS Trans AGU*, vol. 81, n° F897. 319
- BAUMANN, H., E. E. KLINGELÉ et I. MARSON. 2011, « Absolute airborne gravimetry : a feasibility study », *Geophysical Prospecting*, doi :10.1111/j.1365-2478.2011.00987.x, p. 1 – 12 (published online). 158, 159
- BELL, R. E., V. A. CHILDERS, R. A. ARKO, D. D. BLANKENSHIP et J. M. BROZENA. 1999, « Airborne gravity and precise positioning for geologic applications », *J. Geophys. Res.*, vol. 104, p. 15 281 – 15 292. 214
- BERTIN, X. et E. CHAUMILLON. 2005, « Apports de la modélisation historique sur la compréhension des évolutions des bancs de sable estuariens », *C. R. Géoscience*, vol. 337, p. 1 375–1 383. 174
- BETTAPUR, S., J. RIES, R. EANES, P. NAGEL, N. PIE, S. POOLE, T. RICHTER et H. SAVE. 2015, « Evaluation of the GGM05 mean Earth gravity models », in *Geophysical Research Abstracts*, vol. 17, EGU2015-4153. 130, 134
- BIZOUARD, C. 2014, *Le mouvement du pôle de l'heure au siècle : modélisation géophysique*, Presses Académiques Francophones, Observatoire de Paris, SYRTE. 118, 120, 121, 123
- BOEDECKER, G. et A. STÜRZE. 2006, *SAGS4 — StrapDown Airborne Gravimetry System Analysis*, chap. Observation of the Earth System from Space, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-540-29522-8, p. 463–478, doi :10.1007/3-540-29522-4_30. URL http://dx.doi.org/10.1007/3-540-29522-4_30. 274
- BONVALOT, S., G. BALMINO, A. BRIAIS, M. KUHN, A. PEYREFITTE, N. VALES et AL. 2012, « World Gravity Map », Bureau Gravimétrique International (BGI), map, CGMW-BGI-CNES-IRD Ed., Paris. 47, 68, 69, 73, 114, 332
- BOUMAN, J., J. EBBING, M. FUCHS, J. SEBERA, L. VERENA, W. SZWILLUS, R. HAAGMANS et P. NOVAK. 2016, « Satellite gravity gradient grids for geophysics », *Sci. Rep.*, vol. 6, n° 21050, doi :10.1038/srep21050. 352, 354, 357
- BOY, J.-P. 2007, « Modélisation des surcharges induites par les fluides superficiels », Mémoire pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches, École et Observatoire des Sciences de la Terre (EOST), université Louis Pasteur, Strasbourg. 96
- BROCKMANN, J., N. ZEHENTNER, E. HÖCK, R. PAIL, I. LOTH, T. MAYER-GÜRR et W.-D. SCHUH. 2014, « EGM_TIM_RL05 : An independent geoid with centimeter accuracy purely based on the GOCE mission », *Geophys. Res. Lett.*, vol. 41, n° 22, doi :10.1002/2014GL061904, p. 8089–8099. 130
- BRUINSMA, S., C. FÖRSTE, O. ABRIKOSOV, J. MARTY, M. RIO, S. MULET et S. BONVALOT. 2013, « The new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach », *Geophys. Res. Lett.*, vol. 40, doi :10.1002/grl.50716, p. 3607–3612. 130, 131
- BRUINSMA, S., J. MARTY, G. BALMINO, R. BIANCALE, C. FÖRSTE, O. ABRIKOSOV et H. NEUMAYER. 2010, « GOCE gravity field recovery by means of the direct numerical method », in *the ESA Living Planet Symposium 2010, Bergen, June 27 - July 2, Bergen, Norway*. 131

- CARRAZ, O., C. SIEMES, L. MASSOTTI, R. HAAGMANS et P. SILVESTRIN. 2014, « A spaceborne gravity gradiometer concept based on cold atom interferometers for measuring Earth's gravity field », *arXiv:1406.0765v2 [physics.atom-ph]*, doi :10.1007/s12217-014-9385-x. 164
- CHAO, B. F., W. P. O'CONNOR, A. T. C. CHANG, D. K. HALL et J. L. FOSTER. 1987, « Snow load effects on the Earth's rotation and gravitational field 1979-1985 », *J. Geophys. Res.*, vol. 92, n° B9. 165
- CHAO, B. F. et D. P. RUBINCAM. 1989, « The gravitational field of Phobos », *Geoph. Res. Lett.*, vol. 16, p. 859–862. 321
- CHEN, J.-H., S.-C. LEE et D. B. DEBRA. 1994, « Gyroscope free strapdown inertial measurement unit by six linear accelerometers », *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 17, n° 2, doi :10.2514/3.21195, p. 286–290. URL <http://dx.doi.org/10.2514/3.21195>. 305
- CHILDERS, V. A., R. E. BELL et J. M. BROZENA. 1999, « Airborne gravimetry : an investigation of filtering », *Geophysics*, vol. 64, p. 61 – 69. 214
- COURANT, R. et D. HILBERT. 1953, *Methods of mathematical physics*, Interscience Publishers, Inc., New York. 409
- DEPARIS, V. et H. LEGROS. 2000, *Voyage à l'intérieur de la Terre - De la géographie antique à la géophysique moderne. - Une histoire des idées*, CNRS Édition. 3
- DEPARIS, V. et H. LEGROS. 2011a, « La naissance de la gravimétrie. 1 - Les découvertes de Huygens et les développements théoriques de Newton », *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 105, n° 931, p. 243 – 255. 3
- DEPARIS, V. et H. LEGROS. 2011b, « La naissance de la gravimétrie. 2 - Mise en évidence de la variation de pesanteur avec la latitude », *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 105, n° 932, p. 359 – 373. 3
- DEPARIS, V. et H. LEGROS. 2011c, « La naissance de la gravimétrie. 3 - Test de l'attraction newtonienne par des mesures de l'intensité et la direction de la pesanteur effectuées au Pérou par Bouguer », *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 105, n° 934, p. 581 – 590. 3
- DESRUELLE, B., V. MÉNORET, P. VERMEULEN et A. LANDRAGIN. 2014, « Absolute Quantum Gravimeter », in *Colloque G2, Strasbourg, 17-19 novembre 2014*. 161
- DIASCORN, Y. 2009, *Caractérisation des accélérations subies par le ROV Victor 6000*, mémoire de fin d'études, Université de Bretagne Occidentale (UBO), Institut Universitaire Européen de la Mer (IUEM). 289
- DITMAR, P., V. KUZNETSOV, A. A. VAN ECK VAN DER SLUIJS, E. SCHRAMA et R. KLEES. 2006, « DEOS_ - CHAMP-01C_70 : a model of the Earth's gravity field computed from accelerations of the CHAMP satellite », *J. Geod.*, vol. 79, p. 586 – 601. 132
- DOUCH, K. 2015, *Gradiomètre planaire embarqué pour l'étude de la gravité en zones littorales (GREM-LIT)*, thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris. 163
- DOUCH, K., B. CHRISTOPHE, B. FOULON, I. PANET, G. PAJOT-MÉTIVIER et M. DIAMENT. 2014, « Ultra-sensitive electrostatic planar acceleration gradiometer for airborne geophysical surveys », *Measurement Science and Technology*, vol. 25(10), n° 105902, doi :10.1088/0957-0233/25/10/105902. 163
- DOUCH, K., I. PANET, G. PAJOT-MÉTIVIER, B. CHRISTOPHE, B. FOULON, M.-F. LEQUENTREC-LALANCETTE et M. DIAMENT. 2015, « Error analysis of a new planar electrostatic gravity gradiometer for airborne surveys », *J. Geod.*, vol. 89, n° 12, doi :10.1007/s00190-015-0847-8, p. 1217–1231. 163

- DUQUENNE, H. 1999, « Comparaison and combination of a gravimetric quasigeoid with a leveled GPS data set by statistical analysis », *Physics and Chemistry of the Earth*, vol. 24, n° 1. 166
- DUQUENNE, H., A. V. OLESEN, R. FORSBERG et A. GIDSKEHAUG. 2002, « Improvement of the gravity field and geoid around Corsica by aerial gravimetry », in *Gravity and Geoid 2002 - 3rd Meeting of the IGGC*, ed. by I. Tziavos, p. 167 – 172. 157, 170, 202, 203
- DZIEWONSKI, A. M. et D. L. ANDERSON. 1981, « Preliminary Reference Earth Model (PREM) », *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 25, p. 297–356. 96, 318, 335
- DZIEWONSKI, A. M., A. L. HALES et E. R. LAPWOOD. 1975, « Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data », *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 10, p. 12–48. 318
- DÉPREZ, A., C. DOUBRE, F. MASSON et P. ULRICH. 2013, « Seismic and aseismic deformation along the East African Rift System from a reanalysis of the GPS velocity field of Africa », *Geophys. J. Int.*, vol. 193, n° 3, doi :10.1093/gji/ggt085, p. 1353–1369. URL <http://gji.oxfordjournals.org/content/193/3/1353.abstract>. 355, 356
- EBINGER, C. et M. CASEY. 2001, « Continental breakup in magmatic provinces : an Ethiopian example », *Geology*, vol. 29, p. 525–530. 355
- EGG-C. 2014, « GOCE level 2 product data handbook », rapport technique GO-MA-HPF-GS-0110, The European GOCE Gravity Consortium. GOCE high level processing facility. 351
- EUROSION. 2004, « Eurosion Portal : A European initiative for sustainable coastal erosion management », URL <http://www.eurosion.org>. 173
- EVANS, R. 1996, « A seafloor gravity profile across the TAG hydrothermal mound », *Geophys. Res. Lett.*, vol. 23, p. 3447–3450. 289
- FARAHANI, H. H., P. DITMAR, R. KLEES, X. LIU, Q. ZHAO et J. GUO. 2013, « The static gravity field model DGM-1S from GRACE and GOCE data : computation, validation and an analysis of GOCE mission's added value », *J. Geod.*, vol. 87, doi :10.1007/s00190-013-0650-3, p. 843–867. 131
- FEATHERSTONE, W. E. et M. C. DENTITH. 1997, « A geodetic approach to gravity data reduction for geophysics », *Computers & Geosc.*, vol. 23, n° 10, p. 1063 – 1070. 69
- FECHER, T., R. PAIL, T. GRUBER et THE GOCO PROJECT TEAM. 2016, « The combined satellite gravity field model GOCO05c », in *EGU General Assembly, Geophysical Research Abstracts Vol. 18, EGU2016-7696, Vienna, April, 2016*. 130
- FIGUEIREDO, A. G. J., E. A. DE COSTA et C. A. NITTRouer. 1996, « Gas charged sediment in the Amazon submarine delta », *Geo-Mar. Lett.*, vol. 16, p. 31–35. 174
- FITZGERALD, D. J. et H. HOLSTEIN. 2006, « Innovative data processing methods for gradient airborne geophysical data sets », *The Leading Edge*, vol. 25, n° 1, doi :10.1190/1.2164762, p. 87–94. 162
- FLECHTNER, F., C. DAHLE, K. H. NEUMAYER, R. KÖNIG et C. FÖRSTE. 2010, « The release 04 CHAMP and GRACE EIGEN gravity field models », in *System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques*, Springer, édité par F. Flechtner, T. Gruber, A. Güntner, M. Manda, M. Rothacher, T. Schöne et J. Wickert, p. 41–58, doi :978-3-642-10228-8. 131
- FLEISCHER, P., T. H. ORSI, M. D. RICHARDSON et A. L. ANDERSON. 2001, « Distribution of free gas in marine sediments : a global overview », *Geo-Mar. Lett.*, vol. 21, p. 103–122. 174
- FLOODGATE, G. D. et A. G. JUDD. 1992, « The origins of shallow gas », *Cont. Shelf Res.*, vol. 12, p. 145–156. 174

- FÖLDVARY, L., D. SVEHLA, C. GERLACH, M. WERMUTH, T. GRUBER, R. RUMMEL, M. ROTHACHER, B. FROMMKNECHT, T. PETERS et P. STEIGENBERGER. 2005, « Gravity model TUM-2Sp based on the energy balance approach and kinematic CHAMP orbits », in *Reigber, C.; Lühr, H.; Schwintzer, P.; Wücker, J. (eds.) Earth Observation with CHAMP, Results from Three Years in Orbit*, p. 13-18, Springer, ISBN (Print) 978-3-540-22804-2, ISBN (Online) 978-3-540-26800-0, doi : 10.1007/3-540-26800-6_2, 2005. 132
- FÖRSTE, C. et S. L. BRUINSMA. 2016, « EIGEN-6S4 : A time-variable satellite-only gravity field model to d/o 300 based on LAGEOS, GRACE and GOCE data from the collaboration of GFZ potsdam and GRGS Toulouse », rapport technique, GFZ Data Services. URL <http://doi.org/10.5880/icgem.2016.004>. 130
- FÖRSTE, C., S. L. BRUINSMA, O. ABRİKOSOV, J.-M. LEMOINE, T. SCHALLER, H.-J. GÖTZE, J. EBBING, J.-C. MARTY, F. FLECHTNER, G. BALMINO et R. BIANCALE. 2014, « EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse », in *the 5th GOCE User Workshop, Paris, 25-28 November*. 130
- FÖRSTE, C., S. L. BRUINSMA, F. FLECHTNER, J.-C. MARTY, J.-M. LEMOINE, C. DAHLE, O. ABRİKOSOV, K. H. NEUMAYER, R. BIANCALE, F. BARTHELMES et G. BALMINO. 2012, « A preliminary update of the direct approach GOCE processing and a new release of EIGEN-6C », in *the AGU Fall Meeting 2012, San Francisco, USA, 3-7 Dec, Abstract No. G31B-0923*. 131
- FÖRSTE, C., S. L. BRUINSMA, R. SHAKO, J.-C. MARTY, F. FLECHTNER, O. ABRİKOSOV, C. DAHLE, J.-M. LEMOINE, K. H. NEUMAYER, R. BIANCALE, F. BARTHELMES, R. KÖNIG et G. BALMINO. 2011, « EIGEN-6 – A new combined global gravity field model including GOCE data from the collaboration of GFZ-potsdam and GRGS-Toulouse », in *Geophysical Research Abstracts, Vol. 13, EGU2011-3242-2, EGU General Assembly*. 131
- FÖRSTE, C., F. FLECHTNER, R. SCHMIDT, R. KÖNIG, U. MEYER, M. STUBENVOLL, R. AD ROTHACHER, F. BARTHELMES, K. H. NEUMAYER, R. BIANCALE, S. L. BRUINSMA et L. J.-M. 2006, « A mean global gravity field model from the combination of satellite mission and altimetry/gravimetry surface gravity data », in *Geophysical Research Abstracts, Vol. 8, 03462, EGU General Assembly 2006, Vienna, Austria, 02-07 April 2006*. 132
- FÖRSTE, C., F. FLECHTNER, R. SCHMIDT, U. MEYER, R. STUBENVOLL, F. BARTHELMES, R. KÖNIG, K. H. NEUMAYER, M. ROTHACHER, C. REIGBER, R. BIANCALE, S. L. BRUINSMA, J.-M. LEMOINE et R. J. C. 2005, « A new high resolution global gravity field model derived from combination of GRACE and CHAMP mission and altimetry/gravimetry surface gravity data », in *the EGU General Assembly 2005, Vienna, Austria, 24-29 April 2005*. 132
- FÖRSTE, C., F. FLECHTNER, R. SCHMIDT, R. STUBENVOLL, M. ROTHACHER, J. KUSCHE, K. H. NEUMAYER, R. BIANCALE, J.-M. LEMOINE, F. BARTHELMES, S. L. BRUINSMA, R. KÖNIG et U. MEYER. 2008, « EIGEN-GL05C – A new global combined high-resolution GRACE-based gravity field model of the GFZ-GRGS cooperation », in *Geophysical Research Abstracts, Vol. 10, EGU2008-A-03426, SRef-ID : 1607-7962/gra/EGU2008-A-03426, 2008*. 131
- FOURNIER, A., G. HULOT, D. JAULT, W. KUANG, A. TANGBORN, N. GILLET, E. CANET, J. AUBERT et F. LHUILLIER. 2010, « An introduction to data assimilation and predictability in geomagnetism », *Space Science Reviews*, vol. 155, n° 1, doi :10.1007/s11214-010-9669-4, p. 247–291, ISSN 1572-9672. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-010-9669-4>. 351
- VON FRESE, R. R. B., W. J. HINZE et L. W. BRAILE. 1981a, « Spherical-Earth gravity and magnetic anomaly analysis by equivalent source inversion », *Earth Planet. Sci. Lett.*, vol. 53, p. 69–83. 340

- VON FRESE, R. R. B., W. J. HINZE, L. W. BRAILE et A. J. LUCA. 1981b, « Spherical-Earth gravity and magnetic anomaly modeling by Gauss-Legendre Quadrature integration », *Journal of Geophysics*, vol. 49, p. 234–242. 340
- FUJIMOTO, H., T. KANAZAWA, M. SHINOHARA, A. ARAYA, T. YAMADA, K. MOCHIZUKI, T. ISHIHARA et K. IIZASA. 2011, « Development of a hybrid gravimeter system onboard an underwater vehicle », in *Proceedings of the Symposium on Underwater Technology 2011 & Workshop on Scientific Use of Submarine Cables and Related Technologies 2011, Tokyo, Japan, 1111 : IEEE*. 274
- GARCIA-GIL, S., F. VILAS et A. GARCIA-GARCIA. 2002, « Shallow gas features in incised-valley fills (Ria de Vigo, NW Spain) : a case study », *Cont. Shelf Res.*, vol. 22, n° 16, p. 2 303–2 315. 174
- GATTI, A., M. REGUZZONI, F. MIGLIACCIO et F. SANZO. 2014, « Space-wise grids of gravity gradients from GOCE data at nominal satellite altitude », in *the 5th GOCE User Workshop, Paris, 25-28 November*. 130
- GEIGER, R., L. AMAND, A. BERTOLDI, B. CANUEL, W. CHAIBI, C. DANQUIGNY, I. DUTTA, B. FANG, S. GAFFET, J. GILLOT, D. HOLLEVEILLE, A. LANDRAGIN, M. MERZOUGUI, I. RIOU, D. SAVOIE et P. BOUYER. 2015, « Matter-wave laser Interferometric Gravitation Antenna (MIGA) : New perspectives for fundamental physics and geosciences », in *Proceedings of the 50th Rencontres de Moriond "100 years after GR", La Thuile (Italy), 21-28 March 2015 (arXiv :1505.07137v1 [physics.atom-ph])*. 161
- GENEVÈS, G., P. GOURNAY, F. VILLAR, P. PINOT, P. JUNCAR, M. LECOLLINET, L. CHASSAGNE, A. CLAIRON, A. LANDRAGIN, D. HOLLEVILLE, F. PEREIRA DOS SANTOS, J. DAVID, M. BESBES, F. ALVES, S. TOPÇU, D. HADDAD, A. GOSSET, Z. SILVESTRI, P.-A. MEURY, T. MADEC et S. MACÉ. 2007, « La balance du watt : vers une nouvelle définition de l'unité de masse? », *Revue française de métrologie*, vol. 1, n° 9, p. 3–34. 161
- GENTE, R., P. AND POCKALNY, C. DURAND, C. DEPLUS, M. MAIA, G. CEULENEER, C. MÉVEL, M. CANNAT et C. LAVERNE. 1995, « Characteristics and evolution of the segmentation of the Mid-Atlantic ridge between 20°N and 24°N during the last 10 million years », *Earth Planet. Sci. Lett.*, vol. 129, p. 55–71. 171
- GERLACH, C., L. FÖLDVARY, D. SVEHLA, T. GRUBER, M. WERMUTH, N. SNEEUW, B. FROMMKNECHT, H. OBERNDORFER, T. PETERS, M. ROTHACHER, R. RUMMEL et P. STEIGENBERGER. 2003, « A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral », *Geophys. Res. Lett.*, vol. 30, n° 20, doi :10.1029/2003GL018025, p. 2037. 132
- GILARDONI, M., M. REGUZZONI et D. SAMPIETRO. 2016, « GECO : a global gravity model by locally combining GOCE data and EGM2008 », *Stud. Geophys. Geod.*, vol. 60, n° 2, p. 228–247. 130
- GOIGINGER, H., D. RIESER, T. MAYER-GÜRR, R. PAIL, W.-D. SCHUH, A. JÄGGI, A. MAIER et THE GOCO CONSORTIUM TEAM. 2011, « The combined satellite-only global gravity field model GOCO02S », in *Geophysical Research Abstracts, Vol. 13, EGU2011-10571, EGU General Assembly*. 131
- GRAND, S. P. et D. V. HELMBERGER. 1984, « Upper mantle shear structure of North America », *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, vol. 76, p. 399–438. 319
- GRANDIN, R., A. SOCQUET, R. BINET, Y. KLINGER, E. JACQUES, J.-B. DE CHABALIER, G. C. P. KING, C. LASSERRE, S. TAIT, P. TAPPONNIER, A. DELORME et P. PINZUTI. 2009, « September 2005 Manda Hararo-Dabbahu rifting event, Afar (Ethiopia) : Constraints provided by geodetic data », *J. Geophys. Res.*, vol. 114, n° B8, doi :10.1029/2008JB005843, p. n/a–n/a, ISSN 2156-2202. URL <http://dx.doi.org/10.1029/2008JB005843>, b08404. 355

- GRÖSCHEL-BECKER, H. M., E. E. DAVIS et J. M. FRANKLIN. 1994, « Physical properties of massive sulfide from site 856, Middle Valley, northern Juan de Fuca Ridge », in *Mottl, M.J., E.E. Davis, A.T. Fischer and J.F. Slack (eds), Proc. Ocean Drill. Prog. Sci Res.*, vol. 139, p. 721–724. 289
- GUETTE, J. 2001, *La gravimétrie aéroportée guidée : mission méditerranéenne et étalonnage du système d'acquisition*, mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes. 279
- GUÉGUEN, Y. et V. PALCIAUSKAS. 1992, *Introduction à la physique des roches*, Hermann. ISBN : 2-7056-6138-0, 299 p. 174
- HACKNEY, R. I. et W. E. FEATHERSTONE. 2003, « Geodetic versus geophysical perspectives of the "gravity anomaly" », *Geophys. J. Int.*, vol. 154, n° 1, p. 35 – 43. 69
- HAYN, M., I. PANET, M. DIAMENT, M. HOLSCHNEIDER, M. MANDEA et A. DAVAILLE. 2012, « Wavelet-based directional analysis of the gravity field : evidence for large-scale geoid undulations », *Geophys. J. Int.*, vol. 189, n° 3, doi :10.1111/j.1365-246X.2012.05455.x, p. 1430–1456. 319
- HEMPEL, P., B. SPIE et R. SHREIBER. 1994, « Expulsion of shallow gas in the Skagerrak-Evidence from sub-bottom profiling, seismic, hydroacoustic and geochemical data », *Est. Coast Shelf Sci.*, vol. 38, p. 583–601. 174
- HENRIET, J.-P., A. BASTIN et J. DE BROUCK. 1978, « Integration of continuous seismic profiling in geotechnical investigations of the Belgian coast », in *K.V.I.V., Seventh International Harbour Congress*. 174
- HILDEBRAND, J. A., J. M. STEVENSON, P. T. C. HAMMER, M. A. ZUMBERGE, R. L. PARKER, C. G. FOX et P. J. MEIS. 1990, « A seafloor and sea surface gravity survey of axial volcano », *J. Geophys. Res.*, vol. 95, n° B8, p. 12,751–12,763. 172
- HINZE, W. J., C. AIKEN, J. BROZENA, B. COAKLEY, D. OATER, G. FLANAGAN, R. FORSBERG., T. HILDEBRAND, G. R. KELLER et J. KELLOGG. 2005, « New standards for reducing gravity data : the North America gravity database », *Geophysics*, vol. 70, p. J25 – J32. 69
- HOFMANN-WELLENHOF, B. et H. MORITZ. 2005, *Physical Geodesy*, Springer/Wien/New York. URL <http://springeronline.com>. 43, 233
- HOUGHTON, P. 2010, « Gravity gradiometry shows value in subsalt transition zones », *Offshore*, vol. 70, n° 4. 171
- HUANG, J. et M. VÉRONNEAU. 2005, « Determination of the Canadian Gravimetric Geoid 2005 (CGG05) using GRACE and terrestrial gravity data », in *AGU Fall Meeting Abstracts*, 23, Abstract G23A-03. 272
- HUANG, Y., A. V. OLESEN, M. WU et K. ZHANG. 2012, « SGA-WZ : a new strapdown airborne gravimeter », *Sensors*, vol. 12, doi :10.3390/s120709336, p. 9336–9348. 274, 275
- HWANG, C., Y.-S. HSIAO, H.-C. SHIH, M. YANG, K.-H. CHEN, R. FORSBERG et A. V. OLESEN. 2007, « Geodetic and geophysical results from a Taiwan airborne gravity survey : data reduction and accuracy assessment », *J. Geophys. Res.*, vol. 112, n° B04407, doi :10.1029/2005JB004220, p. 1 – 14. 214
- IGN. 2010, « Descriptifs quasi-géoïde et grilles de conversion altimétrique sur la France métropolitaine – relevé sur le site internet de l'Institut National de l'information Géographique et forestière », rapport technique, Institut National de l'Information Géographique et Forestière. 23 p. 166
- ILK, K. H., T. MAYER-GÜRR et M. FEUCHTINGER. 2003, « Gravity field recovery by analysis of short arcs of CHAMP », in *Proceedings of the 2nd Science Workshop of CHAMP*, 2003. 132

- JACQUES, M. 2002, *La gravimétrie aéroportée guidée : automatisation de l'étalonnage et premiers essais sur un véhicule*, mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes. 279
- JAMET, O. et E. THOMAS. 2004, « A linear algorithm for computing spherical harmonic coefficients of the gravitational potential from a constant density polyhedron », in *Proceedings of the second international GOCE user workshop, "GOCE, The Geoid and Oceanography", ESA-ESRIN, Frascati, Italy, 8-10 March 2004, ESA SP-569, June 2004*. 322, 325
- JEKELI, C. 1993, « A review of gravity gradiometer survey system data analyses », *Geophysics*, vol. 58, p. 508–514. 162
- JEKELI, C. 2001, *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*, Walter de Gruyter. 185
- JORDAN, T. A., F. FERRACCIOLI, D. G. VAUGHAN, J. W. HOLT, H. CORR, D. D. BLANKENSHIP et T. M. DIEHL. 2009, « Aerogravity evidence for major crustal thinning under the Pine Island Glacier region (West Antarctica) », *Geological Society of American Bulletin*, vol. 122, n° 5 - 6, doi :10.1130/B26417.1, p. 714 – 726. 214
- JULIER, S. J. et J. K. UHLMANN. 1997, « New extension of the Kalman filter to nonlinear systems », in *Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI, Vol. 3068, Ivan Kadar, Orlando, Florida, USA*, p. 182–193. 303, 425
- JUNG, W., J. BROZENA et M. PETERS. 2013, « Predicting gravity and sediment thickness in Afghanistan », *Geophys. J. Int.*, vol. 192, doi :10.1093/gji/ggs038, p. 586 – 601. 214
- JUTTEN, C. et J. HÉRAULT. 1991, « Blind separation of sources, Part 1 : An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture », *Signal Processing*, vol. 24, p. 1–10. 166
- JÄGGI, A., G. BEUTLER et L. MERVART. 2008, « GRACE gravity field determination using the celestial mechanics approach – First results », in *the IAG Symposium on "Gravity, Geoid, and Earth Observation 2008", June 23-27 2008, Chania/Greece*. 131
- JÄGGI, A., G. BEUTLER, U. MEYER, L. PRANGE, R. DACH et L. MERVART. 2009, « AIUB-GRACE02S – status of GRACE gravity field recovery using the celestial mechanics approach », in *the International Association of Geodesy Scientific Assembly, August 31 - September 4 2009, Buenos Aires, Argentina*. 131
- JÄGGI, A., G. BEUTLER, U. MEYER, L. PRANGE et M. L. 2011, « Global gravity field determination based on the GRACE-mission », rapport technique, Swiss National Report on the Geodetic Activities in the years 2007-2011, Section 2 (Gravity Field), Swiss Geodetic Commission, U. Marti (Ed), pp. 45-46, XXV General Assembly of the IUGG, Melbourne, Australia, 28 June - 7 July. 131
- KELLOGG, O. D. 1954, *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, New York, USA. 13, 342
- KENNETT, B. L. N. 1991, *IASPEI 1991 Seismological Tables*, Bibliotech, Canberra, Australia, 167 pp. 318
- KENNETT, B. L. N., E. R. ENGBAHL et R. BULAND. 1995, « Constraints on seismic velocities in the Earth from travel times », *Geophys. J. Int.*, vol. 122, p. 108–124. 318
- KINSEY, J. C., M. A. TIVEY et D. R. YOERGER. 2008, « Toward high-spatial resolution gravity surveying of the mid-ocean ridges with autonomous underwater vehicles », in *Proceedings of IEEE/MTS Oceans Conference*, p. 1–10. 278
- KINSEY, J. C., M. A. TIVEY et D. R. YOERGER. 2013, « Dynamics and navigation of autonomous underwater vehicles for submarine gravity surveying », *Geophysics*, vol. 78, p. G55–G68. 278

- KLINGELÉ, E. E., M. COCARD et H. G. KAHLE. 1997, « Kinematic GPS as a source for airborne gravity reduction in the airborne gravity survey of Switzerland », *J. Geophys. Res.*, vol. 102, n° B4, p. 7 705 – 7 715. 157, 214, 216
- KU, C. C. 1977, « A direct computation of gravity and magnetic anomalies caused by 2- and 3-dimensional bodies of arbitrary shape and arbitrary magnetic polarization by equivalent point method and a simplified cubic spline », *Geophysics*, vol. 42, p. 610–622. 340
- KUHN, M., W. E. FEATHERSTONE et J. F. KIRBY. 2009, « Complete spherical Bouguer gravity anomalies over Australia », *Australian Journal of Earth Sciences*, vol. 556, p. 213 – 223. 69
- KUSTOWSKI, B., E. EKSTÖRM et A. M. DZIEWONSKI. 2008, « Anisotropic shear-wave velocity structure of the Earth's mantle : a global model », *J. Geophys. Res.*, vol. 113, n° B6, doi :10.1029/2007JB005169. B06306. 318
- LACOSTE, L. J. B. 1967, « Measurement of gravity at sea and in the air », *Reviews in Geophysics*, vol. 5, n° 4, doi :10.1029/RG005i004p00477, p. 477 – 526. 218, 219
- LASKE, G., G. MASTERS, Z. MA et M. PASYANOS. 2013, « Update on CRUST1.0 - A 1-degree global model of Earth's crust », in *Res. Abstracts, 15, Abstract EGU2013-2658, 2013*. 319
- LAURENT-VARIN, J. 2014, « Rosetta : mission et gravité », in *Colloque G2, Strasbourg, 17-19 novembre 2014*. 320, 321, 332
- LAUTIER, J., L. VOLODIMER, T. HARDIN, S. MERLET, M. LOURS, F. PEREIRA DOS SANTOS et A. LANDRAGIN. 2014, « Hybridizing matter-wave and classical accelerometers », *Appl. Phys. Lett.*, vol. 105, n° 144102. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.4897358>. 164
- LEE, S. H. et S. K. CHOUGH. 2003, « Distribution and origin of shallow gas in deep-sea sediments of the Ulleung Basin, East Sea (Sea of Japan) », *Geo-Mar. Lett.*, vol. 22, p. 204–209. 174
- LEICK, A., L. RAPOPORT et D. TATARNIKOV. 2015, *GPS Satellite Surveying*, 4^e éd., Wiley. 417
- LEMOINE, F. G., S. B. LUTHCKE, D. D. ROWLANDS, D. S. CHINN, S. M. KLOSKO et C. M. COX. 2007, « The use of mascons to resolve time-variable gravity from GRACE », in *Dynamic Planet : Monitoring and Understanding a Dynamic Planet with Geodetic and Oceanographic Tools IAG Symposium Cairns, Australia 22–26 August, 2005*, édité par P. Tregoning et C. Rizos, Springer Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-540-49350-1, p. 231–236, doi :10.1007/978-3-540-49350-1_35. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-49350-1_35. 165
- LEQUENTREC-LALANCETTE, M.-F., D. ROUXEL et C. LENAMOURIC. 2006, « Géoïde européen : contribution SHOM. Mesures gravimétriques marines acquises par le N/O Le Suroît, traitées et validées par le SHOM », rapport technique, EPSHOM/CH/GG/NP N°449, SHOM. 244, 245
- LEVALLOIS, J.-J. 1970, *Géodésie Générale - Tome 3 - Le Champ de la Pesanteur*, Collection Scientifique de l'Institut Géographique National, Eyrolles. 13, 35
- LI, X. et H. J. GÖTZE. 2001, « Ellipsoid, geoid, gravity and geophysics », *Geophysics*, vol. 66, n° 6, p. 1660 – 1668. 69
- LUYENDICK, B. 1984, « On bottom gravity profile across the East Pacific Rise crest at 21° north », *Geophysics*, vol. 49, p. 2166–2177. 172
- MACMILLIAN, W. D. 1930, *Theoretical Mechanics, Vol 2 : the theory of the potential*, Dover Publications, New York, USA. 13

- MAESTRO, A., A. BARNOLAS, L. SOMOZA, A. LOWRIE et T. LOWTON. 2002, « Geometry and structure associated to gas-charged sediments and recent growth faults in the Ebro Delta (Spain) », *Mar. Geol.*, vol. 186, p. 351–368. 174
- MAIA, M. et P. GENTE. 1998, « Three dimensional gravity and bathymetry analysis of the Mid-Atlantic Ridge between 20°N and 24°N : flow geometry and temporal evolution of the segmentation », *J. Geophys. Res.*, vol. 103, p. 951–974. 171
- MAIA, M., J. GOSLIN et P. GENTE. 2007, « Evolution of the accretion processes along the Mid-Atlantic Ridge north of the Azores since 5.5 Ma : An insight into the interactions between the ridge and the plume », *Geochem. Geophys. Geosyst.*, vol. 8, n° Q03013, doi :10.1029/2006GC001318. 171
- MARTINEC, Z., K. PECK et M. BURSA. 1989, « The Phobos gravitational field modeled on the basis of its topography », *Earth Moon Planets*, vol. 45, p. 219–235. 321
- MAYER-GÜRR, T., D. RIESER, E. HÖCK, J. M. BROCKMANN, W.-D. SCHUH, I. KRASBUTTER, J. KUSCHE, A. M. S. KRAUSS, W. HAUSLEITNER, O. BAUR, A. JÄGGI, U. MEYER, L. PRANGE, R. PAIL, T. FECHER et T. GRUBE. 2012, « The new combined satellite only model GOCO03S », in *GGHS2012, International Symposium on Gravity, Geoid and Height Systems, Venice, October 9-12*. 131
- MAYER-GÜRR, T., A. EICKER et K. H. ILK. 2006, « ITG-GRACE02s : a GRACE gravity field derived from short arcs of the satellite's orbit », in *Proceedings of the First Symposium of International Gravity Field Service, Istanbul, 2006*. 132
- MAYER-GÜRR, T., A. EICKER et K. H. ILK. 2007, « ITG-GRACE03 gravity field model », URL <http://www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace03>, disponible en ligne. 131
- MAYER-GÜRR, T. et THE GOCO TEAM. 2015, « The combined satellite gravity field model GOCO05s », in *Geophysical Research Abstracts*, vol. Vol. 17, EGU2015-12364. 130
- MAYER-GÜRR, T., E. KURTENBACH et A. EICKER. 2010, « ITG-GRACE2010 gravity field model », URL <http://www.igg.uni-bonn.de/apmg/index.php?id=itg-grace2010>, disponible en ligne. 131
- MAYER-GÜRR, T., N. ZEHENTNER, B. KLINGER et A. KVAS. 2014, « ITSG-GRACE2014 : a new GRACE gravity field release computed in Graz », in *the GRACE Science Team Meeting (GSTM), Potsdam, September 29 - October 1*. 130
- MERLET, S., P. GILLOT, B. CENG et F. PEREIRA DOS SANTOS. 2014a, « Gravimetry for the LNE Watt balance », in *Colloque G2, Strasbourg, 17-19 novembre 2014*. 161
- MERLET, S., P. GILLOT, T. FARAH, Q. BODART, J. LE GOUET, C. PATRICK, C. GUERLIN, A. LOUCHET-CHAUVET, N. MALOSI, A. KOPAEV, D. G. FRANCIS, OLIVIER, M. DIAMENT, G. GENEVÈS, A. CLAIRON, A. LANDRAGIN et F. PEREIRA DOS SANTOS. 2014b, « Détermination de l'accélération de la pesanteur pour la balance du watt du LNE », *Revue française de métrologie*, vol. 2014-4, n° 36, doi :10.1051/rfm/2014013, p. 11–27. 161
- MIDDLEMISS, R. P., A. SAMARELLI, D. J. PAUL, J. HOUGH, S. ROWAN et G. D. HAMMOND. 2016, « Measurement of the Earth tides with a MEMS gravimeter », *Nature*, vol. 531, n° 7596, p. 614–617, ISSN 0028-0836. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature17397>. 307
- MIGLIACCIO, F., M. REGUZZONI, A. GATTI, F. SANSONO et M. HERCEG. 2011, « A GOCE-only global gravity field model by the space-wise approach », in *Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop, 31 March - 1 April, Munich*. 131

- MIGLIACCIO, F., M. REGUZZONI, F. SANSONO, C. TSCHERNING et M. VEICHERTS. 2010, « GOCE data analysis : the space-wise approach and the first space-wise gravity field model », in *the ESA Living Planet Symposium 2010, Bergen, June 27 - July 2, Bergen, Norway*. 131
- MISSIAEN, T., S. MURPHY, L. LONCKE et J.-P. HENRIET. 2002, « Very high resolution seismic mapping of shallow gas in the Belgian coastal zone », *Cont. Shelf Res.*, vol. 22, p. 291–301. 174
- MITTAL, P. 1984, « Algorithm for error adjustment of potential field data along a survey network », *Geophysics*. 222
- MONTAGNER, J. et B. KENNETT. 1996, « How to reconcile body-wave and normal-mode reference Earth models? », *Geophys. J. Int.*, vol. 125, p. 229–248. 318
- MORITZ, H. 2000, *The Geodetic Handbook*, vol. 74, chap. Geodetic Reference System GRS 80, Journal of Geodesy, Springer, p. 128 – 133. 39, 40, 48, 49, 66, 437
- MOROZOV, V. A. 1984, *Methods for solving incorrectly posed problems*, Springer-Verlag, New York/Berlin. 236
- MURPHY, C. A. 2004, « The Air-FTG airborne gravity gradiometer system », in *Airbone Gravity 2004 — Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity Workshop : (Record) Geoscience Australia*, 18, 7–14. 156, 171
- NAGY, D. 1966, « The gravitational attraction of a right rectangular prism », *Geophysics*, vol. 31, p. 362–371. 340
- NAGY, D., G. PAPP et J. BENEDEK. 2000, « The gravitational potential and its derivatives for the prism », *J. Geod.*, vol. 74, p. 552–560. 340
- NATAF, H.-C. et Y. RICARD. 1996, « 3SMAC : an a priori tomographic model of the upper mantle based on geophysical modeling », *Phys. Earth Planet. Inter.*, vol. 95, p. 101–122. 355
- NGA. 2008, « Gravity station data format and anomaly computations, St Louis (Mo) », rapport technique, Geospatial Sciences Division. 67, 69
- NIMA. 2000, « World Geodetic System 1984 : its definition and relationships with local geodetic systems », Tr8350.2, National Imagery and Mapping Agency, Department of Defense (DoD), USA. 354
- OLSON, D. 2010, « GT-1A and GT-2A airborne gravimeters : improvements in design, operation, and processing from 2003 to 2010 », in *R. J. L. Lane (editor), Airborne Gravity 2010 - Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity 2010 Workshop : Published jointly by Geoscience Australia and the Geological Survey of New South Wales, Geoscience Australia Record 2010/23 and GSNSW File GS2010/0457*. 273
- PAIL, R., S. L. BRUINSMA, F. MIGLIACCIO, C. FÖRSTE, H. GOIGINGER, W. D. SCHUH, E. HÖCK, M. REGUZZONI, J. M. BROCKMANN, O. ABRIKOSOV, M. VEICHERTS, T. FECHER, R. MAYRHOFER, I. KRASBUTTER, F. SANSONO et C. C. TSCHERNING. 2011, « First GOCE gravity field models derived by three different approaches », *J. Geod.*, vol. 85, doi :10.1007/s00190-011-0467-x, p. 819–843. 131
- PAIL, R., H. GOIGINGER, R. MAYRHOFER, W. SCHUH, J. M. BROCKMANN, I. KRASBUTTER, E. HOECK et T. FECHER. 2010a, « GOCE gravity field model derived from orbit and gradiometry data applying the time-wise method », in *the ESA Living Planet Symposium 2010, Bergen, June 27 - July 2, Bergen, Norway*. 131

- PAIL, R., H. GOIGINGER, W. D. SCHUH, E. HÖCK, J. M. BROCKMANN, T. FECHER, T. GRUBER, T. MAYER-GÜRR, J. KUSCHE, A. JÄGGI et D. RIESER. 2010b, « Combined satellite gravity field model GOCO01S derived from GOCE and GRACE », *Geophys. Res. Lett.*, vol. 37, n° L20314, doi : 10.1029/2010GL044906. 131
- PANET, I. 2015, « Gravité de la terre : des mesures aux modèles, une image de la dynamique interne », Mémoire pour l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Institut de Physique du Globe de Paris. 165, 319
- PANET, I., Y. KUROISHI et M. HOLSCHNEIDER. 2011, « Wavelet modeling of the gravity field by domain decomposition methods : an example over Japan », *Geophys. J. Int.*, vol. 184, n° 1, doi :10.1111/j.1365-246X.2010.04840.x, p. 203–219. 319
- PANET, I., V. MIKHAILOV, M. DIAMENT, F. POLLITZ, G. KING, O. DE VIRON, M. HOLSCHNEIDER, R. BIANCALE et J.-M. LEMOINE. 2007, « Coseismic and post-seismic signatures of the Sumatra 2004 December and 2005 March earthquakes in GRACE satellite gravity », *Geophys. J. Int.*, vol. 171, doi : 10.1111/j.1365-246X.2007.03525.x, p. 177–190. 166
- PASYANOS, M. E., T. G. MASTERS, G. LASKE et Z. MA. 2014, « LITHO1.0 : An updated crust and lithospheric model of the Earth », *J. Geophys. Res. Solid Earth*, vol. 119, doi :10.1002/2013JB010626, p. 2153–2173. 346, 347, 348, 355
- PAVLIS, N. K., D. S. CHINN, C. M. COX et F. G. LEMOINE. 2000, « Geopotential model improvement using POCM_4B dynamic ocean topography information : PGM2000A », in *The Joint TOPEX/Poseidon and Jason-1 Science Working Team Meeting, Miami, Florida, USA, November p. 15-17 2000*. 132
- PAVLIS, N. K., S. A. HOLMES, S. C. KENYON et J. K. FACTOR. 2012, « The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) », *J. Geophys. Res.*, vol. 117, n° B04406, doi :10.1029/2011JB008916, p. 1–38. 233
- PAVLIS, N. K., S. A. HOLMES, S. C. KENYON et F. J. K. 2008, « An earth gravitational model to degree 2160 : EGM2008 », in *the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13-18, 2008*. 42, 131
- PEREIRA DOS SANTOS, F. 2015, « Differential phase extraction in an atom gradiometer », *Phys. Rev.*, vol. 91, n° 063615. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.91.063615>. 164
- PETROVIĆ, S. 1996, « Determination of the potential of homogeneous polyhedral bodies using line integrals », *J. Geod.*, vol. 71, p. 44–52. 321
- PHAM, H. 2003, *Cours d'économétrie*, Cours de la maîtrise MASS de l'université Paris 7. 413
- PICK, M., J. PICHA et V. VYSKOCIL. 1973, *Theory of the Earth's gravity field*, Elsevier Scientific Publishing Company - Amsterdam/London/New York. 49
- PLOUFF, D. 1976, « Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections », *Geophysics*, vol. 41, p. 727–741. 340
- PRANGE, L. 2011, *Global Gravity Field Determination Using the GPS Measurements Made Onboard the Low Earth Orbiting Satellite CHAMP*, thèse de doctorat, Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, vol. 81. URL <http://www.sgc.ethz.ch/sgc-volumes/sgk-81.pdf>. 131
- PRANGE, L., A. JÄGGI, G. BEUTLER, R. DACH et L. MERVART. 2009, « Gravity field determination at the AIUB – the celestial mechanics approach », in *Observing our Changing Earth, edited by M. Sideris, Vol. 133, p. 353-362, ISBN 978-3-540-85425-8*, doi :10.1007/978-3-540-85426-5_42. 132

- RAMILLIEN, G., J. S. FAMIGLIETTI et J. WAHR. 2008, « Detection of continental hydrology and glaciology signals from GRACE : a review », *Surv. Geophys.*, vol. 29, p. 361–374. 166
- REIGBER, C., G. BALMINO, P. SCHWINTZER, R. BIANCALE, A. BODE, J. M. LEMOINE, R. KÖNIG, S. LOYER, H. NEUMAYER, J. C. MARTY, F. BARTHELMES, F. PEROSANZ et S. Y. ZHU. 2003a, « Global gravity field recovery using solely GPS tracking and accelerometer data from CHAMP », *Space Science Reviews*, vol. 29, p. 55 – 66. 132
- REIGBER, C., G. BALMINO, P. SCHWINTZER, R. BIANCALE, A. BODE, J. M. LEMOINE, R. KÖNIG, S. LOYER, K. H. NEUMAYER, J. C. MARTY, F. BARTHELMES, F. PEROSANZ et S. Y. ZHU. 2002, « A high quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and accelerometry (EIGEN-1S) », *Geophys. Res. Lett.*, vol. 29, n° 14. 132
- REIGBER, C., H. JOCHMANN, J. WÜNSCH, S. PETROVIĆ, P. SCHWINTZER, F. BARTHELMES, K. H. NEUMAYER, R. KÖNIG, C. FÖRSTE, G. BALMINO, R. BIANCALE, J. M. LEMOINE, S. LOYER et F. PEROSANZ. 2004, « Earth gravity field and seasonal variability from CHAMP », in *Reigber, C., Lühr, H., Schwintzer, P. and Wickert, J. (eds.), Earth Observation with CHAMP - Results from Three Years in Orbit, Springer, Berlin, p. 25-30.* 132
- REIGBER, C., R. SCHMIDT, F. FLECHTNER, R. KÖNIG, U. MEYER, K. H. NEUMAYER, P. SCHWINTZER et Z. S. Y. 2005, « An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE : EIGEN-GRACE02S », *Journal of Geodynamics*, vol. 39, p. 1 – 10. 132
- REIGBER, C., P. SCHWINTZER, K. H. NEUMAYER, F. BARTHELMES, R. KÖNIG, C. FÖRSTE, G. BALMINO, R. BIANCALE, J. M. LEMOINE, S. LOYER, S. L. BRUINSMA, F. PEROSANZ et T. FAYARD. 2003b, « The CHAMP-only Earth gravity field model EIGEN-2 », *Advances in Space Research*, vol. 31, n° 8, doi : 10.1016/S0273-1177(03)00162-5, p. 1883 – 1888. 132
- REIGBER, C., P. SCHWINTZER, R. STUBENVOLL, R. SCHMIDT, F. FLECHTNER, U. MEYER, R. KÖNIG, K. H. NEUMAYER, C. FÖRSTE, F. BARTHELMES, S. Y. ZHU, G. BALMINO, R. BIANCALE, J. M. LEMOINE, H. MEIXNER et J. C. RAIMONDO. 2006, « A high resolution global gravity field model combining CHAMP and GRACE satellite mission and surface data : EIGEN-CG01C », Scientific Technical Report STR06/07, GeoForschungsZentrum Potsdam. 132
- RICHESON, J. A. 2008, *Gravity gradiometer aided inertial navigation within non-GNSS environments*, thèse de doctorat, Université du Maryland, USA. 162
- RIES, J., S. BETTADPUR, R. EANES, Z. KANG, U. KO, C. MCCULLOUGH, P. NAGEL, N. PIE, S. POOLE, T. RICHTER, H. SAVE et B. TAPLEY. 2016, « The combined gravity model GGM05C », rapport technique, GFZ Data Services. URL <http://dx.doi.org/10.5880/icgem.2016.002>. 130
- RIES, J. C., S. BETTADPUR, S. POOLE et T. RICHTER. 2011, « Mean background gravity fields for GRACE processing », in *the GRACE Science Team Meeting, Austin, TX, August 8-10.* 131
- RIO, M. H., S. GUINEHUT et G. LARNICOL. 2011, « New CNES-CLS09 global mean dynamic topography computed from the combination of GRACE data, altimetry, and in situ measurements », *J. Geophys. Res.*, vol. 116, n° C07018, doi:10.1029/2010JC006505, p. 1 – 25. 141, 142
- RITSEMA, J., A. DEUSS, H. J. VAN HEIJST et J. H. WOODHOUSE. 2011, « S40RTS : a degree-40 shear-velocity model for the mantle from new rayleigh wave dispersion, teleseismic traveltime and normal-mode splitting function measurements », *Geophys. J. Int.*, vol. 184, n° 3, doi :10.1111/j.1365-246X.2010.04884.x, p. 1223–1236, ISSN 1365-246X. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04884.x>. 355
- ROGERS, R. M. 2007, *Applied Mathematics in Integrated Navigation*, AIAA Education Series. 185

- ROMMEVAUX, C., C. DEPLUS, P. PATRIAT et J. C. SEMPÉRÉ. 1993, « Three-dimensional gravity study of the Mid-Atlantic Ridge : evolution of the segmentation between 28° and 29°N during the last 10 m.y. », *J. Geophys. Res.*, vol. 99, p. 3015–3029. 171
- ROSMORDUC, V., J. BENVENISTE, E. BRONNER, S. DINARDO, O. LAURET, C. MAHEU, M. MILAGRO et P. N. 2011, « Radar Altimetry Tutorial », rapport technique, J. Benveniste and N. Picot Ed. URL <http://www.altimetry.info>. 140
- ROUSSEL, E. G., A.-L. SAUVADET, J. ALLARD, C. CHADUTEAU, P. RICHARD, M.-A. CAMBON BONAVIDA et E. CHAUMILLON. 2009, « Active archaeal methane cycling communities associated with gassy subsurface sediments of Marennes-Oléron Bay (France) », *Geomicrobiology Journal*, vol. 26, n° 1, p. 31–43. 174
- RUDENKO, S., D. DETTMERING, S. ESSELBORN, T. SCHÖNE, C. FÖRSTE, J.-M. LEMOINE, M. ABLAIN, D. ALEXANDRE et K.-H. NEUMAYER. 2014, « Influence of time variable geopotential models on precise orbits of altimetry satellites, global and regional mean sea level trends », *Advances in Space Research*, doi:10.1016/j.asr.2014.03.010. 131
- RUMMEL, R., W. YI et C. STUMMER. 2011, « GOCE gravitational gradiometry », *J. Geod.*, vol. 85, n° 11, doi:10.1007/s00190-011-0500-0, p. 777–790, ISSN 0949-7714. Special issue : "GOCE - The Gravity and steady-state Ocean Circulation Explorer". 296, 297
- SAIF, B. 2014, « Earth time variable gravity from a spaceborne cold atom gravity gradiometer », in *Abstract G23C-07 presented at 2014 Fall Meeting, AGU, San Francisco, Calif., 15-19 Dec.* 164
- SANDER, S. et S. FERGUSON. 2010, « Advances in SGL AIRGrav acquisition and processing », in R. J. L. Lane (editor), *Airborne Gravity 2010 - Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity 2010 Workshop : Published jointly by Geoscience Australia and the Geological Survey of New South Wales, Geoscience Australia Record 2010/23 and GSNSW File GS2010/0457*. 272
- SANDER, S., S. FERGUSON, L. SANDER et V. LAVOIE. 2004, « The AIRGrav airborne gravity system », in R. J. L. Lane (editor), *Airborne Gravity 2004 - Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity 2004 Workshop : Geoscience Australia Record 2004/18*, 49-54. 272
- SCHAEFFER, P., Y. FAUGERE, L. J.-F., A. OLLIVIER, T. GUINLE et P. N. 2012, « The CNES CLS11 global mean sea surface computed from 16 years of satellite altimeter data », *Marine Geodesy*, vol. 35, n° Special Issue Jason-2. 144
- SCHAEFFER, P., A. OLLIVIER, Y. FAUGERE et P. N. BRONNER, E. 2010, « The new CNES CLS 2010 Mean Sea Surface », in *OST-ST, Lisbon, October*. 143, 145
- SCHALL, J., A. EICKER et J. KUSCHE. 2014, « The ITG-Goce02 gravity field model from GOCE orbit and gradiometer data based on the short arc approach », *J. Geod.*, vol. 88, doi:10.1007/s00190-014-0691-2, p. 403–409. 131
- SCHWARZ, K.-P. et M. WEI. 1995, « Some unsolved problems in airborne gravimetry », in *Gravity and Geoid*, by H. Sunkel and I. Marson, vol. 113, Graz, Austria, Springer. 193
- SHEN, Y., Q. CHEN, H. HSU, X. ZHANG et L. LOU. 2013, « A modified short arc approach for recovering gravity field model », in *the GRACE Science Team Meeting, Austin, TX, Oct. 22-25*. 131
- SILLARD, P. 2001, *Estimation par moindres carrés*, Hermès Science Publications, Paris. 235
- SIMMONS, N. A., A. M. FORTE, L. BOSCHI et S. P. GRAND. 2010, « GyPSuM : A joint tomographic model of mantle density and seismic wave speeds », *J. Geophys. Res.*, vol. 115, n° B12, doi:10.1029/2010JB007631. B12310. 319

- SIMON, D. 2006, *Optimal state estimation*, Wiley. 421
- SIMONELLI, D. P., P. C. THOMAS, B. T. CARCICH et J. VERERKA. 1993, « The generation and use of numerical shape models for irregular solar system objects », *Icarus*, vol. 103, p. 49–61. 320
- STACEY, F. D. 1969, *Physics of the Earth*, Space Science Text Series, John Wiley & Sons, Inc. - New York - London - Sydney - Toronto. 35
- STAMMER, D., A. KÖHL et C. WUNSCH. 2004, « Estimating the ocean circulation and the geoid through a combined analysis of altimetric and GRACE geoid information », in *Proc. 2nd International GOCE User Workshop*, « *GOCE, The Geoid and Oceanography* », 8-10 march 2004, ESA SP-569. 140
- TAPLEY, B. D., D. P. CHAMBERS, S. BETTADPUR et J. C. RIES. 2003, « Large scale circulation from the GRACE GGM01 geoid », *Geophys. Res. Lett.*, vol. 30, n° 22, doi :10.1029/2003GL018622, p. 2163. 132
- TAPLEY, B. D., D. P. CHAMBERS, M. K. CHENG, M. C. KIM, S. R. POOLE et J. C. RIES. 2000, « The TEG-4 Earth gravity field model », in *the XXV General Assembly of the European Geophysical Society, Nice, France, 27 April, 2000*. 132
- TAPLEY, B. D., F. FLECHTNER, S. BETTADPUR et M. M. WATKINS. 2013, « The status and future prospect for GRACE after the first decade », in *Eos Trans., Fall Meet. Suppl., Abstract G22A-01*. 131
- TAPLEY, B. D., J. RIES, S. BETTADPUR, D. CHAMBERS, M. CHENG, F. CONDI et S. POOLE. 2007, « The GGM03 mean earth gravity model from GRACE », *Eos Trans. AGU 88(52), Fall Meet. Suppl., Abstract G42A-03*. 131
- TEHRANI, M. M. 1983, « Ring Laser Gyro data analysis with cluster sampling technique », in *Proc. of SPIE 0412, Fiber Optic and Laser Sensors I*, vol. 207, doi :10.1117/12.935818. 210
- TIKHONOV, A. N. et V. Y. ARSENIN. 1977, *Solution of ill-posed problems*, Washington : Winston & Sons. 411
- TITTERTON, D. H. et J. L. WESTON. 2004, *Strapdown Inertial Navigation Technology*, vol. 207, AIAA Education Series. 194
- TRABANT, C., A. R. HUTKO, M. BAHAVAR, R. KARSTENS, T. AHERN et R. ASTER. 2012, « Data products at the IRIS DMC : Stepping Stones for Research and Other Applications », *Seismological Research Letters*, vol. 83, n° 5, doi :10.1785/0220120032, p. 846–854. 318
- TSOULIS, D. 2001, « Terrain correction computations for a densely sampled DTM in the Bavarian Alps », *J. Geod.*, vol. 75, p. 291–307. 320
- TSOULIS, D. et S. PETROVIĆ. 2001, « On the singularities of the gravity field of a homogeneous polyhedral body », *Geophysics*, vol. 66, p. 535–539. 321
- TURCOTTE, D. L. et G. SCHUBERT. 2014, *Geodynamics*, Cambridge University Press. 35, 63, 88
- UIEDA, L., V. BARBOSA et C. BRAITENBERG. 2016, « Tesseroids : Forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates », *Geophysics*, doi :10.1190/geo2015-0204.1, p. F41–F48, ISSN 0016-8033. URL <http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/geo2015-0204.1>. 299, 300, 340
- UTEX-CSR. 2003, « UTEX CSR », URL <http://www.csr.utexas.edu/grace/gravity/>, disponible en ligne. 132
- UTEX-CSR. 2004, « UTEX CSR », URL <http://www.csr.utexas.edu/grace/gravity/>, disponible en ligne. 132

- VALLIANT, H. D. 1991, « The LaCoste and Romberg air/sea gravity meter », in *Handbook of geophysical exploration at sea*, édité par R. A. Geyer, 2^e éd., CRC Press, p. 141–176. 156, 219
- VALTY, P. 2013, *Apport de la géodésie à l'étude des transferts de masse d'origine climatique. Application au sud de l'Europe*, thèse de doctorat, Institut de Physique du Globe de Paris. 166
- VALTY, P., O. DE VIRON, I. PANET, M. VAN CAMP et J. LEGRAND. 2013, « Assessing the precision in loading estimates by geodetic techniques in Southern Europe », *Geophys. J. Int.*, vol. 194, n° 3, p. 1441–1454. 166
- VAN CAMP, M., O. DE VIRON et T. CAMELBEECK. 2011, « Les déformations verticales du sol par la mesure de l'accélération de la pesanteur », *Ciel et Terre (bimensuel de la Société Royale Belge d'Astronomie, de Météorologie et de Physique du Globe)*, vol. 127, p. 130 – 136. 116
- VAN DER LEE, S. et G. NOLET. 1997, « Upper mantle S-velocity structure of North America », *J. Geophys. Res.*, vol. 102, p. 22 815–22 38. 318
- VERMAST, J. 1999, *La gravimétrie aéroportée guidée : intégration du GPS*, mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes. 279
- VIEL, N. 2000, *La gravimétrie aéroportée guidée : mise en œuvre de la chaîne d'acquisition*, mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes. 279
- VISSER, P. N. M. A. 2011, « A glimpse at the GOCE satellite gravity gradient observations », *Advances in Space Research*, vol. 47, doi :10.1016/j.asr.2010.09.015, p. 393 – 401. 296
- VLAMYNCK, E. 1999, *La gravimétrie aéroportée guidée : intégration des accéléromètres*, mémoire de fin d'études, École Supérieure des Géomètres et Topographes. 279
- WAHR, J. 1996, *Geodesy and Gravity*, Samizdat Press. URL <http://landau.mines.edu/~samizdat>. 13, 35, 63
- WEIGELT, M., T. VAN DAM, A. JÄGGI, L. PRANGE, M. TOURIAN, W. KELLER et N. SNEEUW. 2013, « Time-variable gravity signal in greenland revealed by high-low satellite-to-satellite tracking », *J. Geophys. Res.*, vol. 118, n° 7, doi :10.1002/jgrb.50283, p. 3848–3859. 131
- WERMUTH, M., D. SVEHLA, L. FÖLDVARY, C. GERLACH, T. GRUBER, B. FROMMKNECHT, T. PETERS, M. ROTHACHER, R. RUMMEL et P. STEIGENBERGER. 2004, « A gravity field model from two years of CHAMP kinematic orbits using the energy balance approach », in *EGU 1st General Assmby, April 25 – 30, 2004, Nice/France*. 132
- WERNER, R. A. 1997, « Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron », *Comp. Geosc.*, vol. 23, p. 1071–1077. 321, 322, 326, 332
- WERNER, R. A. et D. J. SCHEERES. 1996, « Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia », *Cel. Mech. Dyn. Astr.*, vol. 65, p. 313–344. 320
- WESSEL, P., W. H. F. SMITH, R. SCHARROO, J. F. LUIS et F. WOBBE. 2013, « Generic Mapping Tools : Improved version released », *EOS Trans. AGU*, vol. 94, p. 409–410. 42, 135, 136, 195
- WEVER, T., F. ABEGG, H. FIELDER, G. FECHNER et I. STENDER. 1998, « Shallow gas in the muddy sediments of Eckernförde Bay, Germany », *Cont. Shelf Res.*, vol. 18, p. 1 715–1 739. 174
- WHILE, J., E. BIEGERT et A. JACKSON. 2008, « Interpolation of gravity and gravity gradient data by using the generalized sampling expansion : Theory », *Geophysics*, vol. 73, n° 2, doi :10.1190/1.2831934., p. 111–121. 162

- WILD-PFEIFFER, F. 2008, « A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry », *J. Geod.*, vol. 82, n° 10, doi :10.1007/s00190-008-0219-8, p. 637–653. 340
- WRIGHT, T. J., C. EBINGER, J. BIGGS, A. AYELE, Y. GEZAHEGN, D. YIRGU, D. KEIR et A. STORK. 2006, « Magma-maintained rift segmentation at continental rupture in the 2005 Afar dyking episode », *Nature*, vol. 442, p. 291–294. 355
- YI, W., R. RUMMEL et T. GRUBER. 2013, « Gravity field contribution analysis of GOCE gravitational gradient components », *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 57, n° 2, doi :10.1007/s11200-011-1178-8, p. 174–202, ISSN (Online) 1573–1626. 130, 131
- YU, N., J. M. KOHEL, J. R. KELLOGG et L. MALEKI. 2006, « Development of an atom-interferometer gravity gradiometer for gravity measurement from space », *Applied Physics B*, vol. 84, n° 4, p. 647–652. 164
- ZHAO, L., R. FORSBERG, M. WU, A. V. OLESEN, K. ZHANG et J. CAO. 2015, « A flight test of strapdown airborne gravimeter SGA-WZ in Greenland », *Sensors*, vol. 15, doi :10.3390/s150613258, p. 13 258–13 269. 159
- ZUIDWEG, K. et G. R. MUMAW. 2009, « Airborne gravity gradiometry for exploration geophysics – the first 5 years », *Bell internal report*, vol. 62, n° 5, p. 1386–1393. 171
- ZWILLINGER, D. 1998, *Handbook of differential equations*, 3^e éd., Academic Press. 225, 240